Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, Equation Différentielles Ordinaires
SMI5U06C. DM-rattrapage du 22 juin 2020

Exercice 1 (Valeurs propres de l'exponentielle d'une matrice, barème 2 points)**.**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n > 1$, et $t > 0$. On note $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ les valeurs propres de A (comptées avec leur multiplicité algébrique). Donner (en justifiant votre réponse) les valeurs propres de la matrice e^{tA} en fonction de t et de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
[On pourra utiliser le fait qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulière supérieure (avec les valeurs propres de A sur la diagonale de T) tels que $A = PTP^{-1}$.]

Exercice 2 (Solution périodique pour un système linéaire, barème 6 points)**.**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n > 1$. On s'intéresse au système

$$X'(t) = AX(t),\ t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1. On suppose dans cette question que le système (1) admet une solution périodique de période T ($T > 0$). (On rappelle que ceci signifie qu'il existe $T > 0$ tel que $X(t+T) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.)
   (a) Montrer que 1 est valeur propre de e^{AT}.
   (b) On suppose que cette solution périodique est non constante. Montrer que A a une valeur propre imaginaire pure (c'est-à-dire de la forme $i\beta$ avec $\beta \neq 0$).
2. On suppose que A a une valeur propre imaginaire pure. Montrer que le système (1) admet une solution périodique non constante et ne prenant que des valeurs réelles.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on s'intéresse dans cette question à l'équation linéaire du 2ème ordre suivante :

   $$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0,\ \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

   Donner (en le justifiant) les valeurs de a et b pour lesquelles cette équation admet une solution périodique non nulle (on rappelle que périodique signifie qu'il existe $T > 0$ tel que $x(t+T) = x(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$).

Exercice 3 (Un modèle de dynamique de populations, barème 12 points)**.**
Soient $x_0, y_0 \in \mathbb{R}_+$; On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)(y(t) - x(t)),\ t > 0, \\ y'(t) &= (1 - y(t))x(t),\ t > 0, \end{aligned} \tag{2}$$

avec les conditions initiales

$$x(0) = x_0,\ \ y(0) = y_0. \tag{3}$$

1. Montrer qu'il existe une solution maximale $(x, y) \in C^1([0, T_m[, \mathbb{R}^2)$ (avec $T_m > 0$) de (2)-(3).

Dans toute la suite on note (x, y) la solution maximale de (2)-(3) (elle est définie sur l'intervalle $[0, T_m[$) et on suppose que $x_0 \geq 0$ et $y_0 \geq 0$.

2. Donner l'ensemble des points d'équilibre du système (2) (c'est-à-dire les couples (x_0, y_0) pour lesquels $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$ pour tout $t \geq 0$ est solution de (2)-(3)). Pour chaque point déquilibre, calculer le système linéarisé et en déduire, si cela est possible, la stabilité ou l'instabilité du point d'équilibre.
3. On suppose dans cette question que $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$. Montrer que $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout $0 \leq t < T_m$.
4. On suppose dans cette question que $0 \leq x_0 \leq 1$ et $y_0 = 1$.
   Montrer que $T_m = +\infty$ et donner les fonctions x et y.

On pose $D = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2, 0 < a < b < 1\}$ et on suppose pour toute la suite de l'exercice que $(x_0, y_0) \in D$.

5. Montrer que $(x(t), y(t)) \in D$ pour tout $t \in [0, T_m[$. En déduire que $T_m = +\infty$.
6. Montrer que la fonction x est croissante et que $x_0 \leq x(t) < 1$ pour tout $t \geq 0$.
7. Pour tout $t \geq 0$, on pose $z(t) = 1 - y(t)$. Donner l'équation différentielle satisfaite par Z. En déduire qu'il existe C et γ (ne dépendant que de x_0) tels que $0 \leq z(t) \leq Ce^{-\gamma t}$ pour tout $t \geq 0$.
8. Montrer que le point $(1, 1)$ est globalement asymptotiquement stable dans D, c'est-à-dire que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1$ et $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1$. (On rappelle que (x_0, y_0) est un point quelconque de D).