Correction de l'interrogation - Vendredi 26 octobre 2018

Exercice 1. [**3,0 points**] Montrer que la solution du problème de Cauchy suivant est unique et la calculer :

$$\begin{cases} Y'(t) & = AY(t) + B\,, \\ Y(0) & = (1,2)^t\,, \end{cases}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,.$$

Démonstration. Le théorème de Cauchy-Lipschitz énoncé dans le cours assure l'existence et l'unicité de la solution

$$Y\colon t \in \mathbb{R} \longmapsto (y_1(t), y_2(t))^t \in \mathbb{R}^2$$

du problème de Cauchy. Comme la matrice est triangulaire, on peut résoudre par "remonté" comme dans le cas d'un système d'équations (non différentielles) linéaires. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$ que

$$\begin{cases} y_1'(t) & = y_1(t) + 2y_1(t) + 4\,, \\ y_1(0) & = 1\,, \\ y_2'(t) & = 3y_2(t)\,, \\ y_2(0) & = 2\,. \end{cases}$$

Ainsi, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ que $y_2(t) = e^{3t}2$ et

$$\begin{cases} y_1'(t) & = y_1(t) + e^{3t}4 + 4\,, \\ y_1(0) & = 1\,. \end{cases}$$

Les solutions de l'équation différentielle linéaire ci-dessus sont de la forme $y_h + y_{p,1} + y_{p,2}$ où y_h est solution de l'équation homogène $y'(t) = y(t)$, $y_{p,1}$ est une solution de $y'(t) = y(t) + e^{3t}4$ et $y_{p,2}$ est une solution de $y'(t) = y(t) + 4$. Notons que

$$\begin{aligned} y_{p,1}\colon t \in \mathbb{R} \mapsto e^{3t}2\,, \\ y_{p,2}\colon t \in \mathbb{R} \mapsto -4\,, \end{aligned}$$

conviennent ainsi on obtient que

$$y_1\colon t \in \mathbb{R} \mapsto 3e^t + e^{3t}2 - 4\,,$$

est la solution du problème de Cauchy ci-dessus. □

Exercice 2. [**5,0 points**] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'objectif de l'exercice est de trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que la propriété suivante soit vérifiée :
Pour tout $Y_0 \in (\mathbb{R}^+)^n$, l'unique solution Y de

$$\begin{cases} Y'(t) & = AY(t)\,, t \in \mathbb{R}\,, \\ Y(0) & = Y_0 \in \mathbb{R}^n\,, \end{cases} \tag{1}$$

a toute ses composantes positives pour tout temps $t \geq 0$, c'est-à-dire que $Y(t) \in (\mathbb{R}^+)^n$ pour tout $t \geq 0$.

1. [**2,0 points**] Supposons la propriété satisfaite. Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$. On note $e_1, \dots, e_n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et

$$Y_j\colon t \mapsto (x_{1,j}(t), \dots, x_{n,j}(t))^t \in \mathbb{R}^n$$

la solution obtenue avec $Y_0 = e_j$. Quel est le signe de la dérivée de $x_{i,j}$ en 0 ? En déduire une condition nécessaire sur A.

2. **[1,0 points]** Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour toute fonction $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, on définit

$$X_Y : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{at} Y(t) \in \mathbb{R}^n\,.$$

Montrer que Y est solution du problème de Cauchy (1) **si et seulement si** X est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Z'(t) & = (A + aI_n)\, Z(t)\,, t \in \mathbb{R}\,, \\ Z(0) & = Y_0 \in \mathbb{R}^n\,, \end{cases} \tag{2}$$

3. **[1,0 points]** Supposons que pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$, on ait $a_{i,j} \geq 0$ où $a_{i,j}$ est le coefficient de A apparaissant à la i-ième ligne et à la j-ième colonne. Soit $a > \max\{-a_{i,i}\,, i \in \{1, \dots, n\}\}$. Montrer que pour tout $t \geq 0$, la matrice $e^{t(A+aI_n)}$ a tous ses coefficients positifs.
4. **[1,0 points]** Conclure.

Démonstration. 1. On a pour $i \neq j$ que $Y_j'(0) = AY_j(0) = Ae_j$ et

$$x_{i,j}'(0) = a_{i,j}\,.$$

Comme $x_{i,j}(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$ et $x_{i,j}(0) = 0$, on a

$$a_{i,j} = x_{i,j}'(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{x_{i,j}(t) - x_{i,j}(0)}{t} \geq 0\,.$$

Une condition nécessaire est donc :

pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$, on a $a_{i,j} \geq 0$.

