

Table des matières

1	Introduction	4
1.1	L'analyse numérique des équations aux dérivées partielles	4
1.2	Principales méthodes de discrétisation	5
1.2.1	Méthodes de différences finies et volumes finis	5
1.2.2	Méthodes variationnelles, méthodes d'éléments finis	5
1.2.3	Méthodes pseudo-spatiales et spectrales	5
1.3	Types d'équations aux dérivées partielles	6
1.3.1	Problème elliptique	6
1.3.2	Problème parabolique :	6
1.3.3	Problèmes hyperboliques	6
2	Méthodes de différences finies et volumes finis pour les problèmes elliptiques et paraboliques	8
2.1	Principe des deux méthodes	8
2.1.1	Cas de la dimension 1	8
2.1.2	Cas de la dimension 2 ou 3	10
2.1.3	Questions d'analyse numérique	12
2.2	Etude de la méthode différences finies pour un problème elliptique unidimensionnel	12
2.3	Schéma volumes finis pour un problème elliptique en une dimension d'espace	19
2.3.1	Origine du Schéma	19
2.3.2	Analyse mathématique du schéma.	21
2.3.3	Exemples de discrétisation par différences finies ou volumes finis des problèmes elliptiques en dimension 2.	26
2.3.4	Exemple d'implémentation de la méthode des volumes finis en dimension 2	27
2.4	Problèmes paraboliques.	31
2.4.1	Le problème continu, et le maillage problème $1D$	31
2.4.2	Discrétisation par Euler explicite en temps.	32
2.4.3	Schéma implicite et schéma de Crank-Nicolson	41
2.4.4	Cas de la Dimension 2	45
2.5	Exercices	45
2.6	Suggestions pour exercices	57
2.7	Corrigés des exercices	58
2.7.1	Corrigé de l'exercice 6 page 48	66
2.7.2	Corrigé de l'exercice 7 page 48	67
2.7.3	Corrigé de l'exercice 8 page 48	67

2.7.4	Corrigé de l'exercice 10 page 48	68
2.7.5	Corrigé de l'exercice 11 page 49	69
2.7.6	Corrigé de l'exercice 14 page 51	71
2.7.7	Corrigé de l'exercice 15 page 53	75
2.7.8	Corrigé de l'exercice 16 page 53	79
2.7.9	Corrigé de l'exercice 17 page 54	81
2.7.10	Corrigé de l'exercice 18 page 54	83
2.7.11	Corrigé de l'exercice 19 page 55	85
2.7.12	Corrigé de l'exercice 20 page 55	86
2.7.13	Corrigé de l'exercice 21 page 56	89
3	Méthodes variationnelles	93
3.1	Exemple de problèmes variationnels	93
3.1.1	Le problème de Dirichlet	93
3.1.2	Problème avec conditions aux limites de Fourier et Neuman	98
3.1.3	Formulation faible et formulation variationnelle.	101
3.1.4	Problème de Dirichlet non homogène	102
3.2	Méthodes de Ritz et Galerkin	104
3.2.1	Principe général de la méthode de Ritz	104
3.2.2	Méthode de Galerkin	109
3.2.3	Méthode de Petrov-Galerkin	111
3.3	La méthode des éléments finis	112
3.3.1	Principe de la méthode	112
3.3.2	Construction du maillage, de l'espace H_N et de sa base ϕ_N	115
3.3.3	Construction de H_N et cohérence globale	122
3.4	Exemples d'éléments finis de Lagrange	125
3.4.1	Élément fini de Lagrange $P1$ sur triangle ($d = 2$)	126
3.4.2	Élément fini triangulaire $P2$	127
3.4.3	Éléments finis sur quadrangles	129
3.5	Construction du système linéaire	130
3.5.1	Construction de H_N et Φ_i	132
3.5.2	Construction de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{G}$	133
3.5.3	Calcul de a_Ω et T_Ω , matrices élémentaires.	135
3.5.4	Calcul de a_{Γ_1} et T_{Γ_1} (contributions des arêtes de bord "Fourier".	138
3.5.5	Prise en compte des noeuds liés dans le second membre	140
3.5.6	Stockage de la matrice $\mathcal{K}$	140
3.6	Éléments finis isoparamétriques	141
3.7	Analyse de l'erreur	142
3.7.1	Erreur de discrétisation et erreur d'interpolation	142
3.7.2	Etude de l'erreur d'interpolation en dimension 1	142
3.8	Exercices	145
3.9	Suggestions pour les exercices	150
3.9.1	Exercice 22 page 145	150
3.9.2	Exercice 23 page 145	150
3.9.3	Exercice 27 page 146	150
3.9.4	Suggestions pour l'exercice 31 page 148	150
3.10	Corrigés des exercices	151

3.10.1	Corrigé de l'exercice 22 page 145	151
3.10.2	Corrigé de l'exercice 23 page 145	153
3.10.3	Corrigé de l'exercice 24 page 145	153
3.10.4	Corrigé de l'exercice 25 page 145	154
3.10.5	Corrigé de l'exercice 26 page 146	156
3.10.6	Corrigé de l'exercice 27 page 146	158
3.10.7	Corrigé de l'exercice 28 page 147	159
3.10.8	Correction de l'exercice 29 page 147	163
3.10.9	Correction de l'exercice 30 page 148	166
3.10.10	Corrigé de l'exercice 31 page 148	167
3.10.11	Corrigé de l'exercice 32 page 148	167
3.10.12	Corrigé de l'exercice 33 page 149	170
3.10.13	Corrigé de l'exercice 35 page 149	170
3.10.14	Corrigé de l'exercice 36 page 149	171
4	Problèmes hyperboliques	175
4.1	Exemple	175
4.2	Equation hyperbolique linéaire en une dimension d'espace	176
4.3	Equations hyperboliques non linéaires	180
4.4	Schémas numériques pour $u_t + u_x = 0$	184
4.4.1	Schéma explicite différences finies centrées	185
4.4.2	Schéma différences finies décentré amont	186
4.4.3	Schéma volumes finis décentrés amont	188
4.5	Schémas pour les équations non linéaires	189
4.6	Exercices	191
4.7	Corrigés des exercices	198
4.7.1	Corrigé de l'exercice 37 page 191	198
4.7.2	Corrigé de l'exercice 38 page 191	200
4.7.3	Corrigé de l'exercice 39 page 191	201
4.7.4	Corrigé de l'exercice 40 page 192	201
4.7.5	Corrigé de l'exercice 42 page 193	204
4.7.6	Corrigé de l'exercice 43 page 194	206
4.7.7	Corrigé de l'exercice 44 page 195	208
Bibliography		