Année universitaire 2018/2019

Site : ☒ Luminy	☒ St-Charles	☐ St-Jérôme	☐ Cht-Gombert	☐ Aix-Montperrin	☐ Aubagne-SATIS
Sujet session de : ☐ 1er semestre ☒ 2ème semestre ☒ Examen session 2				Durée de l'épreuve : **2H**	
Examen de : ☐ L1 ☐ L2 ☒ L3 ☐ M1 ☐ M2 ☐ LP ☐ DU				Nom diplôme : **L3 Maths**	

Code Apogée du module : **SMI5U06C**	Libellé du module : **Équations différentielles**

Documents autorisés : ☒ OUI ☐ NON	Calculatrices autorisées : ☐ OUI ☒ NON

Examen Juin 2019

La note prendra particulièrement compte de la rigueur et de la clarté des preuves.

Exercice 1 [Équation du 2 ème ordre, étude du wronskien, barème 7 points]
Soit $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On s'intéresse dans cet exercice à l'équation différentielle

$$x''(t) + a(t)x(t) = 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1. Soient $b, c \in \mathbb{R}$.
   Montrer qu'il existe une et une seule fonction $x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solution de (1) et telle que $x(0) = b$, $x'(0) = c$.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de (1) forme un espace vectoriel de dimension 2. Dans la suite, on note E cet espace vectoriel.

Soient x_1 et x_2 deux fonctions engendrant l'espace E (les fonctions x_1 et x_2 sont donc, en particulier, des solutions de (1)). Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $w(t) = x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t)$, de sorte que $w \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. Montrer que w est une fonction constante.
4. Montrer que w n'est pas la fonction nulle. On pourra commencer par montrer que si $w(0) = 0$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ et

$$\alpha x_1(0) + \beta x_2(0) = 0,$$
$$\alpha x_1'(0) + \beta x_2'(0) = 0.$$

5. Montrer que l'on peut choisir les fonctions x_1 et x_2 de manière à avoir $w(t) = 1$ pour tout t (les fonctions x_1 et x_2 engendrant toujours l'espace E).

Exercice 2 [barème 15 points] On s'interesse à l'évolution au cours du temps de deux populations P et Q. Les variations de ces deux fonctions sont données par

$$P'(t) = P(t)\left(1 - \frac{P(t) + Q(t)}{N^*}\right) \tag{2}$$

$$Q'(t) = P(t)\frac{P(t) + Q(t)}{N^*} \tag{3}$$

où N^* est strictement positif. On pose $N(t) = P(t) + Q(t)$ pour tout t.

1. Ecrire le système différentiel sous la forme $X' = f(t, X)$.
2. Trouver les points d'équilibre du système.
3. Soit (P, Q) une solution de ce système définie sur un intervalle I.
   (a) Vérifier que $N'(t) = P(t)$ pour tout $t \in I$, puis que

$$N''(t) = N'(t)\left(1 - \frac{N(t)}{N^*}\right). \tag{4}$$

(b) On suppose dans cette question que $P(0) = \frac{1}{2}$ et $N(0) = N^* = 1$. En intégrant l'équation (4) entre 0 et t, montrer que

$$N'(t) = N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{2}\right).$$

Déterminer l'unique solution maximale de cette équation.

4. On cherche les solutions qui vérifient $P(0) = P_0 > 0$ et $Q(0) = Q_0 > 0$.

(a) Montrer que le problème de Cauchy correspondant admet une unique solution maximale (I, X) où $I =]T_{\min}, T_{\max}[$.

(b) Montrer que pour tout $t \in I$, $P(t) > 0$.

(c) En déduire que $N(t) \geq N(0) > 0$ pour tout $t \in I$.

(d) En déduire que $Q(t) \geq Q(0)$ pour tout $t \in I$ et que $P(t) \leq N(t)$ pour tout $t \in I$.

(e) Montrer que $0 \leq N'(t) \leq N(t)$ et en déduire que $N(0) \leq N(t) \leq N(0)e^t$ pour tout $t \in I$.

(f) En déduire que $T_{\max} = +\infty$.