Année universitaire 2015/2016

Site :	☒ Luminy	☐ St-Charles	☐ St-Jérôme	☐ Cht-Gombert	☐ Aix-Montperrin	☐ Aubagne-SATIS

Sujet session de : ☐ 1er semestre ☒ 2ème semestre ☒ Partiel	Durée de l'épreuve : **2H**
Examen de : ☐ L1 ☐ L2 ☒ L3 ☐ M1 ☐ M2 ☐ LP ☐ DU	Nom diplôme : **Licence de Mathématiques**

Code Apogée du module : **ENSMI6U2**	Libellé du module : **Equations différentielles**

Document autorisé : ☐ OUI ☒ NON	Calculatrices autorisées : ☐ OUI ☒ NON

Partiel - Mercredi 3 mars 2016

Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 On considère le problème de Cauchy

$$ty' + (t-1)y = t^2, \qquad y(t_0) = y_0.$$

1. Ecrire l'équation sous la forme $y' = f(t, y)$.
2. Déterminer les intervalles sur lesquels on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.
3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur les différents intervalles.
4. Existe-t-il des solutions de cette équation dérivables sur $\mathbb{R}$?

---

1. On a $y'(t) = f(t, y(t))$ avec $f(t, y) = \frac{1-t}{t}y + t$. Par conséquent, f n'est définie que sur $I^+ =]0, +\infty[$ ou $I^- =]-\infty, 0[$.
2. Sur chacun des intervalles I^+ et I^-, f est continue et est une fonction affine en y. En particulier, elle est globalement lipschitz sur tout $]a, b[\times\mathbb{R}$ où $a, b > 0$ (respectivement $a, b < 0$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure donc l'existence et l'unicité d'une unique solution définie sur tout intervalle $]a, b[$ avec $a, b > 0$ (resp. $a, b < 0$)
3. Cherchons les solutions sur I^+.
   On a une équation de la forme $y' = a(t)y(t) + b(t)$ avec $a(t) = \frac{1}{t} - 1$. Une primitive de a est $A(t) = \ln(t) - t$. Par conséquent, les solutions de l'équation homogène sont $y(t) = \lambda t e^{-t}$.
   La méthode de la variation de la constante conssite à chercher y sous la forme $y(t) = \lambda(t)te^{-t}$. On obtient $\lambda'(t)te^{-t} = t$, donc $\lambda'(t) = e^t$ donc $\lambda(t) = e^t + K$. Ainsi, $y(t) = t + Ke^{-t}$.
   Ainsi $\mathcal{S}_{I^+} = \{t \mapsto K^+te^{-t} + t,\ K^+ \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{S}_{I^-} = \{t \mapsto K^-te^{-t} + t,\ K^- \in \mathbb{R}\}$.
4. Le raccord continu en 0 n'impose pas de conditons, le raccord dérivable impose $K^+ = K^-$.
   Il y a donc une infinité de solutions fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto Kte^{-t} + t$ qui satisfont $ty' + (t-1)y = t^2$.
   Si $t_0 > 0$, il existe une unique solution définie sur I^+ qui vérifie le problème de Cauchy

   $$ty' + (t-1)y = t^2, \qquad y(t_0) = y_0.$$

   donnée par

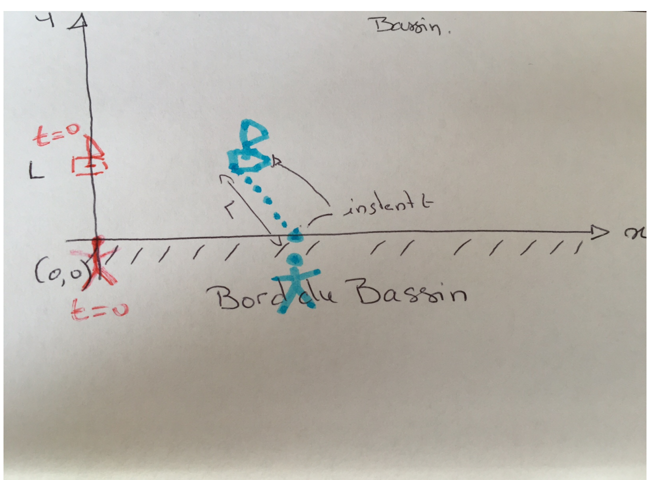
   $$y(t) = Kte^{-t} + t, \quad K = \frac{e^{t_0}}{t_0}(y_0 - t_0).$$

   On remarque que cette fonction vérifie sur $\mathbb{R}$, $ty' + (t-1)y = t^2$.

