Année universitaire 2015/2016

Site :	☐ Luminy	☐ St-Charles	☐ St-Jérôme	☐ Cht-Gombert	☐ Aix-Montperrin	☐ Aubagne-SATIS
Sujet session de : ☐ 1er semestre ⊠ 2ème semestre ☐ Partiel				Durée de l'épreuve : **3H**		
Examen de : ☐ L1 ☐ L2 ⊠ L3 ☐ M1 ☐ M2 ☐ LP ☐ DU				Nom diplôme : **Licence de Mathématiques**		
Code Apogée du module : **ENSMI6U2**		Libellé du module : **Equations différentielles**				
Document autorisé : ☐ OUI ⊠ NON				Calculatrices autorisées : ☐ OUI ⊠ NON		

Examen - Mercredi 12 mai 2016

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

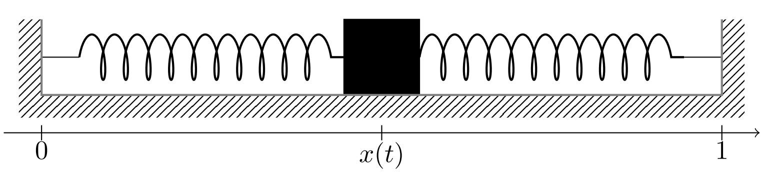
Exercice 1 On considère, pour $p \in \mathbb{N}^*$, le problème de Cauchy

$$y' = y(1 - y^{2p}),\ y(0) = y_0. \tag{1}$$

1. Enoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz adapté et montrer que le problème (1) admet une unique solution maximale.
2. Soit z la fonction définie par $z(t) = y(t)^2$. Vérifier que $z'(t) \leq 2z(t)$ pour tout temps t dans l'intervalle de définition de y. En déduire que la solution maximale du problème de Cauchy (1) est définie pour tous les temps positifs.
3. Déterminer les points d'équilibre de cette équation différentielle, ainsi que le sens de variations des solutions en fonction de $y(t)$.
4. Rappeler la définition d'un point d'équilibre stable. Que pouvez-vous dire de la stabilité des points d'équilibres de l'equation (1) ? (*On pourra s'aider d'une représentation graphique.*)
5. On suppose que $y_0 \in]0,1[$. Que pouvez-vous dire de la limite de la fonction y lorsque t tend vers $+\infty$? Indiquer brièvement ce qui se passe pour les autres valeurs de y_0.
6. Écrire l'équation différentielle vérifiée par $x(t) = y(t)^{-2p}$, lorsque $y_0 \neq 0$. En déduire la forme explicite des solutions de (1).

Exercice 2

1. On s'intéresse à la position horizontale $x(t) \in \mathbb{R}$ d'une masse attachée par deux ressorts à deux points respectivement à gauche et à droite et soumise à une force de frottements.



   En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on trouve que la position horizontale x doit vérifier l'EDO suivante, où $\lambda > 0$ et $\mu \geq 0$,

$$x''(t) = \lambda(1 - x) - \lambda x - \mu x'(t). \tag{2}$$

   (a) À quelles forces sont associées les différents termes apparaissant dans le membre de droite de l'équation (2) ?

   (b) Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme d'un système différentiel de la forme $Y' = AY + b$, où A est une matrice 2×2 et b un vecteur que l'on explicitera.

(c) Montrer qu'il existe une unique solution maximale de ce problème qui vérifie $x(0) = x_0 \in]0,1[$ et $x'(0) = 0$, et qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ entier.

(d) On suppose que $\lambda = 2$ et $\mu = 1$, expliciter la solution qui vérifie $x(0) = x_0 \in]0,1[$ et $x'(0) = 0$.

(e) Pour toutes valeurs de $\lambda > 0$ et $\mu \geq 0$, montrer que le systéme admet un unique état d'équilibre que l'on déterminera. Que pouvez-vous dire de sa stabilité ?

