

CHAPITRE I

LA DISTRIBUTION CANONIQUE ET LES RELEVEMENTS CONTINUS CONTROLES DE CHAMPS DE VECTEURS

RESUME. Dans ce chapitre nous considérons le problème de l'extension continue et contrôlée d'un champ de vecteurs sur un espace stratifié (A, Σ) plongé dans $\mathbb{R}^n$.

Nous reprenons la preuve du théorème de Shiota (1984) pour une stratification (b) -régulière [Sh] et l'adaptions au cas de stratifications (a) et (c) -régulières. La condition (b) de Whitney entraînant la (c) -régularité de Bekka [Be]₁, notre théorème de relèvement continu contrôlé de champs de vecteurs sur des stratifications (c) -régulières, généralise celui de Shiota. On compare ce théorème avec les autres résultats connus sur le relèvement continu [Be]_{1,2,3}, [Du]_{1,2}, [Pa], [Sc], [Sh], [Ve].

Pour toute strate $X \in \Sigma$, on introduit un fibré vectoriel stratifié $\mathcal{D}_X : T_X \rightarrow \mathbb{G}_n^{\dim X}$ par lequel le théorème de relèvement acquiert une formulation naturelle. L'analogue de ce théorème est donné également pour les stratifications (w) -régulières et lipschitziennes.

§1. Introduction. Un champ de vecteurs sur une stratification Σ d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$, contrôlé par rapport à un système de données de contrôle, définit un flot qui est toujours continu grâce aux hypothèses de contrôle [Ma], mais en général non différentiable [Gi] (exemple de la famille des quatre droites). La condition de contrôle n'implique pas (en général) la continuité du champ [Ma].

Le problème de l'extension contrôlée d'un champ de vecteurs est classique et a été longuement étudié et bien compris dans le contexte des stratifications (b) -régulières : [Ma] et [Gi] sont les références principales.

D'autre part, le problème de l'extension continue a été considéré par Verdier [Ve] pour des stratifications (w) -régulières et plus récemment par Mme Schwartz [Sc] pour des stratifications (a) -régulières. Dans ces deux cas, les auteurs n'avaient pas besoin d'obtenir des relèvements contrôlés et donc il leur suffit de projeter orthogonalement sur l'espace tangent à la strate, un relèvement continu convenablement choisi.

Plus précisément, l'extension définie par Mme Schwartz est obtenue (avant de projeter) par “transport parallèle le long des fibres d’une rétraction” et dans le cas de Verdier un tel champ obtenu par projection orthogonale permettait d’obtenir un relèvement rugueux.

Dans les grandes lignes, notre champ de vecteurs relevé s’obtient en faisant (un changement du module de) la projection orthogonale du champ à relever sur les hypersurfaces de niveaux d’une fonction distance (§4). C’est l’idée essentielle commune aux démonstrations des théorèmes de M. Shiota et K. Bekka.

En fait, le cas d’un relèvement continu et en même temps contrôlé a été considéré par M. Shiota [Sh] (1984) encore dans le contexte des stratifications (b)-régulières et plus récemment par K. Bekka qui, pour des stratifications (c)-régulières [Be]₃, donne une extension contrôlée par rapport à une famille d’applications tapissantes. Soulignons aussi qu’un théorème de relèvement continu a été démontré par A. du Plessis [Du]_{1,2}, [DW] en 1988 et a été communiqué à D. Trotman alors qu’il dirigeait la thèse de K. Bekka.

Dans ce chapitre nous nous inspirons surtout des idées de Shiota pour les généraliser au cas (a) et (c)-régulier. Notre but est d’utiliser ces résultats pour étudier l’amélioration de la régularité des flots associés dans le chapitre II et pour en déduire d’autres théorèmes dans les chapitres suivants.

Dans le paragraphe §2, nous étudions le cas d’une stratification (a)-régulière de A en donnant une caractérisation en termes de distribution continue, qui est le point clef pour définir un relèvement aux strates supérieures d’un champ donné sur une strate X fixée.

Dans le §3 nous démontrons le théorème de relèvement continu d’un champ de vecteurs. Le champ construit vérifie la condition de contrôle par rapport à une famille de projections compatibles entre elles. On remarque, de plus, qu’en ajoutant une strate de la forme $T_X - A$, on peut toujours prolonger l’extension sur un voisinage tubulaire ouvert T_X de X dans $\mathbb{R}^n$, et que dans le cas où le champ est donné sur toutes les strates de profondeur maximale, on peut en déduire une extension globale sur la stratification A toute entière.

