Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, Equation Différentielles Ordinaires
SMI5U06TC. Partiel du 21 octobre 2022

L'examen contient 4 exercices. Le barème est sur 26 points. (Il est donc inutile de tout faire pour avoir 20.)
Les documents (polycopié du cours, notes de TD, notes personnelles) sont autorisés.
Chaque réponse devra être justifiée.

Exercice 1 (Non unicité, barème 3 points)**.**
On considère le problème de Cauchy (avec $y \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}_+^\star, \mathbb{R})$)

$$y'(t) = 2t\sqrt{|y(t) - 1|},\ t > 0, \tag{1}$$
$$y(0) = 1. \tag{2}$$

1. Donner deux solutions au problème (1)-(2).

   Corrigé – Une première solution est donnée par $y(t) = 1$ pour tout $t \geq 0$.
   On peut trouver une seconde solution vérifiant $y(t) > 1$ pour tout $t > 0$ en écrivant l'équation sous forme de variables séparées, c'est-à-dire
   $$2(\sqrt{y-1})'(t) = \frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)-1}} = 2t,\ \textit{pour tout}\ t > 0.$$
   Ce qui donne en intégrant entre 0 et t,
   $$2(\sqrt{y(t)-1})(t) = t^2,$$
   et donc $y(t) = \frac{t^4}{4} + 1$ pour tout $t \geq 0$. Cette fonction est bien solution du probème.

2. Pourquoi le théorème d'unicité vu en cours ne s'applique t-il pas pour le problème (1)-(2) ?

   Corrigé – La fonction $(t, x) \mapsto 2t\sqrt{|x - 1|}$, de $[0, +\infty[\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n'est pas localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument.

Exercice 2 (Lemme de Villani, barème 8 points)**.**
Soient $0 < T \leq +\infty$ et $C > 0$. On suppose que $y \in C^1([0, T[, \mathbb{R})$ vérifie

$$y'(t) \geq -C|y(t)|,\quad t \in [0, T[, \tag{3}$$
$$y(0) = 0. \tag{4}$$

(Noter que $y'(0)$ désigne la dérivée à droite en 0).
L'objectif est de montrer que $y(t) \geq 0$ pour tout $0 \leq t < T$.

1. (Un exemple) On considère le problème de Cauchy

$$y'(t) = -y(t) + t,\quad t > 0, \tag{5}$$
$$y(0) = 0. \tag{6}$$

   (a) Donner la solution maximale de (5)-(6).

   Corrigé – La solution générale de (5) (somme de la solution générale du problème homogène et d'une solution particulière) est, avec $\alpha \in \mathbb{R}$,
   $$y(t) = \alpha e^{-t} + t - 1,\quad t \geq 0.$$
   La solution de (5)-(6) est donc
   $$y(t) = e^{-t} + t - 1,\quad t \geq 0.$$

   (b) On note y la solution maximale de (5)-(6). Montrer que $y(t) > 0$ pour tout $t > 0$ et donc que y vérifie (3)-(4) avec $C = 1$ et $T = +\infty$.

Corrigé – Comme $y'(t) = 1 - e^{-t} > 0$ pour tout $t > 0$, la fonction y est strictement croissante (sur $\mathbb{R}_+$) et donc strictement positive sur $\mathbb{R}_+^\star$. Elle vérifie bien (3)-(4) avec $C = 1$ et $T = +\infty$.

On revient maintenant au cas général décrit au début de l'énoncé, c'est-à-dire que y est une fonction supposée vérifier (3)-(4). On va montrer qu'elle vérifie nécessairement $y(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0, T[$ (ce qui est bien vrai pour l'exemple donné à la question 1).
Pour cela, on pose

$$g(t) = y'(t) + C|y(t)|, \text{ pour tout } t \geq 0,$$

et on définit la fonction f de $[0, T[\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(t, x) = -C|x| + g(t).$$

2. Montrer que y est solution du problème de Cauchy

$$z'(t) = f(t, z(t)),\ 0 < t < T, \tag{7}$$
$$z(0) = 0. \tag{8}$$

Corrigé – C'est une conséquence immédiate de la définition de g, $y'(t) = -C|y(t)| + g(t) = f(t, y(t))$, et du fait que $y(0) = 0$.

3. Montrer que $f \in C([0, T[\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et est (localement) lipschitzienne par rapport à son deuxième argument. En déduire que y est la solution maximale du problème de Cauchy (7)-(8).

