Site :	☒ Luminy	☒ St-Charles	☐ St-Jérôme	☐ Cht-Gombert	☐ Aix-Montperrin	☐ Aubagne-SATIS
Sujet session de : ☐ 1er semestre ☒ 2ème semestre ☒ Examen					Durée de l'épreuve : **3H**	
Examen de : ☐ L1 ☐ L2 ☒ L3 ☐ M1 ☐ M2 ☐ LP ☐ DU					Nom diplôme : **Licence de Mathémathiqu**	

Code Apogée : **ENSMI6U2**	Libellé du module : **Equations différentielles**

Document autorisé : ☐ OUI ☒ NON	Calculatrices autorisées : ☐ OUI ☒ NON

Examen - Mercredi 10 mai 2017

Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet est un **recto-verso**.

Exercice 1 [10 pt.] On considére les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les exponentielles des matrices précédentes.
2. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on introduit la matrice $M_\theta = \cos(\theta)J + \sin(\theta)K$. Montrer que $M_\theta^2 = I$ et en déduire e^{tM_θ}. Vérifier que M_θ est symétrique et déterminer ses valeurs propres.

   On note $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. On définit la norme $\|\cdot\|_2$ sur les matrices de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ par
   $$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$
3. Soit B est une matrice symétrique positive. Montrer que pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^2$, la solution du problème de Cauchy
   $$\begin{aligned} X'(t) &= -BX(t), \\ X(0) &= X_0 \end{aligned}$$
   vérifie $\|X(t)\|_2 \le \|X_0\|_2$. En déduire que $\|e^{-tB}\|_2 \le 1$ pour tout $t > 0$.
4. Montrer si A est symétrique de valeurs propres λ_1, λ_2 alors, $\|A\|_2 = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) = \rho(A)$.
5. Montrer que la matrice $B_\theta = I + M_\theta$ est une matrice symétrique positive (*i.e.* $(B_\theta X, X) \ge 0$). Calculer $\|e^{-tB_\theta}\|_2$.

Exercice 2 Considérons une particule de masse 1 soumise à des frottements et à une force dérivant d'un potentiel P. Sa position u au cours du temps vérifie

$$\ddot{u} = -P'(u) - k\dot{u}$$

où $k \ge 0$ est une constante et $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction que nous supposerons polynomiale, positive et coercive, c'est-à-dire telle que

$$\lim_{|x|\to+\infty} P(x) = +\infty.$$

Partie 1. [5 pt.]

1. On pose $v = \dot{u}$. Donner le système d'équation différentielle d'ordre 1 vérifié par le couple (u, v).
2. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution maximale (u, v) associée à chaque donnée initiale $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$.
3. Calculer la dérivée en temps de la fonction $t \mapsto H(u(t), v(t))$ où
$$H(u, v) = \frac{v^2}{2} + P(u)$$
pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
4. Montrer que pour tout $C \in \mathbb{R}$, l'ensemble
$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : H(u, v) \leq C\}$$
est compact.
5. En déduire que les solutions sont globales.

Partie 2. [5 pt.]

Dans cette partie, nous supposerons que $k = 0$ et $P(x) = \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$.

6. À quel système physique ces équations sont-elles associées ?
7. Résoudre le système d'équations.
8. Tracer dans l'espace des phases quelques trajectoires.
9. Donner les algorithmes permettant de calculer une solution approchée au temps $T > 0$ en N pas $(N \in \mathbb{N}^*)$, via les méthodes d'Euler explicite d'un part et Euler implicite d'autre part.
10. Soit $n \in \{0, \dots, N-1\}$. En notant (u_n, v_n) et (u_{n+1}, v_{n+1}) les couples obtenus aux étapes n et $n+1$, exprimer $H(u_{n+1}, v_{n+1})$ en fonction de $H(u_n, v_n)$ et $h = T/N$ pour les deux méthodes.
11. Tracer quelques trajectoires numériques dans l'espace des phases. Commenter le comportement des approximations numériques par rapport aux solutions exactes.

Partie 3. [7 pt.]

Dans cette partie, nous supposerons que $k > 0$ et $P(x) = (x-1)^2(x+1)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$.

12. Tracer l'allure du graphe de P.
13. Trouver les équilibres du système.
14. Calculer le système d'équation différentielle linéarisé autour de ces équilibres et en déduire leur stabilité.
15. (a) Montrer que $H(u(t), v(t))$ admet une limite finie en $+\infty$.
    (b) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 qui converge en $+\infty$ et telles que f'' est bornée, montrer que f' converge vers 0 en $+\infty$.
    (c) En déduire que $v(t)$ converge vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.
    (d) Réutiliser le point (b) pour montrer que $v'(t)$ converge vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.
    (e) En déduire que (u, v) converge. Donner les limites possibles.