Dans le §4, nous considérons le cas où A est (c)-régulière. K. Bekka a démontré [Be]₂ que sur une telle stratification il est toujours possible de construire un système de données de contrôle $\mathcal{F} = \{(\pi_X, \rho_X)\}_{X \in \Sigma}$. Nous utilisons ce théorème important pour déduire des propositions analogues à celles du §2, lesquelles, grâce à une petite modification dans la définition du relèvement, nous donnent une propriété plus forte : le champ obtenu est contrôlé par rapport aux projections $\{\pi_X\}_X$ et aux fonctions distance $\{\rho_X\}_X$.

Enfin, dans le §5, nous amalgamons les résultats des paragraphes précédents et définissons, pour toute strate $X \in \Sigma$, une distribution stratifiée canonique $\mathcal{D}_X : T_X \rightarrow \mathbb{G}_n^{dim X}$ globalement définie dans un voisinage tubulaire stratifié $T_X = \cup_{Y \geq X} T_{XY}$ de X dans A qui étend l’application de Gauss $\mathcal{D}_X : X \rightarrow \mathbb{G}_n^{dim X}$ ($\mathcal{D}_X(x) = T_x X$) et par laquelle le relèvement de chaque champ de vecteurs ξ_X défini sur X acquiert une expression particulièrement simple et convenable. L’analogie de ce résultat est également montré dans le contexte des stratifications rugueuses et lipschitziennes.

§2. La distribution canonique locale et le théorème de relèvement continu. Caractérisation de la (a)-régularité en termes de distribution continue.

Soient $X < Y$ deux sous-variétés lisses (c.à.d. au moins de classe C^2) de $\mathbb{R}^n$, $l = \dim X$, $k = \dim Y$. L’étude étant locale sur X , nous supposons de plus que $X = \mathbb{R}^l \times 0^{n-l}$

et notons $E_1, \dots, E_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $p_{\mathbb{R}^l} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l \times 0$ la projection canonique sur $\mathbb{R}^l \times 0$.

Soit $\mathbb{V}_l^n = \{(v_1, \dots, v_l) \in \mathbb{R}^{nl} \mid v_1, \dots, v_l \text{ indépendants dans } \mathbb{R}^n\}$ la variété de Stiefel des l -repères de $\mathbb{R}^n$ et $q : \mathbb{V}_l^n \rightarrow \mathbb{G}_l^n$ la projection canonique de $\mathbb{V}_l^n$ sur la grassmannienne $\mathbb{G}_l^n$.

THEOREME. *Si (X, Y) est (a) -régulier, il existe un ensemble ouvert $W \subseteq Y$, une distribution $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{XY} : W \rightarrow \mathbb{G}_l^n$ et un relèvement $\tilde{\mathcal{D}}_{XY} : W \rightarrow \mathbb{V}_l^n$ de $\mathcal{D}_{XY}$ dans la variété des l -repères de $\mathbb{R}^n$ faisant commuter le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{V}_l^n \\ & \nearrow \tilde{\mathcal{D}} & \downarrow q \\ W & \xrightarrow{\mathcal{D}} & \mathbb{G}_l^n \end{array}$$

et tels que:

- i) $X \cup W$ est un voisinage de X dans $X \cup Y$ (et $X \subseteq \overline{W}$),
- ii) $\mathcal{D}_{XY}$ et $\tilde{\mathcal{D}}_{XY}$ sont prolongeables par continuité sur $X \cup W$ avec

$$\forall x \in X : \begin{cases} \mathcal{D}_{XY}(x) = T_x X = [E_1, \dots, E_l] \\ \tilde{\mathcal{D}}_{XY}(x) = (E_1, \dots, E_l) \end{cases}$$

- iii) en posant $\tilde{\mathcal{D}}_{XY}(y) = (v_1(y), \dots, v_l(y))$ on a $pr_{\mathbb{R}^l}(v_i(y)) = E_i, \quad \forall i \leq l$.

Preuve. Comme (X, Y) est (a) -régulier il existe un sous-ensemble ouvert $W \subseteq Y$ tel que la restriction $p_{\mathbb{R}^l|W} : W \rightarrow \mathbb{R}^l \times 0$ soit une submersion et qui vérifie la condition i).

Notons $T_{XY} = W$ et $\pi_{XY} = p_{\mathbb{R}^l|W}$ selon la terminologie générale des stratifications.

