

# Correction de l'examen Janvier 2018 : Compétition entre espèces

On considère le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)(1 - x(t) - y(t)/2), \\ y'(t) &= y(t)(1 - y(t) - x(t)/2). \end{cases} \quad (1)$$

Ce système modélise l'évolution des populations de deux espèces vivant sur le même territoire et se nourrissant des mêmes ressources.

## Partie 1 : Questions préliminaires

1. On pose  $X: t \mapsto (x(t), y(t))^t$ . Mettre le système d'équations (1) sous la forme  $X'(t) = F(X(t))$  où la fonction  $F$  doit être explicitée. Définir le problème de Cauchy associé aux données initiales  $t_0 = 0$ ,  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* On recherche une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . On pose alors

$$F: \quad \mathbb{R}^2 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(1 - x - y/2) \\ y(1 - y - x/2) \end{pmatrix}.$$

L'équation (1) est alors équivalente à l'équation différentielle

$$X'(t) = F(X(t)).$$

Pour  $t_0 = 0$ ,  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ , on pose  $X_0 = (x_0, y_0)^t$ . Le problème de Cauchy associé est

$$\begin{cases} X'(t) &= F(X(t)), \\ X(0) &= X_0. \end{cases}$$

□

2. Montrer l'existence et l'unicité d'une unique solution maximale associée au problème de Cauchy.

*Démonstration.* On souhaite appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Vérifions que la fonction  $F$  est de classe  $C^1$ . Pour cela, on peut utiliser le fait que les composantes de  $F$  sont des polynômes en  $x$  et  $y$  (On obtient même que  $F$  est de classe  $C^\infty$ ). D'après, le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale associée au problème de Cauchy. □

3. Soit  $(J, (x, y)^t)$  une solution maximale de (1). Montrer que  $(J, (y, x)^t)$  est une solution maximale de (1).

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$F((x, y)^t) = F((y, x)^t),$$

Ceci implique que si  $(J, (x, y)^t)$  une solution maximale de (1) associée à la condition initiale  $(x, y)^t(0) = (x_0, y_0)^t$  alors  $(J, (y, x)^t)$  est une solution de (1) associée à la condition initiale  $(y, x)^t(0) = (y_0, x_0)^t$ . Il reste à montrer que cette solution est bien maximale. Supposons par l'absurde qu'elle ne le soit pas. Dans ce cas, il existe une solution  $(\tilde{J}, (\tilde{y}, \tilde{x})^t)$  du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) &= F(X(t)), \\ X(0) &= (y_0, x_0)^t. \end{cases}$$

qui prolonge  $(y, x)^t$  sur un intervalle  $\tilde{J}$  strictement plus grand que  $J$ . On obtient par ce qui précède que  $(\tilde{J}, (\tilde{x}, \tilde{y})^t)$  prolonge strictement la solution  $(J, (x, y)^t)$ . Comme cette dernière est maximale, on obtient une absurdité. □

## Partie 2 : Solutions particulières

4. Trouver tous les points d'équilibre de (1). Étudier leur stabilité. Donner les solutions maximales de (1) qui leur sont associées.

*Démonstration.* Les points d'équilibres de (1) sont les points  $(x_1, y_1)$  de  $\mathbb{R}^2$  tels que  $F((x_1, y_1)^t) = 0_{\mathbb{R}^2}$ . Soit  $(x_1, y_1)$  un tel point. On a

$$0 = x_1(1 - x_1 - y_1/2),$$

ainsi soit  $x_1 = 0$ , soit  $1 - x_1 - y_1/2 = 0$ .

- i. Si  $x_1 = 0$ , alors

$$0 = y_1(1 - y_1 - x_1/2) = y_1(1 - y_1),$$

et  $y_1 \in \{0, 1\}$ .

- ii. Si  $x_1 \neq 0$ , on a  $1 - x_1 - y_1/2 = 0$  et  $0 = y_1(1 - y_1 - x_1/2)$ , donc soit  $y_1 = 0$ , soit  $1 - y_1 - x_1/2 = 0$ .

- a. Si  $y_1 = 0$ , on obtient

$$0 = 1 - x_1,$$

donc  $x_1 = 1$ .

- b. Si  $y_1 \neq 0$ , alors on obtient

$$\begin{cases} 1 - x_1 - y_1/2 = 0, \\ 1 - y_1 - x_1/2 = 0. \end{cases}$$

En résolvant ce système d'équations, on obtient que  $x_1 = y_1 = 2/3$ .