2. Soit $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ une solution du problème de Cauchy (1) alors la fonction X_Y est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ vérifie $X_Y'(t) = ae^{at}Y(t) + e^{at}Y'(t) = (A + aI_n)X_Y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $X_Y(0) = e^{a0}Y(0) = Y_0$. La réciproque suit les mêmes arguments.
3. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $a > -a_{i,i}$ donc $a + a_{i,i} > 0$ ainsi sous les hypothèses de l'énoncé, tous les coefficients de la matrice $A + aI_n$ sont positifs. Comme le produit de matrices à coefficients positifs est une matrice à coefficients positifs, on obtient par une récurrence immédiate que $(A + aI_n)^k$ est à coefficients positifs pour tout $k \geq 0$ et par somme,

$$\sum_{k=0}^{K} \frac{t^k (A + aI_n)^k}{k!}$$

est à coefficients positifs pour tout $K \in \mathbb{N}$ et tout $t \geq 0$. En passant à la limite $K \to +\infty$, on obtient que $e^{t(A+aI_n)}$ est à coefficients positifs pour tout $t \geq 0$.
4. L'unique solution Z de (2) est définie pour tout $t \geq 0$ par

$$Z(t) = e^{t(A+aI_n)} Y_0\,.$$

Comme $Y_0 \in (\mathbb{R}_+)^n$, le point 3. assure que $Z(t)$ a tous ses coefficients positifs pour tout $t \geq 0$. Le point 2. assure que la solution Y de (1) vérifie

$$Y(t) = e^{-at} Z(t)$$

pour tout $t \geq 0$. $Y(t)$ a donc tous ses coefficients positifs pour tout $t \geq 0$. On a montré que :

Pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$, on a $a_{i,j} \geq 0$.

est une condition nécessaire et suffisante.

□

Exercice 3. **[5,0 points]** On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) & = 2 + 2(x(t))^2\,, \\ x(3) & = -\pi/4\,. \end{cases}$$

1. **[2,0 points]** Soit (J, x) une solution du problème de Cauchy ci-dessus où J est un intervalle ouvert et x est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$. En utilisant la méthode des variables séparées, calculer la solution x sur J. On rappelle que $[\arctan(s)]' = \frac{1}{1+s^2}$, pour tout $s \in \mathbb{R}$.
2. **[1,0 points]** Déduire du point 1. (sans utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz) que la solution du problème de Cauchy est unique (si elle existe).
3. **[1,0 points]** Donner, en se basant sur le point 1., la solution maximale du problème de Cauchy (et montrer pourquoi elle est maximale).
4. **[1,0 points]** Dessiner le graphique de la solution. On y précisera les asymptotes aux bords de l'intervalle de définition et la tangente en 3 tout en donnant son équation.

Démonstration. 1. Soit (J, x) une solution du problème de Cauchy. On a pour tout $t \in J$ que

$$2 = \frac{x'(t)}{1 + x(t)^2} = [\arctan(x(t))]' ,$$

donc

$$2(t-3) = \int_3^t 2\, ds = \int_3^t \frac{x'(s)}{1 + x(t)^2}\, , ds = \arctan(x(t)) - \arctan(x(3)) ,$$

et

$$x(t) = \tan\left(2(t-3) + \arctan(-\pi/4)\right) .$$

2. Soient (J_1, x_1) et (J_2, x_2) deux solutions du problème de Cauchy. Alors ; $(J_1 \cap J_2, x_1)$ et $(J_2 \cap J_2, x_2)$ sont aussi deux solutions du problème de Cauchy. Par le point 1., on obtient que pour tout $t \in J_1 \cap J_2$,

$$x_1(t) = x_2(t) = \tan\left(2(t-3) + \arctan(-\pi/4)\right) .$$

Ainsi, la solution du problème de Cauchy est unique.

3. La fonction $y \mapsto \tan(y)$ est définie sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Ainsi, la formule du point 1. est bien définie si

$$-\pi/2 \leq (2(t-3) + \arctan(-\pi/4)) \leq \pi/2 ,$$

donc si

$$t_- := \frac{-\pi/2 - \arctan(-\pi/4)}{2} + 3 \leq t \leq \frac{\pi/2 - \arctan(-\pi/4)}{2} + 3 =: t_+ .$$

On pose $J =]t_-, t_+[$ et $x \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ définie pour tout $t \in J$ par

$$x(t) = \tan\left(2(t-3) + \arctan(-\pi/4)\right) .$$

Vérifions que x est bien une solution du problème de Cauchy. On a

$$x(3) = \tan(\arctan(-\pi/4)) = -\pi/4 ,$$

et pour tout $t \in J$,

$$x'(t) = 2\left(1 + \tan\left(2(t-3) + \arctan(-\pi/4)\right)^2\right) = 2(1 + x(t)^2) .$$

Ainsi, x est bien une solution du problème de Cauchy. On a aussi que

$$\lim_{t \to t_+} x(t) = \lim_{s \to \pi/2^-} \tan(s) = +\infty$$

et

$$\lim_{t \to t_-} x(t) = \lim_{s \to -\pi/2^+} \tan(s) = -\infty ,$$

donc la solution x est maximale.