Soit $\mathcal{D}_{XY}$ la distribution de dimension l définie pour tout $y \in T_{XY}$ par le sous-espace orthogonal à $\ker \pi_{XY*y}$ dans $T_y Y$,

$$\mathcal{D}_{XY} : T_{XY} \rightarrow \mathbb{G}_l^n, \quad \mathcal{D}_{XY}(y) = \perp (\ker \pi_{XY*y}, T_y Y).$$

Comme pour tout $y \in Y$ la restriction $\pi_{XY*y}| : \mathcal{D}_{XY}(y) \rightarrow \mathbb{R}^l \times 0$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, tout vecteur E_i de la base canonique de $\mathbb{R}^l \times 0$ se relève en un unique vecteur $v_i(y) = (\pi_{XY*y})^{-1}(E_i)$ dans $\mathcal{D}_{XY}(y)$, i.e. nous définissons

$$v_i(y) = \perp (\ker \pi_{XY*y}, T_y Y) \cap p_{\mathbb{R}^l}^{-1}(E_i).$$

Alors iii) est vérifiée et les vecteurs relevés $v_1(y), \dots, v_l(y)$ forment un l -repère parce que leurs projections $E_1, \dots, E_l$ sont indépendantes.

Alors l' application $\tilde{\mathcal{D}}_{XY}$ définie par

$$\tilde{\mathcal{D}}_{XY} : T_{XY} \rightarrow \mathbb{V}_l^n, \quad \tilde{\mathcal{D}}_{XY}(y) = (v_1(y), \dots, v_l(y))$$

vérifie $\mathcal{D}_{XY} = q\tilde{\mathcal{D}}_{XY}$.

Afin de démontrer le prolongement par continuité de $\mathcal{D}_{XY}$ et de $\tilde{\mathcal{D}}_{XY}$ sur X , notons pour tout $y \in T_{XY}$, $T_y Y$ par τ_y et par $p_{\tau_y} : \mathbb{R}^n \rightarrow \tau_y$ la projection orthogonale sur $T_y Y$.

LEMME. Pour tout $y \in T_{XY}$, on a : $\mathcal{D}_{XY}(y) = p_{\tau_y}(\mathbb{R}^l \times 0)$.

Preuve. Pour tout sous-espace $V \subseteq \mathbb{R}^n$, notons $V^\perp$ l'orthogonal à V dans $\mathbb{R}^n$. On voit facilement que

$$\mathcal{D}_{XY}(y) = {}^\perp (\ker p_{\mathbb{R}^l|_{\tau_y}}, \tau_y) = \tau_y \cap (0 \times \mathbb{R}^{n-l} \cap \tau_y)^\perp = \tau_y \cap (\mathbb{R}^l \times 0 + \tau_y^\perp).$$

Alors tout vecteur $w \in {}^\perp (\ker p_{\mathbb{R}^l|_{\tau_y}}, \tau_y)$ est de la forme $w = v + v'$ avec $v \in \mathbb{R}^l \times 0$ et $v' \in \tau_y^\perp$, d'où

$$p_{\tau_y}(v) = p_{\tau_y}(w - v') = p_{\tau_y}(w) - p_{\tau_y}(v') = w + 0 = w$$

et donc $w \in p_{\tau_y}(\mathbb{R}^l \times 0)$.

D'autre part, tout vecteur $u \in p_{\tau_y}(\mathbb{R}^l \times 0)$ est de la forme $u = p_{\tau_y}(v)$ avec $v \in \mathbb{R}^l \times 0$ et si $u' \in \tau_y^\perp$ est la projection (orthogonale) de v sur $\tau_y^\perp$ on a $v = u + u'$ où $u = v - u'$ c.à.d. $u \in \tau_y \cap (\mathbb{R}^l \times 0 + \tau_y^\perp)$. $\square$

