TP 1, équations différentielles du 1er ordre, schémas explicites

Exercice 1 (Schéma d'Euler explicite)**.**

1. *Modèle de Gompertz.* On reprend ici le modèle de Gompertz (TD2, Exercice 1). Tracer sur un même graphe les solutions exactes et approchées par le schéma d'Euler explicite, avec différents pas de temps entre 0.1 et 1, de l'EDO
$$y'(t) = y(t)\ln\left(\frac{K}{y(t)}\right)$$
pour $K = 10$, $0 \leq t \leq 10$ et pour les conditions initiales suivantes
   (a) $y(0) = 0.1$,
   (b) $y(0) = 2$.

   On peut vérifier que les solutions sont globales et sont de la forme
$$y(t) = K\left(\frac{y(0)}{K}\right)^{e^{-t}}.$$
   Dans les deux cas demandés, que vaut $\lim_{t\to+\infty} y(t)$?
2. *EDO étudiée en cours.* Tracer sur un même graphe les solutions exactes et approchées par le schéma d'Euler explicite, avec différents pas de temps entre 0.1 et 0.001, de l'EDO $y'(t) = (y(t))^2$ pour $0 \leq t \leq T$ et pour les conditions initiales suivantes
   (a) $T = 2$, $y(0) = 0.2$,
   (b) $T = 0.49$, $y(0) = 2$.

   Vérifier que les solutions sont, sur l'intervalle considéré de la forme
$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y(0)} - t}.$$

Exercice 2 (Equilibre atteint ou non atteint)**.**

1. On étudie l'équation différentielle
$$y'(t) = -y(t)^2,\ t \in \mathbb{R}_+,$$
avec une condition initiale en $t = 0$ notée y_0. Dans la suite, on prendra $y_0 = 1$ ou 2 et on s'intéressera à la solution pour $t \in [0, T]$, avec $T = 1, 5$ ou $T = 10$.
   (a) Vérifier (ou admettre) que les solutions sont bien de la forme :
$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} + t}.$$
   (b) Représenter maintenant (pour différentes valeurs de y_0) sur un même graphique la solution exacte et la solution approchée obtenue avec le schéma d'Euler explicite et un pas de temps de 0.01. Commenter.

2. On étudie maintenant l'équation
$$y'(t) = -\sqrt{|y(t)|},\ t \in \mathbb{R}_+,$$
avec une condition initiale en $t = 0$ notée y_0. Dans la suite, on prendra aussi $y_0 = 1$ ou 2 et on s'intéressera à la solution pour $t \in [0, T]$, avec $T = 2\sqrt{y_0}$.

   (a) Vérifier que les fonctions définies pour $t \leq 2\sqrt{y_0}$ par
   $$y(t) = \left(\sqrt{y_0} - \frac{t}{2}\right)^2$$
   sont bien des solutions.

   (b) Représenter maintenant (pour différentes valeurs de y_0) sur un même graphique la solution excacte et la solution approchée obtenue avec le schéma d'Euler explicite et un pas de temps de 0.01. La solution approchée est elle strictement positive pour tout t<T ?

Exercice 3 (Comparaison de trois schémas explicites)**.**
On s'intéresse ici au calcul pour $t = 1$ de la solution du problème
$$\begin{aligned} &y'(t) = y(t)(1 + e^{-y(t)}) + e^{2t}, \\ &y(0) = 0. \end{aligned}$$

1. Pour un pas de temps $h = 1/n$, $n \geq 10$, programmer les trois méthodes suivantes :
   (a) Schéma d'Euler explicite,
   (b) Schéma de Heun,
   (c) Schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 (noté RK4).
2. En prenant comme valeur (presque) exacte la solution donnée par le schéma RK4 avec $n = 1280$, donner l'ordre de convergence de chacune des 3 méthodes considérées à la question 1 (en prenant $n \leq 640$).
3. Pour chacune des méthodes considérées à la question 1, en prenant des valeurs de n de la forme $2^p 5$, pour quelle valeur de n a-t-on la solution avec 2 décimales exactes ? pour quelle valeur de n a-t-on la solution avec 6 décimales exactes ?