Corrigé – Comme $y \in C^1([0, T[, \mathbb{R})$, la fonction g est bien continue sur $[0, T[$. On en déduit que $f \in C([0, T[\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Puis, pour tout $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, T[$,

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = C|\ |x_1| - |x_2|\ | \leq C|x_1 - x_2|,$$

ce qui prouve que f est lipschitzienne et donne l'existence et l'unicité de la solution maximale de (7)-(8). Cette solution maximale est donc y (puisque y est solution sur $[0, T[$ de (7)-(8)).

4. Montrer que la fonction z définie, pour tout $0 \leq t < T$, par

$$z(t) = e^{-Ct} \int_0^t e^{Cs} g(s) ds.$$

est solution de (7)-(8).
[On pourra remarquer que $g(t) \geq 0$ pour tout t.]
En déduire que $y = z$ et donc $y(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0, T[$.

Corrigé – On a bien $z(0) = 0$ et, pour tout $t \in [0, T[$,

$$z'(t) = -Ce^{-Ct} \int_0^t e^{Cs} g(s) ds + e^{-Ct} e^{Ct} g(t) = -Cz(t) + g(t).$$

Comme $z(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0, T[$, on a aussi $z'(t) = -C|z(t)| + g(t)$. Ceci prouve que la fonction z est solution de (7)-(8).
La fonction z est donc aussi la solution maximale de (7)-(8), c'est-à-dire $z = y$. Comme $z \geq 0$, on en déduit que $y \geq 0$.

Exercice 3 (Explosion ou non explosion, barème 6 points)**.**
Soient $a \in C([0,+\infty[, \mathbb{R}_+^\star)$, $1 < \beta < +\infty$ et $0 < T \leq +\infty$.
On suppose que $y \in C^1([0,T[, \mathbb{R})$ vérifie

$$y'(t) \geq a(t)|y(t)|^\beta,\ t \in [0,T[, \tag{9}$$
$$y(0) = y_0 > 0. \tag{10}$$

(Noter que $y'(0)$ désigne la dérivée à droite en 0).

1. Montrer que la fonction y est croissante et en déduire que $y(t) \geq y_0$ pour tout $t \in [0,T[$.

   Corrigé – *L'équation (9) donne $y'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T[$. la fonction y est donc croissante et donc $y(t) \geq y_0$ pour tout $t \in [0,T[$.*

2. On suppose dans cette question que $\gamma = \inf_{t\geq 0} a(t) > 0$. Montrer que $T < +\infty$ et donner un majorant de T en fonction de γ, β et y_0.

   Corrigé – *Comme $y(t) > 0$ pour tout t, on a, pour tout $t \in [0,T[$,*
   $$\frac{1}{(1-\beta)\gamma}(y^{1-\beta})'(t) = \frac{y'(t)}{\gamma y(t)^\beta} \geq \frac{y'(t)}{a(t)|y(t)|^\beta} \geq 1.$$
   En intégrant cette inégalité entre 0 et t on obtient, pour tout $t \in [0,T[$,
   $$\frac{1}{(1-\beta)\gamma}(y(t)^{1-\beta}) - \frac{1}{(1-\beta)\gamma}(y_0^{1-\beta}) \geq t,$$
   c'est-à-dire
   $$\frac{1}{(\beta-1)\gamma}(y(t)^{1-\beta}) \leq \frac{1}{(\beta-1)\gamma}(y_0^{1-\beta}) - t.$$
   Ce qui est impossible pour $t \geq \frac{1}{(\beta-1)\gamma}(y_0^{1-\beta})$ (car $y(t) > 0$). On en déduit $T \leq \frac{1}{(\beta-1)\gamma}(y_0^{1-\beta})$.

3. On suppose dans cette question que $a(t) = \frac{1}{(t+1)^2}$, $\beta = 2$ et $y_0 = 1$. montrer qu'il existe $y \in C^1([0,T[, \mathbb{R})$ solution de (9)-(10) avec $T = +\infty$.

   Corrigé – *Il suffit de prendre $y(t) = t + 1$ pour tout $t \geq 0$.*

Exercice 4 (Equation linéaire du deuxième ordre, barème 9 points)**.** On s'intéresse à l'équation différentielle

$$t^2 y''(t) - 3ty'(t) + 4y(t) = 0,\ t > 0. \tag{11}$$

N.B. En divisant par t^2 l'équation (11), les résultats vus en cours montrent que l'ensemble des solutions de (11) est un e.v. de dimension 2.

1. Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{R}$ bien choisi la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est solution de (11).

