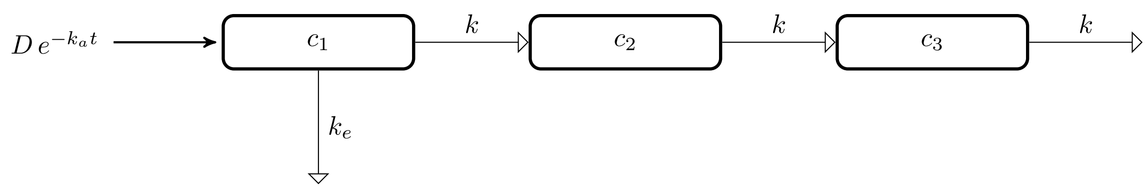
Année universitaire 2017/2018

Site :	☒ Luminy	☒ St-Charles	☐ St-Jérôme	☐ Cht-Gombert	☐ Aix-Montperrin	☐ Aubagne-SATIS
Sujet session de : ☐ 1er semestre ☒ 2ème semestre ☒ Partiel				Durée de l'épreuve : **2H**	
Examen de : ☐ L1 ☐ L2 ☒ L3 ☐ M1 ☐ M2 ☐ LP ☐ DU				Nom diplôme : **Licence de Mathématiques**	
Code Apogée du module : **ENSMI6U2**		Libellé du module : **Equations différentielles**			
Document autorisé : ☐ OUI ☒ NON				Calculatrices autorisées : ☐ OUI ☒ NON	

Interrogation - Mercredi 28 mars 2018

Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 En pharmacologie (l'étude des interactions entre un médicament et l'organisme), on considère le système à trois compartiment suivant :



En notant $c_1,\ c_2,\ c_3$ les concentrations dans les différents compartiments, le système associé s'écrit :

$$\begin{cases} c_1'(t) &= -(k+k_e)\,c_1(t) + k_a\,D\,e^{-k_a t} \\ c_2'(t) &= -k\,c_2(t) + k\,c_1(t) \\ c_3'(t) &= -k\,c_3(t) + k\,c_2(t) \end{cases}. \qquad (1)$$

On pose $C(t) = (c_1(t),\, c_2(t),\, c_3(t))^t$.

1. Trouver en fonction de $k,\ k_a,\ k_e,\ D$ la matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ et la fonction vectorielle $B : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ telles que
$$C'(t) = AC(t) + B(t).$$
2. Écrire formellement la formule de Duhamel donnant la solution de cette équation différentielle en fonction de la condition initiale $C(0)$.
3. Calculer e^{tA} dans le cas où $k_e = 0$.

On suppose dans la suite que $k = k_e$.

4. Quelles sont les valeurs propres de A dans ce cas ? Préciser leur multiplicité.
5. Trouver $\alpha,\ \beta$ tels que $(1,\alpha,\beta)^t$ soit un vecteur propre associé à la valeur propre $-2k$. Trouver $\gamma,\ \lambda$ tels que $(0,\gamma,\lambda)$ soit vecteur propre associé à la valeur propre $-k$.
6. En déduire une matrice P telle que $A = P\tilde{A}P^{-1}$ avec $\tilde{A} = k\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
7. Calculer e^{tA} dans ce cas.
8. Si vraiment vous avez tout fini, vous pouvez calculer la solution de l'EDO non homogène (1) avec condition initiale $(0,0,0)^t$.