(f) On cherche à approcher les solutions de cette équation sur l'intervalle $[0, 1]$. Ecrire le schéma d'Euler explicite associé à ce problème et calculer une approximation de $x(2h)$, où h désigne le pas de temps utilisé pour la discrétisation.

2. Dans cette question, $x(t)$ désigne la position d'une particule chargée, qui est repoussée par deux particules chargées (de même signe) fixes situées en 0 et en 1. Dans ce cas, en l'absence de frottements, le principe fondamental de la dynamique mène à l'équation différentielle suivante :

$$x''(t) = -\frac{1}{1 - x(t)} + \frac{1}{x(t)}. \tag{3}$$

(a) Montrer que cette équation peut se mettre, en posant $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ sous la forme d'un système différentiel non linéaire de la forme $Y' = F(Y)$ que l'on explicitera, en précisant bien de domaine de définition de F.

(b) Montrer qu'il existe une unique solution maximale de ce problème qui vérifie $x(0) = x_0 \in]0,1[$ et $x'(0) = 0$. On notera $]T_{\min}, T_{\max}[$ l'intervalle de définition de cette solution.

(c) Soient x la soltuion maximale de (3) et E la fonction définie sur $]T_{\min}, T_{\max}[$ par

$$E(t) = \frac{1}{2} x'(t)^2 - \ln\big(x(t)(1 - x(t))\big).$$

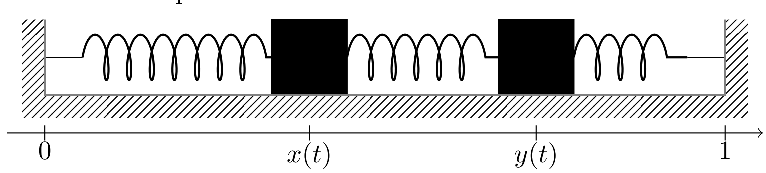
Vérifier que E est une fonction constante.

(d) Étudier la fonction $y \mapsto \ln\big(y(1-y)\big)$ sur l'intervalle $]0, 1[$. En déduire qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\forall t \in]T_{\min}, T_{\max}[, \quad a < x(t) < 1 - a.$$

(e) En déduire que $T_{\max} = +\infty$ et $T_{\min} = -\infty$.

3. Dans cette question, on considère deux masses de positions $x(t)$ et $y(t)$: la première masse est reliée par un ressort à un point fixe situé en 0, la seconde est reliée par un ressort à un point fixe situé en 1, et les deux masses sont reliées entre elles par un ressort.



Si on néglige les longueurs à vide des ressorts et les frottements, le principe fondamental de la dynamique mène au système d'EDO suivant (avec $\lambda = 1$) :

$$\begin{cases} x''(t) = -\, x(t) + \big(y(t) - x(t)\big), \\ y''(t) = -\big(y(t) - x(t)\big) + \big(1 - y(t)\big). \end{cases} \tag{4}$$

(a) Montrer que la fonction $Z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ est solution d'un système différentiel d'ordre un de la forme

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} Z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} := CZ + d \tag{5}$$

(b) Montrer l'existence d'une unique solution maximale de l'équation (5) vérifiant $Z(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et montrer que cette solution est définie sur $\mathbb{R}$ entier.

(c) Montrer que le système (5) admet un unique point d'équilibre Z^* que l'on déterminera.

(d) On pose $W(t) = Z(t) - Z^* := \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \\ w_4(t) \end{pmatrix}$. Déterminer le système différentiel satisfait par W.

(e) On pose $s(t) = w_1(t) + w_3(t)$ et $d(t) = w_3(t) - w_1(t)$. Vérifier que

$$s'' = -s \text{ et } d'' = -3d$$

Résoudre ces deux problèmes et en déduire l'expression de $x(t)$ et de $y(t)$, en fonction des données initiales x_0 et y_0.

(f) Montrer que la matrice C est semblable à la matrice bloc

$$\begin{pmatrix} D & 0_2 \\ 0_2 & E \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Que peut-on en déduire sur la stabilité du point d'équilibre Z^* ?