Université de Provence 2011–2012

Mathématiques Générales I

PLANCHE 2 - FONCTIONS USUELLES

Fonctions trigonométriques.

Exercice 1. Résoudre les équations $\cos\left(2x - \frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ et $\tan 3x = \tan x$

Exercice 2. Montrer, pour certaines valeurs de x qui seront précisées, que

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Exercice 3. 1. En utilisant le produit scalaire dans le plan euclidien, montrez que

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

En déduire $\cos(x + y)$ en fonction de $\cos x$, $\cos y$, $\sin x$ et $\sin y$.

2. Calculer $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$ en fonction de $\sin x$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$ en fonction de $\cos x$. En déduire l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels on a $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan x}$.

3. Calculer $\sin(x - y)$ et $\sin(x + y)$ en fonction de $\cos x$, $\cos y$, $\sin x$ et $\sin y$.

4. Calculer $\tan(x + y)$ et $\tan(x - y)$ en fonction de $\tan x$ et $\tan y$. Préciser les valeurs de x et y qui conviennent.

5. Pour tout réel x, établir trois expressions de $\cos 2x$. En déduire des formules de linéarisation de $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$. En précisant les valeurs de x qui conviennent, établir les expressions de $\sin 2x$ et $\tan 2x$.

6. Montrer que, pour des valeurs de x que l'on précisera, si $t = \tan \frac{x}{2}$,

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \qquad \tan x = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

7. Simplifier $\cos(\pi - x)$, $\sin(\pi - x)$ et $\tan(\pi - x)$ (pour la dernière expressions, préciser les valeurs de x). De même pour $\cos(\pi + x)$, $\sin(\pi + x)$ et $\tan(\pi + x)$.

8. Montrer les formules

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}, \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2},$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}, \qquad \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

Exercice 4. Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Dans le plan complexe, soit M le point d'affixe e^{ix}. On note A le point d'affixe 1, B le projeté orthogonal de M sur l'axe des x et C le point d'intersection de la droite (OM) avec la droite d'équation $x = 1$. En comparant l'aire du triangle OBM, l'aire de la portion de disque OAM et l'aire du triangle OAC, montrez que

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

En déduire la limite quand x tend vers 0 de $\dfrac{\sin x}{x}$.

Montrer que les fonctions sin, cos et tan sont dérivables et calculer les dérivées.

Tracer leur graphe.

Fonctions trigonométriques réciproques.

Exercice 5. Rappeler les définitions de arcsin : $[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, arccos : $[-1,1] \to [0,\pi]$ et arctan : $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Résoudre les équations $\cos x = a$, $\sin x = a$ et $\tan x = a$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Etudier la dérivabilité des fonctions précédentes et calculer les dérivées.

Exercice 7. Exprimer différemment $\arctan a + \arctan b$

Fonction ln et fonction exp.

Exercice 8. En étudiant deux fonctions, montrez l'inégalité suivante, due à Neper :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{x-1}{x} < \ln x < x - 1$$

Exercice 9. 1. Soit $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 10^x \in \mathbb{R}$. En écrivant que $f(x) = \exp(x \ln 10)$, expliciter f^{-1} que l'on note log.

2. Si n est un entier naturel et $C(n)$ désigne le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n, exprimer $C(n)$ en fonction de $\log n$.

3. Application numérique : calculer le nombre de chiffres des nombres suivants :

$$9^{(9^9)}, \qquad 2^{106}(2^{107} - 1).$$

Exercice 10. Montrez que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

(faire une récurrence et intégrer).

Montrez que

$$\forall \alpha > 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty.$$

En déduire que

$$\forall \alpha > 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x \to 0+} x^\alpha \ln x = 0.$$

Fonctions hyperboliques.

Exercice 11. On définit les fonctions ch , sh et th (appelées fonctions hyperboliques) par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}\ t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \mathrm{sh}\ t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \qquad \mathrm{th}\ t = \frac{\mathrm{sh}\ t}{\mathrm{ch}\ t}.$$

Etudiez les fonctions ch , sh et th et tracer leur courbe représentative dans un repère orthonormé. Montrez que ces fonctions sont dérivables et calculez les dérivées.

Montrez que, pour tout réel x, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

Montrez des formules analogues aux formules prouvées dans l'exercice 5.

Définir des fonctions réciproques (notées arg ch, arg sh et arg th). On pourra les expliciter.

Calculer les dérivées de ces fonctions réciproques.

Fonction exponentielle complexe.

Exercice 12. On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Déduire de la formule $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ les formules de duplication pour cos et sin obtenues dans l'exercice 5.

Exercice 13. Soient $A, B \in \mathbb{R}$. Montrez qu'il existe $r \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad A\cos x + B\sin x = r\cos(x - \varphi).$$

Exercice 14. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, simplifier

$$1 + \cos x + \cdots + \cos nx, \qquad \sin x + \cdots + \sin nx.$$

Plus difficile...

Exercice 15. Etude et représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \arctan \sqrt{\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}}$.

Exercice 16. Etude et représentation graphique de la fonction $f\colon x \longmapsto \arccos(4x^3 - 3x)$.

Exercice 17. Montrer:

$$\forall x \in]0,1],\ \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x \in]0,1],\ 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}} + \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 18. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\arccos(x) = \arcsin(2x)$$

Exercice 19. Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th} 2x} - \frac{1}{\operatorname{th} x}.$$

En déduire pour $n \in \mathbb{N}$ la valeur de :

$$\sum_{k=0}^{k=n} 2^k \operatorname{th}(2^k x).$$

Exercice 20. Pour $(n;x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$ montrer que:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{k=n} \operatorname{ch}(\frac{x}{2^k}) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{2^n \operatorname{sh}(\frac{x}{2^n})}.$$

Montrer que:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sh}(t)}{t} = 1.$$

En déduire la limite de $P_n(x)$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.