Université de Provence 2009–2010

Mathématiques Générales 1

CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ n°4

Exercice 1 1. Une suite $(u_n)_n$ de nombres complexes est convergente si et seulement si

$$\exists l \in \mathbb{C}, \qquad \forall \varepsilon > 0, \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geq N, \qquad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Supposons qu'une suite $(u_n)_n$ soit convergente vers ℓ et ℓ' avec $\ell \neq \ell'$. Posons $\varepsilon = \frac{|\ell-\ell'|}{3}$. On a $\varepsilon > 0$.
Il existe donc $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$, on ait $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_2$, on ait $|u_n - \ell'| \leq \varepsilon$.
En particulier, si $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a alors :

$$\begin{aligned} |\ell - \ell'| &= |\ell - u_n + u_n - \ell'| \leq |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| \leq \varepsilon + \varepsilon \\ |\ell - \ell'| &\leq 2\frac{|\ell - \ell'|}{3} < |\ell - \ell'|. \end{aligned}$$

Ceci est absurde, donc la limite d'une suite convergente est unique.

2. Deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ de nombres réels sont adjacentes si : $(u_n)_n$ est croissante, $(v_n)_n$ est décroissante, $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la limite de $(v_n - u_n)_n$ quand $n \to +\infty$ est nulle. Dans ce cas, les deux suites convergent, et elles ont même limite.

Exercice 2 1. $u_1 = \frac{u_0+v_0}{2} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$, $v_1 = \frac{u_1+v_0}{2} = \frac{1}{2}\frac{72+4}{2} = \frac{15}{4}$,
$u_2 = \frac{u_1+v_1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2} + \frac{15}{4}\right) = \frac{29}{8}$, $v_2 = \frac{u_2+v_1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{29}{8} + \frac{15}{4}\right) = \frac{59}{16}$.

2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, nous avons $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1}+v_n}{2} - \frac{u_n+v_n}{2} = \frac{u_{n+1}-u_n}{2} = \frac{v_n-u_n}{4} = \frac{w_n}{4}$, ce qui prouve bien que la suite $(w_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{w_0}{4^n} = \frac{v_0-u_0}{4^n} = \frac{1}{4^n}$.

3. D'après la question précedente, $u_n > v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela implique $u_n < u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} < v_n$, dont on déduit $u_{n+1} < v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} < v_n$.
On a donc prouvé que la suite $(u_n)_n$ est croissante, la suite $(v_n)_n$ est décroissante, que la suite $(v_n - u_n)$ est positive et tend vers 0. Les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont donc adjacentes. Elles sont donc convergentes et ont même limite.

4. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = \frac{u_{n+1}+2v_{n+1}}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{u_n+v_n}{2} + u_{n+1} + v_n\right) = \frac{1}{6}(u_n + 3v_n + u_n + v_n) = t_n$.
   La suite $(t_n)_n$ est constante.
   (b) Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = t_0 = \frac{u_0+2v_0}{3} = \frac{3+2\times 4}{3} = \frac{11}{3}$. Si ℓ est la limite commune de $(u_n)_n$ et (v_n), alors comme $t_n = \frac{u_n+2v_n}{3}$ la suite (t_n) converge donc vers $\frac{\ell+2\ell}{3} = \ell$. On en déduit que $\ell = \frac{11}{3}$.

Exercice 3 1. (a) La fonction f est continue et dérivable sur l'intervalle $]0,1[$.

Pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0$.

On en déduit que f est strictement croissante sur $]0,1[$.

De plus, $\lim_0 f = 0 - \ln(1+0) = 0$ et $\lim_1 f = 1 - \ln(1+1) = 1 - \ln 2$.

La fonction g est continue et dérivable sur l'intervalle $]0,1[$.

Pour tout $x \in]0,1[$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = -\frac{x}{1-x} < 0$.

On en déduit que g est strictement décroissante sur $]0,1[$.

De plus, $\lim_0 g = 0 + \ln(1-0) = 0$ et $\lim_1 g = 1 + \lim_{x\to 1} \ln(1-x) = -\infty$.

(b) La fonction f est strictement positive sur $]0,1[$; la fonction g est strictement négative sur $]0,1[$. La double inégalité en découle.

(c) On peut réécrire $u_n = \displaystyle\sum_{i=n}^{(k+1)n} \frac{1}{i}$ pour $n \geq 1$. On utilise maintenant les inégalités de la question précédente pour $x = \frac{1}{i}$ qui est bien dans l'intervalle $]0,1[$ quand $i \geq 2$. On obtient

$$\ln(i+1) - \ln i = \ln\left(1 + \frac{1}{i}\right) < \frac{1}{i} < -\ln\left(1 - \frac{1}{i}\right) = \ln i - \ln(i-1)$$

On prend ensuite la somme, pour i variant de n à $n(k+1)$ de ces inégalités et on obtient :

$$\sum_{i=n}^{(k+1)n} \ln(i+1) - \ln i < \sum_{i=n}^{(k+1)n} \frac{1}{i} < \sum_{i=n}^{(k+1)n} \ln i - \ln(i-1)$$

Les sommes de gauche et de droite sont des sommes télescopiques. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=n}^{(k+1)n} \ln(i+1) - \ln i &= \ln(n+kn+1) - \ln n = \ln\left(1 + k + \frac{1}{n}\right) \\
\sum_{i=n}^{(k+1)n} \ln i - \ln(i-1) &= \ln(n+kn) - \ln(n-1) = \ln\left(1 + k + \frac{k+1}{n-1}\right)
\end{aligned}$$

Ce qui donne l'inégalité demandée.

