Devoir 2, exercice 3.3

Corrigé 3.3 (Existence par Schauder, généralisation de l'exercice 3.2)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$, a une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

- a est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, et continue par rapport à $s \in \mathbb{R}$, p.p. en $x \in \Omega$.
- Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\star$ t.q. $\alpha \leq a(x,s) \leq \beta$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et p.p. en $x \in \Omega$.
- f est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, pour tout $s, p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, et continue par rapport à $(s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, p.p. en $x \in \Omega$.
- Il existe $d \in L^2(\Omega)$, $C \in \mathbb{R}$ et $\delta \in [0,1[$ t.q. $|f(\cdot,s,p)| \leq C(d + |s|^\delta + |p|^\delta)$ p.p., pour tout $s, p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Montrer qu'il existe un et un seul u solution du problème suivant :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,u(x))\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))v(x)dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.45}$$

[On pourra construire une application de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et utiliser le théorème de Schauder.]

Corrigé – *On suit la même démarche que pour l'exercice 3.2 (les modifiactions sont mineures). On construit un opérateur, noté T, de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. On montre que, si R est bien choisi, T envoie la boule de centre 0 et de rayon R dans elle même. Enfin, on montre la continuité et la compacité de T et on conclut alors par le théorème de Schauder.*

Construction de T

Soit $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$. En choisissant un représentant de la classe de fonctions $\bar{u}$, la fonction $x \mapsto a(x,\bar{u}(x))$ est borélienne et ne change que sur un ensemble de mesure nulle si on change le représentant de $\bar{u}$, ceci est dû au fait que a est une fonction de Carathéodory (ce qui est la première hypothèse sur a). Avec la seconde hypothèse sur a, on a donc $a(\cdot,\bar{u}) \in L^\infty(\Omega)$ et $\alpha \leq a(\cdot,\bar{u}) \leq \beta$ p.p..
De même, en choisissant des représentants de $\bar{u}$ et $\nabla\bar{u}$, la fonction $x \mapsto f(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u})$ est borélienne et ne change que sur un ensemble de mesure nulle si on change les représentants de $\bar{u}$ et $\nabla\bar{u}$, ceci est aussi dû au fait que f est une fonction de Carathéodory (ce qui est la première hypothèse sur f). Avec la seconde hypothèse sur f, on a

$$|f(\cdot,\bar{u},\nabla\bar{u})| \leq C(d + |\bar{u}|^\delta + |\nabla\bar{u}|^\delta) \text{ p.p.}$$

et donc $f(\cdot,\bar{u},\nabla\bar{u}) \in L^2(\Omega)$ car $d, \bar{u}, |\nabla\bar{u}| \in L^2(\Omega)$ et $\delta \leq 1$.
On peut maintenant appliquer le théprème 2.6, il donne l'existence et l'unicité de u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,\bar{u}(x))\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x))v(x)dx, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.46}$$

On pose $u = T(\bar{u})$. On a ainsi construit une application T de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. Pour conclure, il suffit maintenant de montrer que T admet un point fixe.

Estimations sur T

Soit $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$ et $u = T(\overline{u})$. En prenant $v = u$ dans (3.46), on obtient

$$\alpha\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C(\|d\|_{L^2(\Omega)} + \||\bar{u}|^\delta\|_{L^2(\Omega)} + C_1\||\nabla\bar{u}|^\delta\|_{L^2(\Omega)})\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Avec C_Ω donnée par l'inégalité de Poincaré, on en déduit

$$\frac{\alpha}{C_\Omega}\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C(\|d\|_{L^2(\Omega)} + \||\bar{u}|^\delta\|_{L^2(\Omega)} + \||\nabla\bar{u}|^\delta\|_{L^2(\Omega)}). \tag{3.47}$$

Mais, comme dans l'exercice 3.2, on a (en utilisant l'inégalité de Hölder)

$$\||\bar{u}|^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \Big(\int_\Omega \bar{u}^2\Big)^\delta |\Omega|^{1-\delta} \text{ et } \||\nabla\bar{u}|^\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \Big(\int_\Omega |\nabla\bar{u}|^2\Big)^\delta |\Omega|^{1-\delta}.$$

On en déduit (avec l'inégalité de Poincaré) l'existence de $\bar{C}$ ne dépendant que de Ω et δ t.q.

$$\||\bar{u}|^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \bar{C}\|\bar{u}\|^\delta_{H^1_0(\Omega)} \text{ et } \||\nabla\bar{u}|^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq \bar{C}\|\bar{u}\|^\delta_{H^1_0(\Omega)}.$$

