Année universitaire 2016/2017

Site :	☒ Luminy	☒ St-Charles	☐ St-Jérôme	☐ Cht-Gombert	☐ Aix-Montperrin	☐ Aubagne-SATIS
Sujet session de : ☐ 1er semestre ☒ 2ème semestre ☐ Partiel				Durée de l'épreuve : **3H**	
Examen de : ☐ L1 ☐ L2 ☒ L3 ☐ M1 ☐ M2 ☐ LP ☐ DU				Nom diplôme : **Licence de Mathématiques**	

Code Apogée du module : **ENSMI6U2**	Libellé du module : **Equations différentielles**

Document autorisé : ☐ OUI ☒ NON	Calculatrices autorisées : ☐ OUI ☒ NON

Examen - Juin 2017

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 Soit la matrice 3×3 suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer e^{tA} pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Justifier le fait que pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^3$, $\lim_{t\to+\infty} e^{tA}X_0 = 0$.
3. Écrire les schémas d'Euler explicite et implicite associés au système $X'(t) = AX(t)$ (on utilisera la notation h pour désigner le pas de temps.)
4. On pose $h = 0,1$. Trouver une condition initiale X_0 telle que la solution X_n du schéma d'Euler explicite vérifie $\lim_{n\to+\infty} \|X_n\|_2 = +\infty$.
5. Soit $h > 0$. Quelles sont les valeurs propres de la matrice $Id + hA$? Pour quelles valeurs de $h > 0$ a-t-on $\lim_{n\to+\infty} \|X_n\|_2 = 0$ pour toute condition initiale X_0 ?
6. Quelles sont les valeurs propres de la matrice $(Id - hA)^{-1}$? En déduire que pour tout $h > 0$ et toute condition initiale X_0, la solution Y_n du schéma d'Euler implicite vérifie $\lim_{n\to+\infty} \|Y_n\|_2 = 0$.

Exercice 2 On considère la matrice

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considérera aussi les solutions du problème de Cauchy

$$X'(t) = -BX(t), \qquad X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

1. Exprimer B^2 en fonction de B. Comment nomme-t-on les endomorphismes qui vérifient cette condition ?
2. Utiliser cette relation pour calculer e^{tB} pour tout $t \in \mathbb{R}$, sans diagonaliser la matrice.
3. Diagonaliser B. Retrouver (ou trouver) l'expression de e^{tB} à l'aide de la diagonalisation obtenue.
4. Déduire des questions précédentes une représentation graphique sommaire du champ de vecteur associé à (1), et tracer sur le même graphique quelque solutions de l'EDO (1).
   On pose
   $$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
5. Que représente la matrice C ? Montrer que pour toute condition initiale $X_0 \in \mathbb{R}^2$ dans (1), $\lim_{t\to\infty} X(t) = CX_0$.

Exercice 3 On considère pour $K_* > 0$ le système différentiel suivant :

$$x'(t) = x(t)(K(t) - x(t)) \tag{2}$$
$$K'(t) = (K_* - K(t))x(t) \tag{3}$$

où $x(t)$ et $K(t)$ représentent respectivement le nombre d'individus dans une population cellulaire et les ressources à la disposition de cette population à l'instant t.

1. Écrire le système sous la forme $Y'(t) = F(Y(t))$ avec $Y(t) = (x(t), K(t))$. On notera F_1 la première composante de F et F_2 la seconde.
2. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution maximale au système (2)-(3) pour toute condition initiale (x_0, K_0) donée à l'instant $t = 0$.

   Dans toute la suite, on se restreint au quadrant $\{x \geq 0, K \geq 0\}$.
3. Trouver les zones de l'espace des phases dans lesquelles F_1 est positive (resp. négative). Même question pour F_2. Représenter graphiquement ces zones dans l'espace des phase (x en abscisse, K en ordonnée, on indiquera la direction du champ de vecteur associé par une flèche).
4. Trouver les points d'équilibres du système.
5. On ne considère que les points d'équilibres avec $x \geq 0, K \geq 0$. Calculer le système linéarisé au voisinage de ces équilibres et en déduire leur stabilité.

   On note
   $$C = \{(x, K) \text{ tel que } 0 < x < K < K_*\}.$$
6. Déterminer la solution issue d'une condition initiale telle que $K_0 = K_*$ et $0 \leq x_0 \leq K_*$.
7. Montrer que si $Y_0 = (x_0, K_0) \in C$ alors la solution maximale (J, Y) du problème de Cauchy vérifie $Y(t) = (x(t), K(t)) \in C$ pour tout $t \in J$. En déduire que $\mathbb{R}^+ \subset J$.
8. *Comportement asymptotique :* On suppose dans cette question que $(x_0, K_0) \in C$.
   (a) Montrer que la fonction x est croissante majorée et que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x_0 \leq x(t) \leq K_*$.
   (b) On introduit la fonction $v(t) = K_* - K(t)$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$
   $$v(t) = (K_* - K_0)e^{-\int_0^t x(s)\,ds}.$$
   (c) En déduire que $v(t)$ converge exponentiellement vite vers 0 quand $t \to +\infty$ (c-à-d qu'il existe $\lambda, C > 0$ tel que $v(t) \leq Ce^{-\lambda t}$, pour $t \geq 0$) et donc que la fonction K converge vers K_*.
   (d) En déduire que la fonction x converge également vers K_* en temps grand.