   Corrigé – *Pour que la fonction $t \mapsto t^\alpha$ soit solution de (11) il faut et il suffit que $\alpha(\alpha-1) - 3\alpha + 4 = 0$, c'est-à-dire $(\alpha-2)^2 = 0$ et donc $\alpha = 2$.*

Dans la suite, on note y_1 la fonction trouvée à la question 1.

2. On cherche une seconde solution de (11), indépendante de y_1 par la technique de réduction d'ordre, c'est-à-dire que l'on cherche cette solution sous la forme $y_2 = zy_1$.
   (a) Donner l'équation différentielle du premier ordre que doit satisfaire la fonction z' pour que y_2 soit solution de (11).

Corrigé –

$$\begin{aligned} y_2(t) &= z(t)y_1(t), \\ y_2'(t) &= z(t)y_1'(t) + z'(t)y_1(t), \\ y_2''(t) &= z(t)y_1''(t) + 2z'(t)y_1'(t) + z''(t)y_1(t), \end{aligned}$$

et donc $t^2y_2''(t) - 3ty_2'(t) + 4y_2(t) = t^2z''(t)y_1(t) + (2t^2y_1'(t) - 3ty_1(t))z'(t)$.
Pour que y_2 *soit solution de* (11)*, il faut et il suffit que* z *vérifie, pour tout* $t > 0$,

$$t^4z''(t) + t^3z'(t) = 0.$$

(b) Donner une solution non nulle de l'équation différentielle sur z' trouvée à la question 2a.

Corrigé – Une solution possible est $z'(t) = \frac{1}{t}$ *(pour tout* $t > 0$*).*

(c) En déduire que la fonction $t \mapsto t^2 \ln(t)$ est solution de (11). Cette fonction est-elle indépendante de la fonction y_1 ?

Corrigé – En prenant $z(t) = \ln(t)$*, la question précédente montre que* $y_2 = zy_1$ *est solution de* (11)*. On a bien* $y_2(t) = t^2 \ln(t)$*.*
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que* $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$*. En prenant* $t = 1$ *on en déduit que* $\alpha = 0$*. Puis* $\beta y_2 = 0$ *implique* $\beta = 0$*. Les fonctions* y_1 *et* y_2 *sont bien indépendantes.*

(d) Donner l'ensemble des solutions de (11).

Corrigé – Les solutions de (11) *sont les fonctions de la forme* $t \mapsto \alpha t^2 + \beta t^2 \ln(t)$*, avec* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*.*

Dans la suite, on note y_2 la fonction trouvée à la question 2c.
On cherche maintenant l'ensemble des solutions de l'équation non homogène

$$t^2y''(t) - 3ty'(t) + 4y(t) = t^2,\ t > 0. \tag{12}$$

3. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p = zy_2$.

(a) Donner l'équation différentielle du premier ordre que doit satisfaire la fonction z' pour que y_p soit solution de (12).

Corrigé –

$$\begin{aligned} y_p(t) &= z(t)y_2(t), \\ y_p'(t) &= z(t)y_2'(t) + z'(t)y_2(t), \\ y_p''(t) &= z(t)y_2''(t) + 2z'(t)y_2'(t) + z''(t)y_2(t), \end{aligned}$$

et donc $t^2y_p''(t) - 3ty_p'(t) + 4y_p(t) = t^2z''(t)y_2(t) + (2t^2y_2'(t) - 3ty_2(t))z'(t)$.
Pour que y_p *soit solution de* (12)*, il faut et il suffit que* z *vérifie, pour tout* $t > 0$,

$$t^4z''(t)\ln(t) + (2t^3 + 4t^3\ln(t) - 3t^3\ln(t))z'(t) = t^2,$$

c'est-à-dire

$$t^2z''(t)\ln(t) + (2t + t\ln(t))z'(t) = 1.$$

(b) Montrer que la fonction z' définie par $z'(t) = \frac{1}{2t}$ (pour tout $t > 0$) est solution de l'équation différentielle sur z' trouvée à la question 3a.

Corrigé – On a bien

$$t^2z''(t)\ln(t) + (2t + t\ln(t))z'(t) = -\frac{t^2}{2t^2}\ln(t) + (2t + t\ln(t))\frac{1}{2t} = 1.$$

(c) Donner l'ensemble des solutions de (12).

Corrigé – La question précédente donne que la fonction $t \mapsto (1/2)t^2\ln(t)^2$ *est solution de* (12)*.*
Les solutions de (12) *sont donc les fonctions de la forme* $t \mapsto \alpha t^2 + \beta t^2 \ln(t) + (1/2)t^2\ln(t)^2$*, avec* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*.*