

tp3, équations différentielles du 2eme ordre, visualisation de solutions exactes

Exercice 1 (RLC). On considère le circuit RLC constitué d'une bobine d'inductance L , d'un condensateur de capacité C en série et d'une résistance de résistivité R en série. Le circuit est soumis à une tension E (en volts). On cherche à calculer la tension V (en volts) aux bornes du condensateur. On note I l'intensité (en ampères) du courant électrique dans le circuit. On rappelle que

$$LC \frac{d^2V}{dt^2} + RC \frac{dV}{dt} + V = E(t)$$

1. On suppose que $E = 0$, $R = 0$ et $L = C = 1$ et on considère deux choix de conditions initiales, $V(0) = 1$, $V'(0) = 0$ et $V(0) = 0$, $V'(0) = 1$. Pour chaque choix de conditions initiales, donner le graphe de l'application $t \mapsto V(t)$ pour $t \in [0, 30]$. Puis, donner les trajectoires dans le plan de phase (c'est-à-dire l'ensemble des points $(V(t), V'(t))$ pour $t \in [0, 30]$).
2. Reprendre la question précédente avec $L = C = R = 1$ et $E(t) = \cos(2t)$.

Exercice 2 (Ressorts).

On accroche une masse m à un ressort dans un milieu où elle est soumise à un frottement fluide. On notera x la position de la masse par rapport à son équilibre (ressort non tendu ni comprimé). D'après le principe de Newton, l'équation vérifiée par la fonction $t \mapsto x(t)$ est :

$$m\ddot{x} = -\lambda\dot{x} - kx,$$

où \dot{x} et \ddot{x} désignent les dérivées première et seconde de x . Les nombres λ , k sont positifs et on suppose que $m = 1$.

1. On suppose que $\lambda = 0$ et $k = 1$ et on considère deux choix de conditions initiales, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$. Pour chaque choix de conditions initiales, donner le graphe de l'application $t \mapsto x(t)$ pour $t \in [0, 30]$. Puis, donner les trajectoires dans le plan de phase (c'est-à-dire l'ensemble des points $(x(t), \dot{x}(t))$ pour $t \in [0, 30]$).
2. Reprendre la question (1) avec $\lambda = 0.1$, $k = 1$ et l'intervalle de temps $[0, 100]$.
3. Reprendre la question (1) avec $\lambda = 10$, $k = 1$ et l'intervalle de temps $[0, 50]$.
4. Expliquer les résultats obtenus dans les questions précédentes en fonction des phénomènes physiques que sont censés modéliser les paramètres λ et k .