tp2, équations différentielles du 1er ordre, schémas d'Euler explicite et implicite

Exercice 1 (Comparaison des chémas d'Euler explicite et implicite)**.**
Pour $\mu \neq 0$ et $z_0 \in \mathbb{R}$ donnés, on considère le problème de Cauchy

$$z'(t) = 1 - \frac{z(t)}{\mu},\ t > 0, \tag{1}$$

$$z(0) = z_0. \tag{2}$$

Montrer que la solution de ce problème est

$$z(t) = \mu - (\mu - z_0)e^{-\frac{t}{\mu}}.$$

On choisit pour la suite de l'exercice $\mu = 10$.

1. Tracer sur un même graphe les solutions de (1)-(2) sur l'intervalle de temps $[0, 20]$ pour $z_0 = 2, 10, 15$.

Pour la suite de l'exercice, on choisit $z_0 = 2$, on note z la solution exacte de (1)-(2) et on calcule une solution approchée par un schéma numérique sur l'intervalle de temps $[0, 20]$.

2. Tracer les approximations obtenues par les schémas d'Euler explicite et implicite (pour le problème (1)-(2)) en prenant les pas de temps suivants : $dt = 20/N$, avec $N = 5$, 10, 20. Tracer également la solution exacte.
3. Pour un pas de temps donné, noté dt, on note $t_n = ndt$, $\tilde{z}_n = z(t_n)$ et z_n la solution obtenue par un schéma numérique. On définit alors l'erreur de discrétisation (pour ce schéma et ce pas de temps) par

   $$E = \max_{n \in \{1,\ldots,N\}} |z_n - \tilde{z}_n|,$$

   avec $Ndt = 20$.

   Caculer E pour les schémas d'Euler explicite et implicite et les pas de temps $dt = 20/N$, avec $N = 20$, 40, 80, 160, 320, 640. Tracer (en échelle "log") ces deux erreurs sur un même graphe en fonction des valeurs de dt.

   Quel est l'ordre de convergence obtenu ?