Suite de la preuve du théorème : "continuité". A présent les conditions

$$\begin{cases} \lim_{y \rightarrow x} \tau_y \supseteq \mathbb{R}^l \times 0 \\ \lim_{y \rightarrow x} p_{\tau_y}(\mathbb{R}^l \times 0) = \mathbb{R}^l \times 0 \end{cases}$$

sont précisément la (a)-régularité de $X < Y$ et une conséquence immédiate de cette dernière. On en déduit immédiatement:

$$\begin{cases} \lim_{y \rightarrow x} \mathcal{D}_{XY}(y) = \lim_{y \rightarrow x} p_{\tau_y}(\mathbb{R}^l \times 0) = \mathbb{R}^l \times 0 \\ \lim_{y \rightarrow x} v_i(y) = \lim_{y \rightarrow x} p_{\tau_y}(\mathbb{R}^l \times 0) \cap p_{\mathbb{R}^l}^{-1}(E_i) = E_i, \end{cases}$$

qui sont exactement les conditions de continuité à démontrer. $\square$

DEFINITION. La distribution $\mathcal{D}_{XY}$ de sous-espaces de dimension $l = \dim X$ de TY définie au théorème 1 sera appelée la *distribution canonique locale induite par X sur Y* .

Le lemme 1 montre que le sous-espace $\mathcal{D}_{XY}(y)$ est le sous-espace de $T_y Y$ à distance minimale de $T_x X$ où $x = \pi_{XY}(y)$.

Quand nous ne sommes plus dans une analyse locale i.e. où $X = \mathbb{R}^l \times 0$ et $\pi_{XY} = p_{\mathbb{R}^l|_Y}$, il sera entendu (voir aussi le §5) que $\mathcal{D}_{XY}(y) = p_{\tau_y}(T_x X)$, où $\tau_y = T_y Y$ et $x = \pi_{XY}(y)$. Aussi pour les problèmes qui nous intéressent, il ne sera pas restrictif d'identifier le voisinage W (domaine de $\mathcal{D}_{XY}$) avec Y .

REMARQUE 1. Comme l'ont remarqué Thom, Feldman et Whitney (en 1964-65), la (a)-régularité d'un couple de strates $X < Y$ en un point $x \in X$, implique la (t)-régularité en x . Cette notion introduite par R. Thom en 1964 signifie que la transversalité à X en x d'une variété S entraîne aussi la transversalité de S à la strate supérieure Y dans un voisinage de x .

Nous soulignons juste que la distribution canonique $\mathcal{D}_{XY}$ donne précisément le sous-fibré $\cup_{y \in Y} \{y\} \times \mathcal{D}_{XY}(y)$ de TY qui permet de préserver une telle transversalité en passant de X à Y .

D'autre part, la (a) -régularité de $X < Y$, plus forte que la (t) -régularité, caractérise en fait la stabilité de la transversalité à $X \cup Y$ [Tr]₃, i.e. que pour toutes variétés N et M avec $X \cup Y \subseteq M$, l'ensemble $\{f \in C^1(N, M) \mid f \text{ est transverse à } X \cup Y\}$ est ouvert dans $C^1(N, M)$ avec la C^1 -topologie forte.

REMARQUE 2. Dans [Tr]₁, D. Trotman démontre qu'il y a une version géométrique de la (a) -régularité d'un couple $X < Y$: celle-ci équivaut à demander que dans toute carte C^1 , la projection π_{XY} soit une submersion. Nous précisons simplement que le sous-espace relevé canonique $\mathcal{D}_{XY}(y)$ comporte une telle submersivité et qu'en particulier on a : " $\pi_{XY*|y|} : \mathcal{D}_{XY}(y) \rightarrow T_x X$ est un isomorphisme".

§3. Le théorème de relèvement continu.

Dans ce paragraphe nous considérons le problème de l'extension d'un champ de vecteurs, donné sur une certaine strate X , aux strates supérieures adjacentes.

Notre théorème s'inspire principalement de celui de M. Shiota [Sh] (Lemme 4.11.) où l'on construit un voisinage tubulaire U de X , permettant d'obtenir un relèvement continu et contrôlé et qui est réunion de voisinages de points de X . Nous relèverons le champ local dans les sous-espaces de la distribution canonique locale afin d'obtenir la continuité du champ relevé, à la différence des arguments de [Ma] et [Gi].

La (a) -régularité de Whitney est une condition (évidemment) nécessaire pour qu'un relèvement continu de tout champ de vecteurs soit possible. Nous montrons alors, en affaiblissant les hypothèses de [Sh], que la (a) -régularité est également une condition suffisante pour avoir une extension continue et contrôlée (par rapport à une famille de projections compatibles).

Remarquons qu'un théorème de relèvement continu sous l'hypothèse de (a) -régularité a été démontré récemment par M.H. Schwartz [Sc] mais ceci sans considérer aucune condition de contrôle.