L'ensemble des points d'équilibres est donc

$$\{(0, 0)^t, (0, 1)^t, (1, 0)^t, (2/3, 2/3)^t\}.$$

Les solutions maximales associées sont

$$\{(\mathbb{R}, s \mapsto (0, 0)^t), (\mathbb{R}, s \mapsto (0, 1)^t), (\mathbb{R}, s \mapsto (1, 0)^t), (\mathbb{R}, s \mapsto (2/3, 2/3)^t)\}.$$

Étudions la stabilité des points d'équilibre. Nous souhaitons appliquer le théorème de Grobman-Hartman et cherchons pour cela les valeurs propres de la matrice jacobienne de  $F$  évaluée en ces points.

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$\text{Jac}F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - 2x - y/2 & -x/2 \\ -y/2 & 1 - 2y - x/2 \end{pmatrix},$$

donc

$$\text{Jac}F(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Jac}F(0, 1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{Jac}F(1, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Jac}F(2/3, 2/3) = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Les trois premières matrices sont triangulaires ou diagonales donc les valeurs propres sont les valeurs présentes sur la diagonale. L'unique valeur propre de  $\text{Jac}F(0, 0)$  est 1. Les valeurs propres de  $\text{Jac}F(0, 1)$  et  $\text{Jac}F(1, 0)$  sont  $-1$  et  $1/2$ . En calculant le polynôme caractéristique de  $\text{Jac}F(2/3, 2/3)$ , on trouve que les valeurs propres sont  $-1$  et  $-1/3$ . Comme aucune valeur propre n'a sa partie réelle nulle, on peut conclure par le théorème de Grobman-Hartman que  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  sont des équilibres instables tandis que  $(2/3, 2/3)$  est un équilibre stable.  $\square$

5. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Supposons que la population  $y$  est absente au temps 0, c'est-à-dire que  $y_0 = 0$ . Dans la suite, il n'est pas nécessaire de calculer une solution explicite.

- (a) Montrer que  $y$  reste nulle sur tout l'intervalle de définition de la solution maximale associée et que  $x$  est solution d'une équation que l'on explicitera.

*Démonstration.* Soit  $(J, x)$  la solution maximale associée à l'équation

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)(1 - x(t)), \\ x(0) &= x_0. \end{cases}$$

Alors,  $(J, [t \mapsto (x(t), 0)^t])$  est une solution du problème de Cauchy dont la donnée initiale est  $(x_0, 0)^t$ . On montre comme dans la question 3., que cette solution est la solution maximale du problème de Cauchy. Ainsi,  $y$  reste nulle.  $\square$

(b) Trouver les points d'équilibres de l'équation trouvée en 5.a.

*Démonstration.* Les points d'équilibres sont 0 et 1.  $\square$

(c) Montrer que si  $x_0 \geq 0$ , alors  $[0, +\infty[ \subset J$  et  $x$  converge en  $+\infty$  vers une limite finie à déterminer.

*Démonstration.* Lorsque  $x_0 = 0$ , la solution maximale associée est  $(\mathbb{R}, t \mapsto 0)$  et la trajectoire associée est  $\{0\}$ . Lorsque  $x_0 = 1$ , la solution maximale associée est  $(\mathbb{R}, t \mapsto 1)$  et la trajectoire associée est  $\{1\}$ . Si  $x_0 \in ]0, 1[$ , alors la solution maximale  $(J, x)$  est à valeurs dans  $]0, 1[$ . En effet, si ce n'est pas le cas, le théorème des valeurs intermédiaires assure que la trajectoire de  $x$  s'intersecte avec  $\{0\}$  ou  $\{1\}$ . Cependant, dans le cas des équations autonomes, les trajectoires sont soit confondues soit disjointes. On obtient la contradiction souhaitée car les solutions ne coïncident pas au temps 0. On obtient alors que  $x$  est croissante sur  $J$  et bornée. Elle est donc globale  $J = \mathbb{R}$  et  $x$  converge en  $+\infty$ . Sa limite est nécessairement un équilibre. Ainsi,  $x$  converge vers 1. De même, si  $x > 1$ , la solution est définie sur  $[0, +\infty[$  et converge vers 1.  $\square$

(d) Tracer l'ensemble des trajectoires associées à cette équation.