4. La figure 1 répond à la question 4.

$\square$

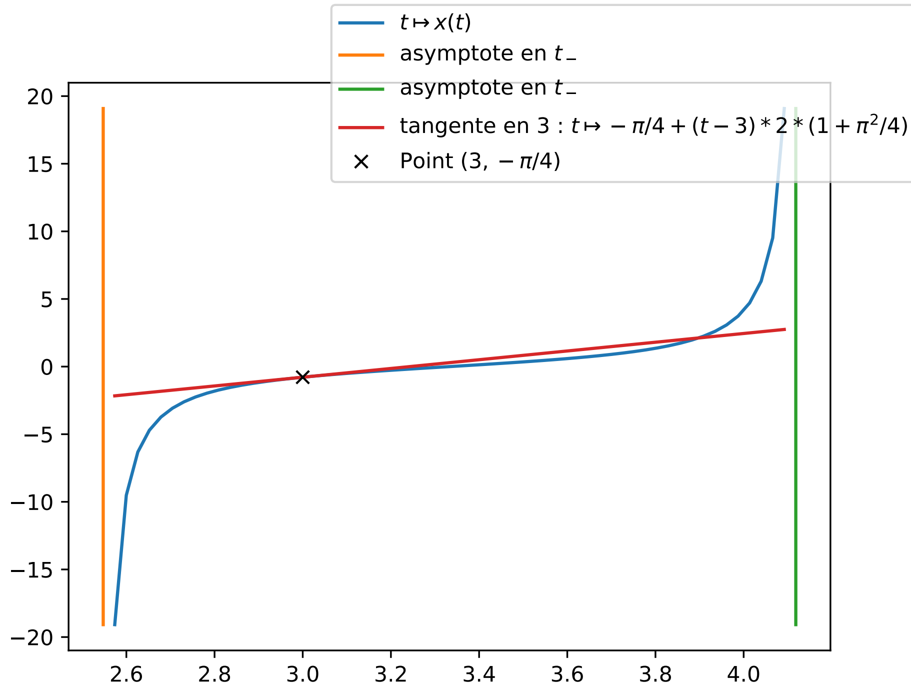

Figure 1 – Graphique de la solution du problème de Cauchy

Exercice 4. [10,0 points] On souhaite étudier les équations différentielles scalaires d'ordre 3 à coefficients constants. Soient $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. On considère l'équation différentielle

$$x^{(3)}(t) + a_2 x^{(2)}(t) + a_1 x^{(1)}(t) + a_0 x(t) = 0\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{3}$$

où $x^{(k)}$ est la k-ième dérivée de x, ($k \in \mathbb{N}$). On dit que la fonction x est solution de (3) si x est de classe $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et vérifie l'équation (3) pout tout $t \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{S}_{scal}$ l'ensemble des solutions de (3).
On admettra que $\mathcal{S}_{scal}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3. L'objectif de l'exercice de donner une base de $\mathcal{S}_{scal}$. On définit

$$P \colon z \in \mathbb{C} \longmapsto z^3 + a_2 z^2 + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}\,.$$

1. **[1,0 points]** Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On pose

   $$x_\alpha : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{t\alpha} \in \mathbb{C}\,.$$

   Déterminer toutes les constantes α pour lesquelles x_α est solution de (3).
2. **[1,0 points]** En déduire une base de $\mathcal{S}_{\mathrm{scal}}$ lorsque P est scindé à racines simples.
3. **[1,0 points]** Soit $k \in \{1, \ldots, 3\}$. Supposons que 0 est une racine de multiplicité k de P c'est-à-dire que

   $$a_0 = \cdots = a_{k-1} = 0\,.$$

   Montrer que l'espace des polynômes de degrés au plus $k-1$ est inclus dans l'ensemble des solutions. Donner la dimension de cet espace de polynômes.
4. **[2,0 points]** Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Soit $u \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On pose $v \colon t \mapsto e^{-\alpha t} u(t) \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer que u est solution de (3) si et seulement si v est solution de

   $$\sum_{j=0}^{3} \frac{P^{(j)}(\alpha)}{j!} v^{(j)}(t) = 0\,,$$

   où $P^{(j)}(\alpha)$ est la j-ième dérivée du polynôme P évaluée en α.

5. **[2,0 points]** Donner une base de l'ensemble de solutions de (3). On notera $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ les racines de P et $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}^*$ leur multiplicité respective ($m \in \{1, \dots, 3\}$).
6. **[1,0 points]** Application : Donner une base de l'ensemble des solutions de
$$y^{(3)}(t) + 2y^{(2)}(t) + y^{(1)}(t) = 0\,.$$
7. **[1,0 points]** Application 1 : Donner une base de l'ensemble des solutions de
$$y^{(3)}(t) - y(t) = 0\,.$$
8. **[1,0 points]** Dans les deux cas précédents, donner une base de l'ensemble des solutions qui soit formée de fonction à valeurs réelles.