THEOREME. Soit (A, Σ) une stratification (a) -régulière de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ et X une strate de Σ . Soit en outre $\{\pi_Y : T_Y \rightarrow Y\}_{Y \geq X}$ (où les T_Y sont ouverts dans $\mathbb{R}^n$) une famille de voisinages tubulaires compatibles, i.e. :

$$\pi_{YZ}\pi_{ZZ'} = \pi_{YZ'} \quad , \quad \text{pour tout } X \leq Y < Z < Z'.$$

Alors pour tout champ de vecteurs ξ_X sur X , on peut construire un voisinage U de X (dans $\mathbb{R}^n$) et un champ de vecteurs stratifié $\xi_U = \{\xi_{U \cap Y}\}_{Y \geq X}$ sur $A \cap U$ qui est une extension continue de ξ_X et contrôlée par rapport à $\{\pi_Y\}_Y$, i.e. : $\forall X < Y < Z$

$$\begin{cases} \pi_{X*y}(\xi_{U \cap Y}(y)) = \xi_X(\pi_X(y)) & \text{dans un voisinage } T_{XY} \text{ de } X \text{ dans } Y \\ \pi_{Y*z}(\xi_{U \cap Z}(z)) = \xi_{U \cap Y}(\pi_Y(z)) & \text{dans un voisinage } T_{YZ} \text{ de } Y \text{ dans } Z. \end{cases}$$

Preuve. Observons qu'un voisinage U de X dans $\mathbb{R}^n$ n'intersecte pas nécessairement les strates du bord de X , et donc l'extension ne concerne que les strates $Y \geq X$.

Soit $l = \dim X$.

Etape 1 : relèvement sur une strate adjacente quelconque. Pour tout $x \in X$, considérons une carte (locale) $\varphi_x : (U_x, U_x \cap X) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l \times 0)$, définie sur un voisinage ouvert

U_x de x dans $\mathbb{R}^n$, qui plonge localement $X \cap U_x$ comme $\mathbb{R}^l \times 0$ dans $\mathbb{R}^n$, en transformant π_X en la projection canonique $p_{\mathbb{R}^l}$, i.e. telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} U_x & \xrightarrow{\pi_X} & \pi_X(U_x) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi_{\downarrow} \\ \mathbb{R}_0^n & \xrightarrow{p_{\mathbb{R}^l}} & \mathbb{R}^l \times 0. \end{array}$$

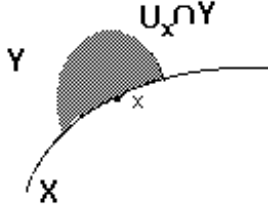


figure 1

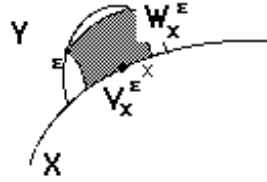


figure 2 (Remarque 4 au théorème)

Soit $U = \bigcup_{x \in X} U_x$, et fixons une strate Y de Σ , $Y \geq X$. Afin de définir $\xi_{U \cap Y}$ sur $U \cap Y = \bigcup_x (U_x \cap Y)$, nous allons définir des relèvements locaux $\xi_{U_x \cap Y}$ sur $U_x \cap Y$ qui se recolleront convenablement entre eux ainsi qu'avec ξ_X .

Notons par $\xi_{\mathbb{R}^l} = \xi_{\varphi(U_x \cap X)}$ le champ $\varphi_*(\xi_{U_x \cap X})$ et par

$$\xi_{\mathbb{R}^l}(y') = \xi_{\varphi(U_x \cap X)}(y') = \sum_{i=1}^l b_i(y') E_i \quad \text{où} \quad y' = (y_1, \dots, y_l, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^l \times 0.$$

Alors, en substituant les vecteurs de la base canonique $\{E_i\}_i$ de $\mathbb{R}^l \times 0$ par ceux de la base correspondante relevée $\{v_i(y)\}_i$ (base de $\mathcal{D}_{XY}(y)$), on trouve un champ relevé sur $\varphi(U_x \cap Y)$,

$$\xi_{\varphi(U_x \cap Y)}(y) = \sum_{i=1}^l b_i(y') v_i(y) \quad \text{où} \quad y = (y_1, \dots, y_l, y_{l+1}, \dots, y_n) \in \varphi(U_x \cap Y) \subseteq \mathbb{R}^n,$$

et prolongeable en un champ continu $\xi_{\varphi(U_x \cap \overline{Y})}$ qui est de plus contrôlé par rapport à $p_{\mathbb{R}^l}$ (condition i) du théorème précédent).