Exercice 2 Un enfant marche le long d'un bassin rectiligne, en tirant un bateau au bout d'une corde. Au départ, la corde est perpendiculaire au bord du bassin. L'enfant se déplace à vitesse constante, et la vitesse du bateau est toujours dirigée dans le sens de la corde, qui reste toujours tendue. L'objectif de cet exercice est de déterminer la trajectoire du bateau dans le bassin.
Choisissons un repère orthonormé du plan, dans lequel le bord du bassin est sur l'axe horizontal, et l'origine au point où l'enfant commence à marcher. A l'instant $t = 0$, le bateau se trouve donc au point d'abscisse 0 et d'ordonnée L, la longueur de la corde. Notons $X = (x(t), y(t))$ la position du bateau à l'instant t. Soit v la vitesse à laquelle marche l'enfant.

1. Traduiser par un dessin les indications ci-dessus.
2. On note $X_e(t) = (x_e(t), y_e(t))$ la position de l'enfant à un instant t. Déterminer le problème de Cauchy satisfait par X_e et calculer $X_e(t)$ à chaque instant.
3. Montrer que
$$(x(t) - vt)^2 + y(t)^2 = L^2.$$
En déduire que
$$(x'(t) - v)(x(t) - vt) + y'(t)y(t) = 0.$$
4. Montrer que
$$x'(t)y(t) - y'(t)(x(t) - vt) = 0$$
5. En utilisant ce qui précède, en déduire que x est solution de l'équation dite *équation de la tractrice*
$$x'(t) = \frac{v}{L^2}(x(t) - vt)^2.$$
6. Soit x_0 la fonction définie par $x_0(t) = vt - L$. Vérifier qu'il s'agit d'une solution particulière de l'équation de la tractrice. Comment interprèteriez-vous cette solution ?
7. Soit z la fonction définie par $z(t) = \frac{1}{x(t) - x_0(t)}$. Montrer que z est solution d'une équation linéaire du premier ordre que l'on déterminera et que l'on résoudra.
8. En déduire l'évolution de $t \mapsto (x(t), y(t))$.
9. La Figure 1 représente les trajectoires du bateau pour $t \in [0, 10]$, pour $L = 10$ et pour différentes valeurs de v. Commenter.

---

1. 

2. On a
$$\frac{d}{dt}X_e = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_e(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Par conséquent, $x_e(t) = vt$ et $y_e(t) = 0$.
3. On écrit juste que la distance entre l'enfant et le bateau est égale à L ou de façon équivalente que
$$\|X(t) - X_e(t)\|^2 = L^2 = (x(t) - x_e(t))^2 + (y(t) - y_e(t))^2 = (x(t) - vt)^2 + y(t)^2$$
En dérivant par rapport au temps cette idéntité on obtient (on a divisé par 2 le résultat)
$$(x'(t) - v)(x(t) - vt) + y'(t)y(t) = 0.(*)$$