(d) Les deux suites qui encadrent $(u_n)_n$ dans la question précédente convergent toutes les deux vers $\ln(k+1)$, car $\lim_{+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{+\infty} \frac{k+1}{n-1} = 0$ et car la fonction ln est continue. D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(k+1)$$

2. (a) Si $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$,

et $\ln(n+1) - \ln n = -(\ln n - \ln(n+1)) = -\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) > \frac{1}{n+1}$.

(b) Si $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1) \qquad \text{et}$$

$$u_{n+1} - 1 = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1).$$

(c) La suite $(\ln(n+1))_n$ tend vers $+\infty$. Le résultat en découle.

(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et grâce à l'inégalité $u_n \leq 1 + \ln n$ qui découle de la question précédente, nous avons $v_n = u_n - \ln n \leq 1$ et $v_n = u_n - \ln n \geq \ln(n+1) - \ln n \geq 0$. La suite est donc bornée.

De plus, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \ln n - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) \leq 0$. La suite $(v_n)_n$ est donc décroissante, bornée, donc convergente.

Exercice 4 1. La fonction cos est continue, strictement positive sur $-]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, tend vers 0 en $\pm\frac{\pi}{2}$, est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, 0]$, strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, est paire et vaut 1 en 0. Elle est de plus dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

On en déduit que la fonction $\ln\cos$ est continue et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ comme composée de fonctions continues et dérivables, paire, strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, 0]$, strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, vaut 0 en 0. De plus, $\lim_{\pm\frac{\pi}{2}} \ln\cos = -\infty$.

Enfin, la dérivée de $\ln\cos$ est $-\frac{\sin}{\cos} = \tan$.

2. D'après la question précedente, $\ln\cos$ est une primitive de tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On en déduit que les solution de l'équation homogène associée $y' - y\tan x = 0$ sont de la forme $\lambda e^{\ln\cos x} = \lambda\cos x$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cherchons maintenant une solution particulière y_p de l'équation non-homogène par la méthode de la variation de la constante. On pose $y_p(x) = \alpha(x)\cos x$ (c'est possible car cos ne s'annule jamais sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$) . Si y_p est solution, alors

$$\begin{aligned} y_p'(x) - y_p(x)\tan x &= \alpha'(x)\cos x - \alpha(x)\sin x + \alpha(x)\cos x\tan x = \alpha'(x)\cos x \\ \text{et donc} \quad & \alpha'(x)\cos x = \cos^2 x \end{aligned}$$

On simplifie par $\cos x$ toujours strictement positif et on en déduit que $\alpha(x) = \sin x$ convient. Une solution particulière est donc $y_p(x) = \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$. La forme générale des solutions est alors

$$y(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \lambda\cos x\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice 5 1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont même norme car les modules de $\frac{b-a}{c-a}$ valent 1. Ils forment un angle de $\pm\frac{\pi}{3}$ car $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit que le triangle ABC est isocèle en A, et que l'angle $\widehat{BAC}$ vaut $\pm\frac{\pi}{3}$. Le triangle ABC est donc équilatéral.

2. Si $a = c$, le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a = b = c$. Ceci implique $a^2+b^2+c^2 = ab+ac+bc$. Réciproquement, si $a = c$ et $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$, alors $2a^2 + b^2 = 2ab + a^2$, ce qui implique que $a^2 + b^2 = 2ab$, soit encore $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 = 0$, donc $a = b = c$.

Si $a \neq c$, le triangle ABC est équilatéral si et seulement $\frac{b-a}{c-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{b-a}{c-a} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Ceci est équivalent à

$$(b-a) - e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a) = 0 \quad \text{ou} \quad (b-a) - e^{-i\frac{\pi}{3}}(c-a) = 0,$$

soit encore à

$$[(b-a) - e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a)][(b-a) - e^{-i\frac{\pi}{3}}(c-a)] = 0,$$

ce qui s'écrit

$$\begin{aligned} &(b-a)^2 - 2\cos\frac{\pi}{3}(b-a)(c-a) + (c-a)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (b-a)^2 - (b-a)(c-a) + (c-a)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & b^2 + a^2 - 2ab - bc + ab + ac - a^2 + c^2 + a^2 - 2ac = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0. \end{aligned}$$