Comme la même propriété se préserve par la préimage de la différentielle φ_* , on trouve le champ image réciproque sur $U_x \cap \overline{Y}$,

$$\xi_{U_x \cap \overline{Y}} = \begin{cases} \varphi_*^{-1}(\xi_{\varphi(U_x \cap Y)}) = (\text{noté}) =: \xi_{U_x \cap Y} & \text{sur } U_x \cap Y \\ \xi_{U_x \cap X} & \text{sur } U_x \cap X \end{cases}$$

qui est un relèvement (local) continu et contrôlé de $\xi_{U_x \cap X}$.

En utilisant une partition de l'unité lisse $\{\lambda_x : U_x \cap Y \rightarrow [0, 1]\}_{x \in X}$ subordonnée au recouvrement $\{U_x \cap Y\}_{x \in X}$ de $U \cap Y$, on peut définir un champ global

$$\xi_{U \cap \overline{Y}}(y) = \begin{cases} \sum_x \lambda_x(y) \xi_{U_x \cap Y}(y) & \text{si } y \in \bigcup_x U_x \cap Y = U \cap Y, \\ \xi_X(y) & \text{si } y \in \bigcup_x U_x \cap X = X, \end{cases}$$

recollement des champs locaux $\xi_{U_x \cap \overline{Y}}$, qui est encore une extension continue et contrôlée de ξ_X .

En fait, la condition de contrôle étant vérifiée localement, on en déduit que

$$\begin{aligned} \pi_{X*} y \left(\sum_x \lambda_x(y) \xi_{U_x \cap Y}(y) \right) &= \sum_x \lambda_x(y) \pi_{X*} y (\xi_{U_x \cap Y}(y)) = \left[\sum_x \lambda_x(y) \right] \cdot \xi_{U_x \cap X}(y') = \\ &= 1 \cdot \xi_{U_x \cap X}(y') = \xi_X(y'); \end{aligned}$$

et de même pour tout $x' \in X$ on conclut que

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x'} \xi_{U \cap Y}(y) &= \lim_{y \rightarrow x'} \sum_x \lambda_x(y) \xi_{U_x \cap Y}(y) = \left[\lim_{y \rightarrow x'} \left(\sum_x \lambda_x(y) \right) \right] \cdot \xi_{U_x \cap X}(x') = \\ &= 1 \cdot \xi_{U_x \cap X}(x') = \xi_X(x'). \end{aligned}$$

Etape 2 : relèvement aux strates supérieures. Soit $X < X_1 < \dots < X_r$ une chaîne maximale de strates adjacentes à X , et prouvons que le relèvement peut être prolongé jusqu'à X_r . Il suffit de considérer le cas $r = 2$, $X < Y < Z$: il sera *a posteriori* clair que la preuve s'étend par récurrence.

Considérons des relèvements définis comme dans l'étape 1, par rapport aux trois couples de strates adjacentes $X < Y$, $X < Z$, $Y < Z$:

$$\begin{cases} \xi_{XY} = \xi_{U \cap Y} & \text{celui de l'étape 1 ;} \\ \xi_{XZ} = \xi_{U_1 \cap Z} & \text{relèvement de } \xi_X \text{ sur } U_1 \cap Z, U_1 \supseteq X; \\ \xi_{YZ} = \xi_{U_2 \cap Z} & \text{relèvement de } \xi_{U \cap Y} \text{ sur } U_2 \cap Z, U_2 \supseteq U \cap Y; \end{cases}$$

(il n'est pas restrictif de supposer $T_X \subseteq U_1$ et $T_Y \cap Z \cap T_X \subseteq U_2$).

Maintenant, il est facile de vérifier que l'ensemble

$$W = \left\{ z \in U_2 \cap Z \mid \|\xi_{YZ}(z) - \xi_{XY}(\pi_{YZ}(z))\| < d(\pi_{YZ}(z), X) \right\}$$

est un sous-ensemble ouvert, non-vide de U_2 , tel que $Y \subseteq \overline{W}$.

En fait, si nous considérons l'application

$$h : U_2 \cap Z \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(z) = \|\xi_{YZ}(z) - \xi_{XY}(\pi_{YZ}(z))\|$$

prolongeable de manière continue sur Y par $h|_Y \equiv 0$, alors la continuité de la fonction $H(z) = h(z) - d(\pi_{YZ}(z), X)$ montre évidemment que $W = H^{-1}(]-\infty, 0])$ est un ouvert de U_2 .

