Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, Equation Différentielles Ordinaires
SMI5U06TC. Examen du 7 janvier 2020

L'examen contient 2 exercices. Le barème est sur 23 points, il n'est donc pas demandé de tout faire pour avoir 20. Les documents (polycopié du cours, notes de TD, notes personnelles) sont autorisés.

Exercice 1 (Système 2×2, barème 5 points)**.**
Soit $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $t \mapsto B(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

1. Donner l'ensemble des solutions du système différentiel $X' = AX$.

   Corrigé – *Valeurs propres de* A *:* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.
   Vecteurs propres associés : $\varphi_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varphi_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.
   La solution générale du système est donc l'application $t \mapsto \begin{bmatrix} 2c_1 e^t + 3c_2 e^{2t} \\ c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} \end{bmatrix}$, *avec* c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

2. Parmi les fonctions suivantes :

$$X_{p,1}(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_{p,2}(t) = te^t \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad X_{p,3}(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + te^t \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$X_{p,4}(t) = t^2 e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_{p,5}(t) = te^t \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + t^2 e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_{p,6}(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + te^t \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + t^2 e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

   il y en a une qui est une solution particulière du système différentiel $X' = AX + B$; laquelle est-ce ? expliquer votre choix.
   En déduire la forme générale des solutions du système $X' = AX + B$.

   Corrigé – *La foncion* $X_{p,3}$ *est une solution particulière.*
   Comme 1 *est valeur propre simple de A, Il y a une solution particulière sous la forme* $X_p(t) = e^t \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + te^t \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$.
   Ceci exclut $X_{p,i}$ *pour* $i = 4, 5, 6$ *(car il n'a aura pas de terme en* $t^2 e^t$ *dans la solution générale).*
   $X_{p,2}$ *n'est pas solution car* $X_{p,2}(t)$ *est colinéaire à* φ_1 *(et donc aussi* $X'_{p,2}(t) - AX_{p,2}(t)$*) alors que* $B(t)$ *n'est pas colinéaire à* φ_1.
   $X_{p,1}$ *n'est pas solution car* $X'_{p,1}(t) - AX_{p,1}(t)$ *est colinéaire au vecteur* $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, *ce qui n'est pas le cas de* $B(t)$.
   La solution générale du système est donc l'application $t \mapsto \begin{bmatrix} (2c_1 + 1 + 4t)e^t + 3c_2 e^{2t} \\ (c_1 + 1 + 2t)e^t + 2c_2 e^{2t} \end{bmatrix}$, *avec* c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

3. Soit $X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Donner la solution du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} X' &= AX + B, \\ X(0) &= X_0. \end{aligned}$$

   Corrigé – *En écrivant* $X(0) = X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *pour la solution générale trouvée précédemment, on obteint le systèem à résoudre :*

$$2c_1 + 3c_2 = -1 \qquad (1)$$
$$c_1 + 2c_2 = -1 \qquad (2)$$

   dont la solution est $c_1 = 1$, $c_2 = -1$.

Exercice 2 (Modèle "proies-prédateurs", barème 18 points)**.**
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^\star$, et $x_0, y_0 \in \mathbb{R}_+$; on considère le système différentiel suivant (équations de *Lotka-Volterra*) :

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t),\ t > 0, \\ y'(t) &= -cy(t) + dx(t)y(t),\ t > 0, \end{aligned} \tag{3}$$

avec les conditions initiales

$$x(0) = x_0,\ \ y(0) = y_0. \tag{4}$$

1. Montrer qu'il existe une solution maximale $(x, y) \in C^1([0, T_m[, \mathbb{R}^2)$ (avec $T_m > 0$) de (3)-(4).

   Corrigé – L'existence d'une solution maximale découle du fait que l' application $(x, y) \mapsto f(x, y) = (ax - bxy, -cy + dxy)$ est de classe C^1 (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$).
   On conserve cette notation f dans la suite.

Dans toute la suite on note (x, y) la solution maximale de (3)-(4) (elle est définie sur l'intervalle $[0, T_m[$).

2. Quels sont les points d'équilibre du système (3) ? Peut-on prouver qu'ils sont stables ou instables en étudiant le système linéarisé au point d'équilibre ?