4. On utilise maintenant que le vecteur vitesse du bateau $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur $X(t) - X_e(t)$ (la vitesse du bateau est toujours dirigée dans le sens de la corde). On voit alors que $X' \wedge (X(t) - X_e(t)) = 0$ soit encore
$$x'(t)y(t) - y'(t)(x(t) - vt) = 0.(**)$$
5. On multiplie (*) par $(x(t) - vt)$ et (**) par $y(t)$ et on ajoute ces deux identités. On trouve alors
$$(x' - v)(x(t) - vt)^2 + x'y(t)^2 = 0$$
Soit en utilisant le fait que $y(t)^2 = L^2 - (x(t) - vt)^2$,
$$(x' - v)(x(t) - vt)^2 + x'(L^2 - (x(t) - vt)^2) = 0 \quad \Rightarrow x'(t)L^2 = v(x(t) - vt)^2.$$
6. On a $x_0'(t) = v$ et $\frac{v}{L^2}(x_0(t) - vt)^2 = v$. Par conséquent, x_0 est bien une solution particulière de l'équation.
7. Soit $z(t) = \frac{1}{x(t) - x_0(t)}$. On a
$$\begin{aligned} z'(t) &= -\frac{x'(t) - x_0'(t)}{(x(t) - x_0(t))^2} \\ &= -\frac{\frac{v}{L^2}(x(t) - vt)^2 - v}{(x(t) - vt + L)^2} \\ &= -\frac{v}{L^2}\frac{(x(t) - vt)^2 - L^2}{(x(t) - vt + L)^2} \\ &= -\frac{v}{L^2}\frac{(x(t) - vt - L)((x(t) - vt + L)}{(x(t) - vt + L)^2} \\ &= -\frac{v}{L^2}\frac{x(t) - vt + L - 2L}{(x(t) - vt + L)} = -\frac{v}{L^2}(1 - 2Lz(t)) = 2\frac{v}{L}z(t) - \frac{v}{L^2}. \end{aligned}$$
On a obtenu une équation linéaire dont les solution sont de la forme
$$z(t) = Ke^{2\frac{v}{L}t} + \frac{1}{2L}.$$
Pour que $x(0) = 0$, il faut que $z(0) = \frac{1}{L}$, et donc $K = \frac{1}{2L}$. On a donc obtenu
$$z(t) = \frac{1}{2L}\left(1 + e^{2\frac{v}{L}t}\right)$$
8. On en déduit en posant $u = \frac{v}{L}t$ que
$$x(t) = vt - L + \frac{1}{z(t)} = vt - L + \frac{2L}{1 + e^{2u}} = vt + L(\frac{2}{1 + e^{2u}} - 1) = vt + L\frac{2e^{-u} - (e^{-u} + e^u)}{e^{-u} + e^u} = vt - L\text{th}(u)$$
et
$$y^2(t) = L^2 - (x(t) - vt)^2 = L^2(1 - \text{th}(u)^2) = \left(\frac{L}{\text{ch}(u)}\right)^2$$
On en déduit que
$$X(t) = \begin{pmatrix} vt - L\text{th}\left(\frac{v}{L}t\right) \\ \frac{L}{\text{ch}\left(\frac{v}{L}t\right)} \end{pmatrix}$$
9. L'allure des trajectoires ne dépend que de la longueur de la corde L. Le temps de parcourt d'une trajectoire dépend par contre de la vitesse.

Exercice 3

1. On considère l'équation différentielle
$$x'(t) = \cos(2\pi(x(t) - t)), \ x(0) = x_0 \qquad (E_1)$$
   (a) Mettre l'équation sous la forme $x' = f(t, x)$ et montrer que le problème de Cauchy (E_1) admet une solution maximale.
   (b) Soit x une solution de (E_1) et $I =]a, b[$ son intervalle de définition. Montrer que $I = R$.

(c) Soit $k \in \mathbb{Z}$, vérifier que $y : t \mapsto t + k$ vérifie l'équation.

(d) On fixe une solution maximale $(\mathbb{R}, x)$ de (E_1) et notons k la partie entière de x_0. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t + k < x(t) < t + k + 1$.

(e) En déduire que $t \mapsto x(t) - t$ converge en $\pm\infty$ et exprimer les limites en fonction de la condition initiale $x(0)$.

2. On introduit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et on considère maintenant le problème de Cauchy

$$x'(t) = g(x) + \cos(2\pi(x(t) - t)), \quad x(0) = 1 \tag{E_2}$$

(a) Montrer que le problème de Cauchy (E_2) admet une solution maximale.

(b) Montrer que la fonction g' est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$.

(c) En déduire que la solution maximale x de (E_2) est définie sur $\mathbb{R}$.

(d) L'allure des courbes intégrales est donnée Figure 1 (Droite). Que conjecturez-vous pour le comportement asymptotique de $t \mapsto x(t)$? Expliquer rapidement la démarche que vous utiliseriez pour la démontrer.