Avec (3.39), on obtient l'existence de C_2 ne dépend que α, Ω et C t.q.

$$\|u\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C_2\left(1 + \|\bar{u}\|^\delta_{H^1_0(\Omega)}\right). \tag{3.48}$$

Pour conclure cette étape, on remarque qu'il existe $R \in \mathbb{R}^\star_+$ t.q. $R > C_2(1+R^\delta)$ (car $\delta < 1$) et donc

$$\|\bar{u}\|_{H^1_0(\Omega)} \leq R \Rightarrow \|u\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C_2(1+R^\delta) \leq R.$$

Ce qui montre que T envoie B_R dans B_R où B_R est la boule (fermée) de centre 0 et de rayon R.

Continuité de T

Soit $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $H^1_0(\Omega)$ et $\overline{u} \in H^1_0(\Omega)$. On suppose que $\overline{u}_n \to \overline{u}$ dans $H^1_0(\Omega)$ (quand $n \to +\infty$). On pose $u_n = T(\overline{u}_n)$ et $u = T(\overline{u})$. On veut montrer que $u_n \to u$ dans $H^1_0(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. On pose aussi $g_n = f(\cdot, \overline{u}_n, \nabla\overline{u}_n)$, $g = f(\cdot, \overline{u}, \nabla\overline{u})$, $A_n = a(\cdot, \bar{u}_n)$ et $A = a(\cdot, \bar{u})$.

On commence par remarquer que $g_n \to g$ dans $L^2(\Omega)$ (quand $n \to +\infty$). La démonstration est ici identique à celle de $f_n \to f$ dans l'exercice 3.2. la seule modification est dans la domination de g_n qui ici est $|g_n| \leq C(d + |G|^\delta + |H|^\delta)$ p.p. (au lieu de $|f_n| \leq C_1(1 + |G|^\delta + |H|^\delta)$ p.p. dans l 'exercice 3.2).

On montre maintenant que $u_n \to u$ faiblement dans $H^1_0(\Omega)$. On suit encore le même raisonnement que dans l'exercice 3.2. L'inégalité (3.48) donne que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1_0(\Omega)$. Si $u_n \not\to u$ faiblement dans $H^1_0(\Omega)$, il existe $\varepsilon > 0$, $\psi \in H^{-1}(\Omega)$ et une sous suite, encore noté $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, t.q.

$$|\langle\psi, u_n - u\rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)}| \geq \varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{3.49}$$

Puis, après extraction éventuelle d'une sous suite, on peut supposer

$$\begin{array}{ll} u_n \to w & \text{faiblement dans } H^1_0(\Omega), \\ \bar{u}_n \to \bar{u} & \text{p.p..} \end{array}$$

Soit $v \in H^1_0(\Omega)$. Comme $u_n = T(\bar{u}_n)$, on a

$$\int_\Omega A_n\nabla u_n \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega g_n v\, dx. \tag{3.50}$$

Comme $A_n \to A$ p.p. (puisque a est p.p. continue par rapport à son deuxième argument) et $|A_n| \leq \beta$ p.p., on a, par convergence dominée, $A_n\nabla v \to A\nabla v$ dans $L^2(\Omega)^N$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient donc

$$\int_\Omega A\nabla w \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega g v\, dx.$$

Ce qui prouve que $w = u$ (grâce à l'unicité de la solution de (3.46)) et donc $u_n \to u$ faiblement dans $H^1_0(\Omega)$, en contradiction avec (3.49). On a bien ainsi montré que $u_n \to u$ faiblement dans $H^1_0(\Omega)$ quand $n \to +\infty$ (sans extraction de sous-suite).

on veut montrer maintenant que $u_n \to u$ dans $H^1_0(\Omega)$ (et pas seulement faiblement). En prenant $v = u_n$ dans (3.50), on a

$$\int_\Omega A_n\nabla u_n \cdot \nabla u_n\, dx = \int_\Omega g_n u_n\, dx.$$

Comme $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ et que $g_n \to g$ dans $L^2(\Omega)$, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega A_n\nabla u_n \cdot \nabla u_n\, dx = \int_\Omega g u\, dx.$$

et donc, comme $u = T(\bar{u})$, (3.46) donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega A_n\nabla u_n \cdot \nabla u_n\, dx = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u\, dx. \tag{3.51}$$