   Corrigé – Les points d'équilibres sont les poinst $(0, 0)$ et $(c/d, a/b)$.
   La matrice jacobienne de f au point (x, y) est $J_f(x, y) = \begin{bmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{bmatrix}$.
   $J_f(0, 0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ dy & -c \end{bmatrix}$. Comme $c > 0$ le point $(0, 0)$ est instable.
   $J_f(c/d, a/b) = \begin{bmatrix} 0 & -bc/d \\ ad/b & 0 \end{bmatrix}$. Le polynôme caractéristique de cette matrice est $P(\lambda) = \lambda^2 - ac$. Les valeurs de cette matrice sont $\pm i\sqrt{-ca}$. L'étude du système linéarisé au point $(c/d, a/b)$ ne permet pas de conclure à la stabilité ou l'instabilité de ce point.

3. On suppose dans cette question $x_0 = 0$ et $y_0 > 0$. Donner la solution maximale de (3)-(4).

   Corrigé – La solution maximale est $x(t) = 0$ er $y(t) = y_0 e^{-ct}$ pour tout $t \geq 0$ (et $T_m = +\infty$).

On suppose dans le suite de l'exercice que $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

4. Montrer que $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$, pour tout $t \in [0, T_m[$.

   Corrigé – La question précédente permet de montrer que tout l'axe des y est formé d'orbites de solutions. Par un raisonnement analogue (avec $y_0 = 0$ et $x_0 > 0$) on remarque que tout l'axe des x est aussi formé d'orbites de solutions. Enfin le point $(0, 0)$ forme lui même une orbite.
   Comme il a été vu en cours que les orbites ne peuvent pas se croiser, on en déduit que $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$, pour tout $t \in [0, T_m[$ dès que $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

Pour $\alpha, \beta > 0$, on définit la fonction $h_{\alpha,\beta}$ de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ par $h_{\alpha,\beta}(z) = \alpha \ln(z) - \beta z$.
Pour $(u, v) \in \mathbb{R}_+^\star$ on pose $F(u, v) = h_{c,d}(u) + h_{a,b}(v)$.

5. Montrer que $F(x(t), y(t)) = F(x_0, y_0)$ pour tout $t \in [0, T_m[$.

   Corrigé – On pose $\varphi(t) = F(x(t), y(t))$ de sorte que, φ est continue sur $[0, T_m[$, dérivable sur $]0, T_m[$ et, pour tout $t \in]0, T_m[$,

   $$\begin{aligned} \varphi'(t) = \frac{cx'(t)}{x(t)} - dx'(t) + \frac{ay'(t)}{y(t)} - by'(t) &= c(a - by(t)) - dx(a - by(t)) + a(-c + dx(t)) - by(t)(-c + dx(t)) \\ &= (a - by(t))(c - dx(t)) + (-c + dx(t))(a - by(t)) = 0. \end{aligned}$$

   Ceci montre bien que la fonction est constante sur $[0, T_m[$ et donc $F(x(t), y(t)) = F(x_0, y_0)$ pour tout $t \in [0, T_m[$.

6. Soient α, $\beta > 0$. Montrer que $h_{\alpha,\beta}$ est strictement croissante pour $z \in]0, \alpha/\beta[$, strictement décroissante pour $z \in]\alpha/\beta, +\infty[$ et que $\lim_{z\to 0} h_{\alpha,\beta}(z) = \lim_{z\to+\infty} h_{\alpha,\beta}(z) = -\infty$.
   On pose $M_F = F(c/d, a/b)$. Montrer que $F(u, v) < M_F$ si $(u, v) \neq (c/d, a/b)$.