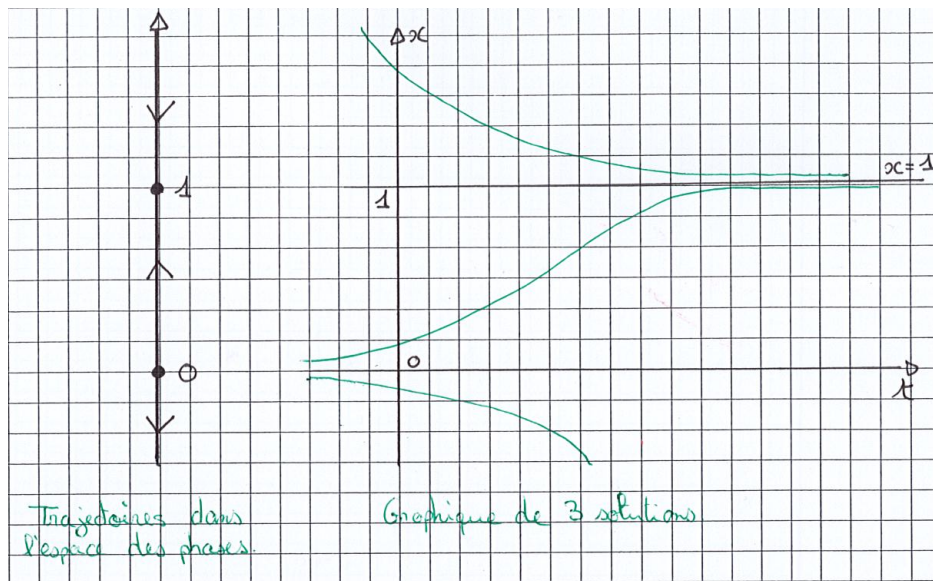


FIGURE 1 – Trajectoires et graphiques de solutions de  $x' = x(1 - x)$

6. Supposons que les populations  $x$  et  $y$  sont égales au temps 0, c'est-à-dire que  $y_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ .

(a) Montrer que les populations  $x$  et  $y$  restent égales sur tout l'intervalle de définition de la solution maximale associée et que  $x$  est solution d'une équation que l'on explicitera.

*Démonstration.* On considère la solution maximale  $(J, z)$  du problème de Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) &= z(t)(1 - 3/2z(t)), \\ z(0) &= x_0. \end{cases}$$

Alors, on obtient comme plus haut que  $(J, [s \mapsto (z(s), z(s))^t])$  est la solution maximale associée au problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) &= F(X(t)), \\ X(0) &= (x_0, x_0)^t. \end{cases}$$

□

(b) Reproduire les questions 5. (b), (c), (d) dans ce cas.

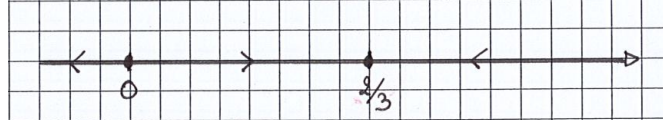


FIGURE 2 – Trajectoires de solutions de  $x' = x(1 - 3/2x)$

*Démonstration.* Les points d'équilibre sont 0 et  $2/3$ . Si  $x_0 \geq 0$ , les solutions convergent vers  $2/3$ . Le reste est identique. □

7. Sur le plan de phase, tracer l'ensemble des trajectoires du système (1) obtenues dans cette partie. Préciser grâce à des flèches le sens de parcours de ces trajectoires.