On remarque maintenant que

$$\alpha\|u_n - u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \int_\Omega A_n(\nabla u_n - \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u)\, dx. \tag{3.52}$$

Comme dans l'exercice 3.2, on utilise le fait que

$$A_n \nabla u \to A\nabla u \text{ dans } L^2(\Omega)^N, \text{ quand } n \to +\infty$$

et que $\nabla u_n \to \nabla u$ faiblement dans $L^2(\Omega)$. Ceci donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega A_n \nabla u \cdot \nabla u_n \, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u \, dx$$
$$\text{et } \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega A_n \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u \, dx,$$

et donc, avec (3.51),

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega A_n(\nabla u_n - \nabla u) \cdot (\nabla u_n - \nabla u) \, dx = 0.$$

On conclut bien, avec (3.52), que $u_n \to u$ dans $H_0^1(\Omega)$. Ce qui prouve la continuité de l'opérateur T de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Compacité de T

On suit toujours le raisonnement fait pour l'exercice 3.2. Soit $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $H_0^1(\Omega)$. On pose $g_n = f(\cdot, \overline{u}_n, \nabla\overline{u}_n)$ et $u_n = T(\overline{u}_n)$.

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et la suite $(\bar{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et donc relativement compacte dans $L^2(\Omega)$. On peut donc supposer, après extraction d'une sous suite, qu'il existe $g \in L^2(\Omega)$ et $\zeta \in L^2(\Omega)$ t.q.

$$\begin{aligned} &g_n \to g \text{ faiblement dans } L^2(\Omega), \\ &\bar{u}_n \to \zeta \text{ p.p. .} \end{aligned} \tag{3.53}$$

En posant $b = a(\cdot, \zeta)$, on a donc $b \in L^\infty(\Omega)$ et $a(\cdot, \bar{u}_n) \to b$ p.p..

Comme $\alpha \le b \le \beta$ p.p., il existe un et un seul u solution de

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega b\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega gv \, dx \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.54}$$

On va montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $H_0^1(\Omega)$ vers u, solution de (3.54) (on travaille ici avec la suite extraite qui vérifie (3.53)).

On sait déjà que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. En raisonnant par l'absurde, il est alors assez facile de montrer que $u_n \to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. En effet, supposons que (après extraction de sous suite) $u_n \to w$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega a(x, \bar{u}_n)\nabla u_n \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega g_n v \, dx.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans cette équation, grâce aux convergences données dans (3.53), on obtient

$$\int_\Omega b\nabla w \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega gv \, dx.$$

Ceci prouve que $w = u$. On en déduit bien que $u_n \to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. On a donc aussi $u_n \to u$ (fortement) dans $L^2(\Omega)$.

Il reste à montrer la convergence (forte) de u_n vers u dans $H_0^1(\Omega)$. Pour cela on remarque tout d'abord que

$$\int_\Omega a(x, \bar{u}_n)\nabla u_n \cdot \nabla u_n \, dx = \int_\Omega g_n u_n \, dx \to \int_\Omega gu \, dx \text{ quand } n \to +\infty.$$

Comme u est solution de (3.54) on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega a(x, \bar{u}_n)\nabla u_n \cdot \nabla u_n \, dx = \int_\Omega b\nabla u \cdot \nabla u \, dx.$$

En utilisant cette convergence et (3.53) on montre alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega a(x, \bar{u}_n)\nabla(u_n - u) \cdot \nabla(u_n - u) \, dx = 0.$$

Comme $\alpha\|u_n - u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \int_\Omega a(x, \bar{u}_n)\nabla(u_n - u)\cdot\nabla(u_n - u)\,dx$ *on conclut bien que* $u_n \to u$ *dans* $H^1_0(\Omega)$. *(On notera que la convergence est obtenue seulement pour la suite extraite qui vérifie (3.53).)*
On a bien montré la compacité de T.

Conclusion
Il suffit ici d'appliquer le théorème de Schauder. L'opérateur T *est continu et compact de* $H^1_0(\Omega)$ *dans* $H^1_0(\Omega)$. *Il existe* $R > 0$ *t.q.* T *envoie la boule de centre* 0 *et de rayon* R *(de* $H^1_0(\Omega)$*) dans elle-même. Le théorème de Schauder permet alors de dire qu'il existe* u *dans cette boule (et donc dans* $H^1_0(\Omega)$*) t.q.* $u = T(u)$. *La fonction* u *ainsi trouvée est solution de (3.45).*