Aix-Marseille Université 2014-2015

Equations différentielles ordinaires

Corrigé du Partiel 2015

Exercice 1 Soit σ, ρ, β trois constantes réelles et soit le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \sigma\big(y(t) - x(t)\big) \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \rho\, x(t) - y(t) - x(t)\, z(t) \\ \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = x(t)\, y(t) - \beta\, z(t) \end{cases}, \qquad (1)$$

défini sur $\mathbb{R}$.

1. Ecrire (1) sous la forme : $u'(t) = f(t, u(t))$ en précisant I, Ω, u et f.

corrigé

$I = \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R}^3$, $u(t) = (x(t), y(t), z(t))$ et

$$f(t,u) := \begin{pmatrix} \sigma\big(y - x\big) \\ \rho\, x - y - x\, z \\ x\, y - \beta z \end{pmatrix}, \quad u = (x, y, z).$$

---

2. Justifier que pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, il existe $c > 0$ et une application $t \in]-c, c[\to (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \sigma\big(y(t) - x(t)\big) \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \rho\, x(t) - y(t) - x(t)\, z(t) \\ \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = x(t)\, y(t) - \beta\, z(t) \\ (x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0) \end{cases}. \qquad (2)$$

corrigé

L'application $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to f(t, u) \in \mathbb{R}^3$ est de classe $\mathcal{C}^1$. L'application du théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer que pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, le problème de Cauchy associé à (2) admet une unique solution locale. Comme $t_0 = 0$, l'intervalle d'existence de la solution contient un voisinage de 0 et donc un intervalle de la forme $]-c, c[$ où $c > 0$.

On aurait pu utiliser le théorème de Cauchy-Péano-Arzelà, car on ne demandait pas de justifier l'unicité.

Exercice 2

1. Quelle est la nature de l'équation diférentielle

$$u'(t) = \frac{u(t)}{t} + t^2, \quad t \in]-\infty, 0[\ ?$$

corrigé

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre posée sur $I :=]-\infty, 0[$, avec $a(t) = 1\frac{1}{t}$, $b(t) = t^2$. Ces deux applications sont continues sur I.

---

2. Résoudre

$$\left\{\begin{array}{c} u'(t) = \frac{u(t)}{t} + t^2, \quad t \in]-\infty, 0[\\ u(-1) = 0. \end{array}\right. \tag{3}$$

corrigé

L'équation homogène a comme solution

$$u_H(t) = ce^{\int_{-1}^{t} \frac{ds}{s}} = ct, \quad c \in \mathbb{R}.$$

On peut chercher une solution particulière par la méthode de la variation de la constante. On obtient

$$u_p(t) = t\int_{-1}^{t} sds = \frac{t^3}{2}.$$

L'ensemble des solutions est donc donné par

$$\{t \to ct + \frac{t^3}{2},\ t \in]-\infty, 0[,\ \ c \in \mathbb{R}\}.$$

En tenant compte de la condition de Cauchy, on obtient $c = -\frac{1}{2}$. Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy est

$$u(t) = \frac{1}{2}(t^3 - t), \quad t \in]-\infty, 0[.$$

Exercice 3

1. Montrer que pour tout $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le problème de Cauchy suivant

$$\left\{\begin{array}{c} u'(t) = \frac{u(t)}{1+t^2} - u^3(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(t_0) = u_0, \end{array}\right. \tag{4}$$

admet une unique solution maximale.

corrigé

Soit $f(t,u) := \frac{u}{1+t^2} - u^3$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En conséquence, du théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le problème de Cauchy admet une unique solution maximale.

---

2. Montrer que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, si $u_0 = 0$, alors la solution du problème de Cauchy (4) associée est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ (en particulier, elle est globale).

corrigé

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ quelconque et fixé. Il est clair que $u(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, est une solution du problème de Cauchy (4) associée à $u(t_0) = 0$. Par unicité, c'est l'unique solution.

---

3. Soit $t_0 = 0$, $u_0 > 0$ et (J, u) l'unique solution maximale du problème de Cauchy (4). Montrer que

$$0 < u(t) < u_0 e^t, \quad t \in J,\ t \geq 0.$$

corrigé

Comme l'application :$t \in \mathbb{R} \to 0$ vérifie l'équation différentielle, si $u_0 > 0$, par unicité du problème de Cauchy, on aura $u(t) > 0$ pour tout $t \in J$. Pour montrer la seconde inégalité, on tient compte que $u(t) > 0$ sur J et que $\frac{1}{1+t^2} \leq 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$. En conséquence,

$$u'(t) \leq u(t), \quad \forall t \in J.$$

En intégrant sur $(0,t)$ avec $t>0$, on obtient

$$u(t) \leq u_0 + \int_0^t u(s)\, ds.$$

Pour conclure, on applique le lemme de Gronwall-Bellman avec $u(t) = u(t)$, $v(t) = u_0$ et $\lambda = 1$. On obtient

$$u(t) \leq u_0 + u_0 \int_0^t e^{(t-s)}\, ds = u_0 + u_0(e^t - 1) = u_0 e^t, \quad t \in J,\ t \geq 0.$$

Exercice 4

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(u) = \frac{u}{1+u^2}$. Pour $u_0 \in \mathbb{R}$, on considère le problème de Cauchy suivant

$$\left\{ \begin{array}{c} u'(t) = f(u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0. \end{array} \right. \tag{5}$$

1. Justifier que le problème de Cauchy (5) a une unique solution maximale (J,u).

corrigé

La fonction $g(t,u) := \frac{u}{1+u^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Elle satisfait donc les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz et en conséquence, pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$ le problème de Cauchy (5) a une unique solution maximale.

---

2. Trouver les solutions stationnaires de $u'(t) = f(u(t))$, $t \in \mathbb{R}$.

corrigé

Les solutions stationnaires sont les constantes c solutions de $f(c) = 0$. Cette équation n'a qu'une seule solution, $c = 0$. Il n'y a qu'une seule solution stationnaire, $u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$.

---

3. Soit $u_0 > 0$. Montrer que la solution maximale associée est positive, croissante. En déduire que l'intervalle maximale est de la forme $]-\infty, t_1[$, où $t_1 \in]0, +\infty]$ et que $\lim_{t \to -\infty} u(t) = 0$.

corrigé

Comme $t \in \mathbb{R} \to 0$ vérifie l'équation différentielle, par unicité du problème de Cauchy, si $u_0 > 0$, la solution maximale restera positive sur son intervalle maximal, $J :=]a,b[$. En conséquence, $u'(t) = f(u(t)) > 0$ pour tout $t \in J$. Comme $t_0 = 0 \in J$, on a nécessairement : $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$. Ainsi, $t \to u(t)$ est croissante sur J. Comme $t \to u(t)$ est minorée (par 0), elle admet une limite finie à droite de a. On note $\bar{u}$ cette limite. Si a est fini, u sera prolongeable par continuité en $t = a$. On considère le problème de Cauchy avec donnée de Cauchy $v(a) = \bar{u}$. Ce problème admet une unique solution maximale $(\bar{J}, w)$. La fonction

$$\tilde{u}(t) = \left\{ \begin{array}{c} u(t), t \in]a,b[\\ w(t), t \in \bar{J} \cap]-\infty, a] \end{array} \right.$$

est solution du problème de Cauchy initial, (5) qui prolonge (J,u). Ceci contredit la maximalité de J et en conséquence, $a = -\infty$. Dans l'exercice 14 vu en TD, on a montré que si u a une limite finie, l en $-\infty$, nécessairement $f(l) = 0$. Dans notre cas, la seule possibilité est $l = 0$.