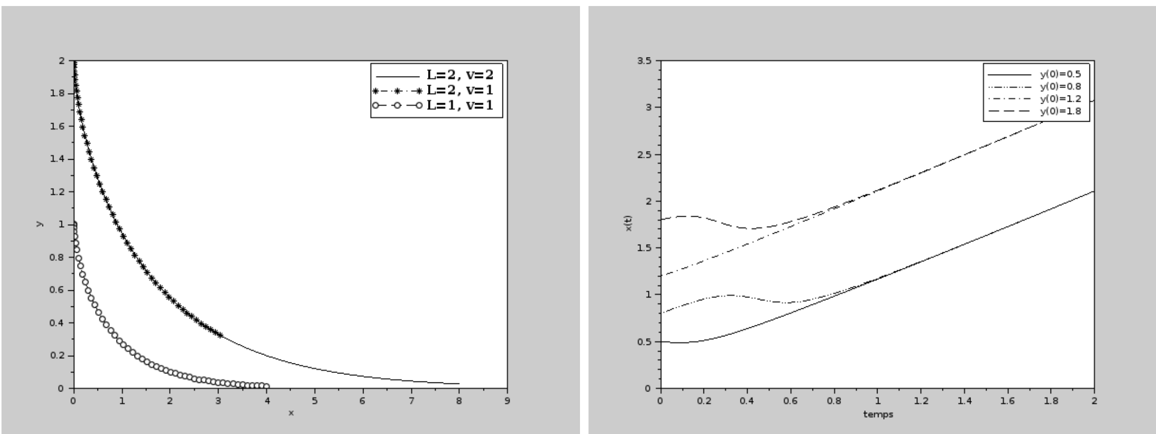


Figure 1 – (Gauche) Exercice 2. Allure des trajectoires du bateau. (Droite) Exercice 3. Allure des courbes intégrales de (E_2).

---

1. (a) La fonction $f : (t, x) \mapsto \cos(2\pi(x - t))$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. On peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz et affirmer que pour chaque condition initiale il existe une unique solution maximale et celle-ci est définie sur un intervalle ouvert.

(b) On a $|\partial_x f(t, x)| = |-2\pi \sin(2\pi(x-t))| \leq 2\pi$ donc f est globalement lipschitzienne par rapport à saa deuxième variable. Par conséquent la solution est globale.

(c) Il suffit de vérifier que $y'(t) = 1 = \cos(2\pi(t + k - t)) = \cos(2\pi(y(t) - t))$.

(d) Le premier point est une conséquence de l'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz. Deux courbes intégrales ne peuvent pas se croiser.

(e) On vérifie que la fonction définie par $z(t) = x(t) - t$ est monotone. En effet,

$$z' = \frac{d}{dt}(x(t) - t) = \cos(2\pi(x(t) - t)) - 1 = \cos(2\pi z) - 1 \leq 0.$$

Par conséquent la fonction z est décroissante minorée par k, elle converge vers $l \geq k$ lorsque $t \to +\infty$ et $\bar{l} \leq k + 1$ lorsque $t \to -\infty$. En passant à la limite sur l'équation on voit que

$$0 = \lim z' = \cos(2\pi \lim z) - 1$$

donc forcément, $l = k$ et $\bar{l} = k + 1$.

2. (a) le problème s'écrit $x' = \bar{g}(t, x(t))$ avec $\bar{g}(t, x) = \frac{1}{1+x^2} + f(t, x)$.

(b) On peut alors étudier les variations de la fonction $\psi = g'$. Cette fonction est impaire, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$, de plus

$$\psi'(x) = \frac{2(1+x^2) - 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}$$

On en déduit que $|\psi|$ admet un maximum en $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ qui vaut $\frac{2\sqrt{\frac{1}{3}}}{(1+\frac{1}{3})^2} = \frac{9}{8\sqrt{3}} < 1$.

(c) On remarque que $\frac{\partial}{\partial x}\bar{g}(t,x) = \underbrace{\frac{2x}{(1+x^2)^2}}_{=g'(x)} + \frac{\partial}{\partial x}f(t,x)$. On en déduit que

$$|\frac{\partial}{\partial x}g(t,x)| \leq 2$$

et par suite la solution est globale.

(d) On peut conjecturer au vu du graphique que l'on a toujours $\lim_{t\to\pm\infty}(x(t)-t)$ existe. De fait en reprenant la démontration précédente, on arrive juste à montrer que la fonction $x(t)-t$ est bornée.