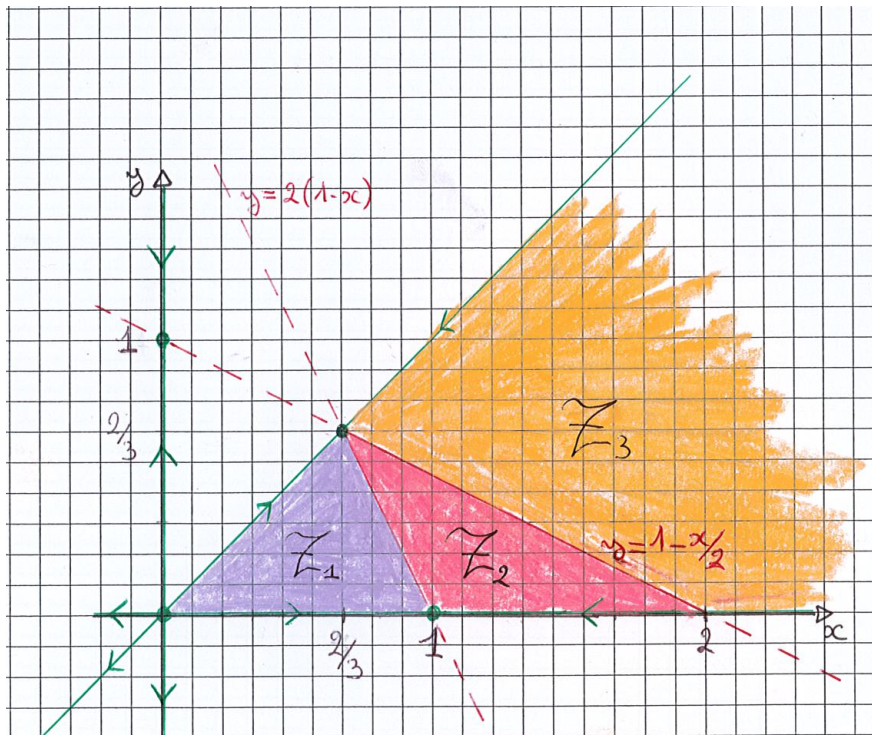


FIGURE 3 – Trajectoires de quelques solutions

### Partie 3 : Solutions locales, globales, positive

8.  $F$  est-elle globalement lipschizienne ? Justifier la réponse.

*Démonstration.* On note  $\|\cdot\|_2$  la norme euclidienne canonique sur  $\mathbb{R}^2$ . On a pour  $x > 0$

$$\|F(x, 0) - F(0, 0)\|_2 / \|(x, 0)^t\|_2 = \frac{|x||1-x|}{|x|} = |1-x|,$$

ainsi, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \|F(x, 0) - F(0, 0)\|_2 / \|(x, 0)^t\|_2 = +\infty.$$

Ceci assure que  $F$  n'est pas globalement lipschitzienne. □

Dans la suite, on supposera que  $x_0 > y_0 > 0$ .

9. Montrer que la solution maximale  $(J, (x, y)^t)$  associée vérifie que  $x(t) > y(t) > 0$  pour tout  $t \in J$ .

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $x(t) > y(t)$  n'est pas vraie pour tout  $t \in J$ . Alors, par le théorème de valeurs intermédiaires assurent qu'il existe un temps  $t_1 \in J$  tel que  $x(t_1) = y(t_1)$ . En particulier, la trajectoire de  $(J, (x, y)^t)$  intersecte la trajectoire de la solution maximale associée à

$$\begin{cases} X'(t) &= F(X(t)), \\ X(t_1) &= (x(t_1), y(t_1))^t. \end{cases}$$

Par la question 6., on obtient une absurdité. Ainsi, on a  $x(t) > y(t)$  pour tout  $t \in J$ . On montre de même que  $y$  ne s'annule pas en considérant les solutions maximales considérées à la question 5. □

10. On pose

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y > 0 \text{ et } 2(1-x) \leq y\},$$

Soit  $t \in J$ . Montrer que  $(x, y)^t(t) \in \mathcal{A}$  si et seulement si  $x'(t) \leq 0$ .

*Démonstration.* Immédiat. □

11. En déduire que  $[0, +\infty[ \subset J$ .

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que  $J$  est majoré. Alors par le théorème d'explosion, on a

$$\lim_{t \rightarrow \sup J} \|X(t)\|_2 = +\infty.$$

Par le point 9., ceci implique en particulier que

$$\lim_{t \rightarrow \sup J} x(t) = +\infty$$

et que  $X(t) \in \mathcal{A}$  à partir d'un certain rang. Par la question 10., on obtient qu'à partir de ce rang,  $x$  est décroissante et ainsi majorée. C'est absurde. □

12. Qu'en est-il si  $y_0 > x_0 > 0$ ? Conclure que  $[0, +\infty[ \subset J$  dès que  $x_0, y_0 > 0$ .

*Démonstration.* Par les questions 3., 11. et 6., on obtient la conclusion. □

## Partie 4 : Comportement asymptotique

Dans la suite, on supposera à nouveau que  $x_0 > y_0 > 0$ . Soit  $(J, (x, y)^t)$  une solution maximale de (1) associée. On pose

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y > 0 \text{ et } 2(1-x) > y\}, \\ \mathcal{Z}_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y > 0, 2(1-x) \leq y \text{ et } 1-x/2 \geq y\}, \\ \mathcal{Z}_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y > 0 \text{ et } 1-x/2 < y\}.\end{aligned}$$

13. Dessiner les trois zones.

Voir plus haut.

14. Supposons qu'il existe  $a > 0$  tel que pour tout  $t \in [a, +\infty[$ , on ait  $(x, y)^t(t) \in \mathcal{Z}_1$ . Étudier la monotonie de  $x$  et  $y$ . Montrer que  $(x, y)$  converge en  $+\infty$ . Déterminer la ou les limites possibles.