   Corrigé – *La fonction $h_{\alpha,\beta}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $z > 0$,*

   $$h'_{\alpha,\beta}(z) = \frac{\alpha}{z} - \beta = \frac{\alpha - \beta z}{z}.$$

   Ceci donne $h'_{\alpha,\beta}(z) > 0$ pour $z \in]0, \alpha/\beta[$ et $h'_{\alpha,\beta}(z) < 0$ pour $z \in]\alpha/\beta, +\infty[$. On en déduit bien que $h_{\alpha,\beta}$ est strictement croissante pour $z \in]0, \alpha/\beta[$, strictement décroissante pour $z \in]\alpha/\beta, +\infty[$.
   Comme $\lim_{z\to 0,\, z>0} \ln(z) = -\infty$, on a $\lim_{z\to 0} h_{\alpha,\beta}(z) = -\infty$.
   Comme $\lim_{z\to+\infty} \frac{\ln(z)}{z} = 0$,

   $$\lim_{z\to+\infty} h_{\alpha,\beta}(z) = \lim_{z\to+\infty} \beta z(-1 + \frac{\alpha}{\beta}\frac{\ln(z)}{z}) = -\infty.$$

   Comme $h_{\alpha,\beta}$ atteint un maximum strict au point α/β, on a $h_{a,b}(v) < h_{a,b}(a/b))$ si $v \neq a/b)$ et $h_{c,d}(u) < h_{c,d}(c/d))$ si $u \neq c/d$ et donc, dès que $u \neq c/d$ ou $v \neq a/b$, $F(u, v) < F(c/d, a/b)$.

Dans la suite, on suppose $(x_0, y_0) \neq (c/d, a/b)$.

7. Montrer qu'il existe $m, M \in]0, \infty[$, indépendants de t, tels que $x(t)$, $y(t) \in [m, M]$ pour tout $t \in [0, T_m[$. En déduire que $T_m = +\infty$. [Utiliser la question 6.]

   Corrigé – *On note $H = \max\{h_{a,b}(a/b), h_{c,d}(c/d)\}$ et $M_0 = F(x_0, y_0)$.*
   Pour tout $t \geq 0$,

   $$h_{c,d}(x(t)) = M_0 - h_{a,b}(y(t)) \geq M_0 - H.$$

   Comme $\lim_{z\to 0} h_{c,d}(z) = \lim_{z\to+\infty} h_{c,d}(z) = -\infty$, on en déduit qu'il existe m_x, $M_x \in]0, +\infty[$ tels que $m_x \leq x(t) \leq M_x$ our tout $t \geq 0$.
   On montre de même qu'il existe m_y, $M_y \in]0, +\infty[$ tels que $m_y \leq y(t) \leq M_y$ our tout $t \geq 0$.
   Il suffit de prendre $m = \min\{m_x, m_y\}$ et $M = \max\{M_x, M_y\}$ pour avoir le résultat demandé.

8. Montrer que que $x'(t)y'(t) = 0$ pour une infinité de valeurs de t. [On pourra raisonner par l'absurde, c'est-à-dire supposer que x' et y' garde un signe constant à partir d'un certain t_0 et donc que les fonctions x et y sont monotones à partir de t_0.]

   Corrigé – *Comme suggéré, on suppose que x' et y' garde un signe constant à partir d'un certain t_0 et donc que les fonctions x et y sont monotones à partir de t_0.*
   Les fonctions x et y étant monotones à partir de t_0, elles ont une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ quand $t \to +\infty$. Comme elles prennent les valeurs entre m et M, les limites sont aussi entre m et M,

   $$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \gamma, \ \lim_{t\to+\infty} y(t) = \delta \text{ et } m \leq \gamma, \delta \leq M.$$

   Comme le couple (x, y) est solution du système (3), on en déduit que x' et y' ont aussi une limite quand $t \to +\infty$. Grâce, par exemple, au théorème des accroissements finis entre t et $t + 1$, on montre alors que $\lim_{t\to+\infty} x'(t) = \lim_{t\to+\infty} y'(t) = 0$ et finalement que (γ, δ) est un point d'équilibre. Ce point d'équilibre n'est pas $(0, 0)$ car $m > 0$ et ce n'est pas $(c/d, a/b)$ car

   $$F(\gamma, \delta) = \lim_{t\to+\infty} F(x(t), y(t)) = F(x_0, y_0) < F(c/d, a/b).$$

   On aboutit bien ainsi à une contradiction. Ce qui prouve que $x'(t)y'(t) = 0$ pour une infinité de valeurs de t.