Démonstration. 1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. La fonction x_α est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $x_\alpha^{(k)}(t) = \alpha^k e^{\alpha t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. On obtient donc que pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$x_\alpha^{(3)}(t) + a_2 x_\alpha^{(2)}(t) + a_1 x_\alpha^{(1)}(t) + a_0 x_\alpha(t) = P(\alpha) e^{t\alpha}\,.$$
Ceci nous assure que x_α est solution de l'équation différentielle si et seulement si α est racine du polynôme P.

2. Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les trois racines simples de P, la question précédente assure que les fonctions $x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, x_{\lambda_3}$ sont des solutions de l'équation. C'est de plus une famille libre de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}$. Comme l'espace des solutions $\mathcal{S}_{\text{scal}}$ est de dimension 3, on obtient que les fonctions $x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, x_{\lambda_3}$ forment une base de $\mathcal{S}_{\text{scal}}$.
3. Soit v une fonction de l'ensemble $\mathbb{C}_{k-1}[X]$ des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $k-1$. On a que $v^{(j)}$ est la fonction nulle pour tout $j \in \{k, \dots, 3\}$ donc v est solution de l'équation différentielle.
4. On pourra utiliser la formule de Leibnitz pour la dérivation du produit de deux fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)\,.$$
Ainsi, on obtient que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \{0, \dots, 3\}$ que
$$u^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v^{(k)}(t) \alpha^{n-k} e^{\alpha t}\,,$$
donc en posant $a_3 = 1$,
$$\begin{aligned} u^{(3)}(t) + a_2 u^{(2)}(t) + a_1 u^{(1)}(t) + a_0 u(t) &= \sum_{n=0}^{3} a_n u^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^{3} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v^{(k)}(t) \alpha^{n-k} e^{\alpha t} \\ &= \sum_{k=0}^{3} \sum_{n=k}^{3} a_n \binom{n}{k} v^{(k)}(t) \alpha^{n-k} e^{\alpha t} = e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{3} \frac{v^{(k)}(t)}{k!} \sum_{n=k}^{3} a_n \frac{n!}{(n-k)!} \alpha^{n-k} = e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{3} \frac{v^{(k)}(t)}{k!} P^{(k)}(\alpha)\,. \end{aligned}$$
Ceci nous assure que u est solution de (3) si et seulement si v est solution de
$$\sum_{j=0}^{3} \frac{P^{(j)}(\alpha)}{j!} v^{(j)}(t) = 0\,.$$
5. Soit $j \in \{1, \dots, m\}$. D'après les questions 3. et 4., les fonctions
$$\begin{array}{lll} t \mapsto e^{\lambda_1 t}\,, & \dots & t \mapsto e^{\lambda_m t}\,, \\ \vdots & & \vdots \\ t \mapsto t^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 t} & \dots & t \mapsto t^{k_m - 1} e^{\lambda_m t}\,, \end{array}$$
sont solutions de l'équation (3). Elles forment de plus une famille libre à $\sum_{j=1}^m k_j = 3$ éléments. C'est donc une base de $\mathcal{S}_{\text{scal}}$.

6. On pose $P_1\colon z \mapsto z^3 + 2z^2 + z$. Les racines de P_1 sont 0 de multiplicité 1 et -1 de multiplicité 2. Les fonctions
$$t \mapsto 1\,, \quad t \mapsto e^{-t}\,, \quad t \mapsto te^{-t}\,,$$
forment une base de l'ensemble des solutions.
7. On pose $P_2\colon z \mapsto z^3 - 1$. Les racines de P_2 sont 1, $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Elles sont simples et les fonctions
$$t \mapsto e^{t}\,, \quad t \mapsto e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}t}\,, \quad t \mapsto e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}t}\,,$$
forment une base de l'ensemble des solutions.
8. Dans le premier cas, comme les racines sont réelles, les fonctions proposées sont déjà à valeurs réelles. Dans le second cas, comme $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ sont deux racines complexes conjuguées, les fonctions associées ne sont pas à valeurs réelles. Cependant, les fonctions
$$t \mapsto \frac{1}{2}\left(e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} + e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}\right) = e^{-t/2}\cos(t\sqrt{3}/2)$$
et
$$t \mapsto \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} - e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}\right) = e^{-t/2}\sin(t\sqrt{3}/2)$$
sont des solutions à valeurs réelles et qui forment avec $t \mapsto e^{t}$ une base de l'ensemble des solutions.

$\square$