*Démonstration.* Dans ce cas,  $x$  et  $y$  sont strictement croissantes et majorées donc convergentes. La limite est nécessairement un point d'équilibre qui appartient à la fermeture de  $\mathcal{Z}_1$ . C'est donc  $(2/3, 2/3)$  ou  $(1, 0)$ . Comme  $y$  est strictement croissante, c'est nécessairement  $(2/3, 2/3)$ .  $\square$

15. Supposons qu'il existe  $a, b \in J$  tels que  $b > a > 0$  et tels que pour tout  $t \in [a, b[$ , on ait  $(x, y)^t(t) \in \mathcal{Z}_1$  et  $(x, y)^t(b) \notin \mathcal{Z}_1$ . Montrer que  $(x, y)^t(b) \in \mathcal{Z}_2$ .

*Démonstration.* Dans ce cas,  $x$  et  $y$  sont strictement croissantes sur  $[a, b[$  et  $(x, y)^t(b)$  appartient à la frontière  $\mathcal{Z}_1$ . Par le point 9., on a nécessairement que  $(x, y)^t(b) \in \mathcal{Z}_2$ .  $\square$

16. Supposons qu'il existe  $a > 0$  tel que pour tout  $t \in [a, +\infty[$ , on ait  $(x, y)^t(t) \in \mathcal{Z}_3$ . Montrer que  $(x, y)$  converge en  $+\infty$ . Déterminer la ou les limites possibles.

*Démonstration.* Dans ce cas,  $x$  et  $y$  sont strictement décroissantes et minorées donc convergentes. La limite est nécessairement un point d'équilibre qui appartient à la fermeture de  $\mathcal{Z}_3$ . C'est donc  $(2/3, 2/3)$ .  $\square$

17. Supposons qu'il existe  $a, b \in J$  tels que  $b > a > 0$  et tels que pour tout  $t \in [a, b[$ , on ait  $(x, y)^t(t) \in \mathcal{Z}_3$  et  $(x, y)^t(b) \notin \mathcal{Z}_3$ . Montrer que  $(x, y)^t(b) \in \mathcal{Z}_2$ .

*Démonstration.* Dans ce cas,  $x$  et  $y$  sont strictement décroissantes sur  $[a, b[$  et  $(x, y)^t(b)$  appartient à la frontière  $\mathcal{Z}_3$ . Par le point 9., on a nécessairement que  $(x, y)^t(b) \in \mathcal{Z}_2$ .  $\square$

18. Supposons qu'il existe  $a > 0$  tel que pour tout  $t \in [a, +\infty[$ , on ait  $(x, y)^t(t) \in \mathcal{Z}_2$ . Montrer que  $(x, y)$  converge en  $+\infty$ . Déterminer la ou les limites possibles.

*Démonstration.* Dans ce cas,  $x$  est décroissante et  $y$  est croissante. Elle sont bornées donc convergentes. La limite est nécessairement un point d'équilibre qui appartient à la fermeture de  $\mathcal{Z}_2$ . C'est donc  $(2/3, 2/3)$  ou  $(1, 0)$ . Comme  $y$  est croissante, c'est nécessairement  $(2/3, 2/3)$ .  $\square$

19. Supposons qu'il existe  $a, b \in J, \varepsilon > 0$  tels que  $b > a > 0$  et tels que pour tout  $t \in [a, b]$ , on ait  $(x, y)^t(t) \in \mathcal{Z}_2$  et  $(x, y)^t(t) \notin \mathcal{Z}_2$  pour  $t \in ]b, b + \varepsilon[$ . Montrer que c'est absurde.

*Démonstration.* Cette question est difficile. Si  $(x, y)^t(b) \in \mathcal{Z}_2 \cap \overline{\mathcal{Z}_1}$ , alors  $2(1-x(b)) - y(b) = 0$ ,  $0 < y(b) < x(b)$ ,  $1 - x(b)/2 - y(b) > 0$ ,

$$x'(b) = 0 \text{ et } y'(b) > 0.$$

On obtient que

$$(2(1-x) - y)'(b) = -2x'(b) - y'(b) = -y'(b) < 0.$$

Au voisinage de  $b$ , la fonction  $(2(1-x) - y)$  est donc strictement décroissante. Elle ne peut donc pas à la fois être négative avant  $b$  et nulle en  $b$ . Le cas restant est fait de la même manière.  $\square$

20. Déterminer le comportement asymptotique de la solution maximale associée aux données initiales  $x_0, y_0 > 0$ .

*Démonstration.* En rassemblant l'ensemble des points de cette partie, on obtient que la solution tend vers  $(2/3, 2/3)^t$  dès que  $x_0 > y_0 > 0$ . Avec la question 3., on conclut que la même chose est vraie pour  $y_0 > x_0 > 0$ . Si  $x_0 = y_0 > 0$  alors, d'après la question 6., on obtient encore que la solution converge vers  $(2/3, 2/3)^t$ .  $\square$