9. Montrer que (x, y) est périodique, c'est à dire qu'il existe $T > 0$ tel que $(x(t + T), y(t + T)) = (x(t), y(t))$, pour tout $t > 0$.
   [Utiliser le fait que x' s'annule 3 fois (ou que y' s'annule 3 fois) et la question 6.]
   Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\frac{1}{T}\int_t^{t+T} x(s)ds = \frac{c}{d}$ et $\frac{1}{T}\int_t^{t+T} y(s)ds = \frac{a}{b}$.

Corrigé – *On suppose que $x'(t_1) = x'(t_2) = x'(t_3) = 0$ avec $0 < t_1 < t_2 < t_3$. Comme $x(t) > 0$ pour tout t, on en déduit*
$$y(t_1) = y(t_2) = y(t_3) = \frac{a}{b},$$
et donc (en notant toujours $M_0 = F(x_0, y_0)$)
$$h_{c,d}(x(t_1)) = h_{c,d}(x(t_2)) = h_{c,d}(x(t_3)) = M_0 - h_{a,b}(a/b).$$
On peut noter que $x(t_i) \neq c/d$, pour $i = 1, 2, 3$ car $h_{c,d}(c/d) = M_F - h_{a,b}(a/b) > M_0 - h_{a,b}(a/b)$.
Puis, comme $h_{c,d)}$ est strictement croissante pour $]0, c/d[$, strictement décroissante pour $z \in]\cancel{c}/d, +\infty[$ (et tend vers $-\infty$ en 0 et $+\infty$), on en déduit qu'il n'y a que 2 valeurs possibles pour $x(t_i)$, $i = 1, 2, 3$. Ceci prouve que pour deux t_i différents x prend la même valeur.
Supposons par exemple que ce soit t_1 et t_3. On pose alors $T = t_3 - t_1$ et on obtient (on rappelle que $y(t_1) = y(t_2) = y(t_3)$)
$$x(t_1 + T) = x(t_1), y(t_1 + T) = y(t_1).$$
Grâce au thèorème d'unicité pour le problème de Cauchy (et au caractère autonome du système (3) On en conclut bien que $x(t + T) = x(t), y(t + T) = y(t)$ pour tout $t > 0$.

10. Montrer que le point d'équilibre $(c/d, a/b)$ est uniformément stable. (c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si la distance entre la donnée initiale et le point $(c/d, a/b)$ est inférieure à δ, alors la distance entre la solution et le point $(c/d, a/b)$ est, pour tout $t > 0$, inférieure à ε.)

Corrigé –
On pose $M_1 = \max_{z \in \mathbb{R}_+^\star} h_{c,d}(z)$ et $M_2 = \max_{z \in \mathbb{R}_+^\star} h_{a,b}(z)$, de sorte que $M_1 + M_2 = M_F = F(c/d, a/b)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Les propriétés de monotonie stricte de $h_{a,b}$ et $h_{c,d}$ donnent qu'il existe $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$ tels que
$$|z_1 - c/d| \geq \varepsilon \Rightarrow h_{c,d}(z_1) \leq M_1 - \eta_1,$$
$$|z_2 - a/b| \geq \varepsilon \Rightarrow h_{a,b}(z_2) \leq M_2 - \eta_2.$$
En posant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, on a donc pour tout $z = (z_1, z_2) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2$
$$\|z - (c/d, a/b)\| = \max(|z_1 - c/d|, |z_2 - a/b|) \geq \varepsilon \Rightarrow F(z_1, z_2) \leq F(c/d, a/b) - \eta. \quad (5)$$
Par continuité de F au point $(c/d, a/b)$ il existe $\delta > 0$ tel que
$$\|z - (c/d, a/b)\| \leq \delta \Rightarrow F(z_1, z_2) > F(c/d, a/b) - \eta. \quad (6)$$
Soit (x, y) une solution de (3)-(4). Comme $F(x(t), y(t)) = F(x(0), y(0))$ pour tout $t \geq 0$, on déduit de (5)-(6) que
$$\|(x(0), y(0)) - (c/d, a/b)\| \leq \delta \Rightarrow \|(x(t), y(t)) - (c/d, a/b)\| < \varepsilon \text{ pour tout } t > 0.$$