D'autre part, pour tout $y_0 \in Y$, comme $\lim_{z \rightarrow y_0} h(z) = 0$ (par construction), il existe un voisinage I_{y_0} de y_0 dans U_2 tel que $h(z) < d(\pi_{YZ}(z), X)$, $\forall z \in I_{y_0}$.

En particulier,

$$I_{y_0} \cap \pi_{YZ}^{-1}(y_0) \subseteq W, \quad y_0 \in \overline{W} \quad \text{et} \quad W \neq \emptyset.$$

Par un rétrécissement du voisinage tubulaire T_Y on pourrait supposer $T_Y \cap Z \subseteq W$ et par un changement de métrique qu'il est encore de rayon 1 : $T_Y = T_Y(1)$.

En notant encore par ξ_{YZ} la restriction du champ relevé (de Y dans Z) à ce nouveau voisinage T_{YZ} , (rappelons que $X \subseteq \overline{Y} \subseteq \overline{T_{YZ}}$) on a alors

$$\lim_{z \rightarrow x} \xi_{YZ}(z) = \xi_X(x) \quad , \quad \text{pour tout } x \in X,$$

car

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\xi_{YZ}(z) - \xi_X(x)\| \leq \|\xi_{YZ}(z) - \xi_{XY}(\pi_{YZ}(z))\| + \|\xi_{XY}(\pi_{YZ}(z)) - \xi_X(x)\| ; \\ \lim_{z \rightarrow x} \|\xi_{XY}(\pi_Y(z)) - \xi_X(x)\| = 0 \quad (\text{par construction de } \xi_{XY}) ; \\ \lim_{z \rightarrow x} \|\xi_{YZ}(z) - \xi_{YZ}(\pi_{YZ}(z))\| \leq \lim_{z \rightarrow x} d(\pi_Y(z), X) = 0 \quad (T_{YZ} \subseteq W). \end{array} \right.$$

Soit maintenant $\{\alpha, \beta\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert $\{V_1, V_2\}$ de $T_{XZ} := T_X \cap Z$

$$V_1 = T_{XZ} - \overline{T_{YZ}(1/2)} \quad , \quad V_2 = T_{XZ} \cap T_{YZ}(1).$$

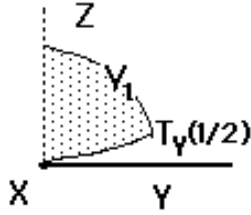


figure 3

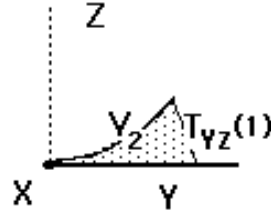


figure 4

Alors le champ ξ ,

$$\xi : T_X \cap Z \rightarrow TZ \quad , \quad \xi(z) = \alpha(z)\xi_{XZ}(z) + \beta(z)\xi_{YZ}(z)$$

recollement de ξ_{XZ} et ξ_{YZ} vérifie :

- i) ξ est une extension continue sur X et $T_X \cap Y$ où il vaut respectivement ξ_X et ξ_{XY} .
- ii) ξ est contrôlé sur $T_X \cap \overline{Z}$ par rapport au système de projections $\{\pi_X, \pi_Y\}$.

Preuve i). Si $y \in T_X \cap Y$ alors, dans un voisinage $U'_y \subseteq T_Y(1/2)$ on a $\alpha = 0$, $\beta = 1$ et $\xi(z) = \xi_{YZ}(z)$. Donc

$$\lim_{z \rightarrow y} \xi(z) = \lim_{z \rightarrow y} \xi_{YZ}(z) = \xi_Y(y) \quad (= \xi_{XY}(y) \quad \text{par construction}).$$

D' autre part $\forall x \in X$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lim_{z \rightarrow x} \xi_{XZ}(z) = \xi_X(x) & \text{par construction} \\ \lim_{z \rightarrow x} \xi_{YZ}(z) = \xi_X(x) & \text{car } T_{YZ} \subseteq W \end{array} \right.$$

et donc on conclut que

$$\lim_{z \rightarrow x} \xi(z) = \lim_{z \rightarrow x} (\alpha(z)\xi_{XZ}(z) + \beta(z)\xi_{YZ}(z)) = \left[\lim_{z \rightarrow x} (\alpha(z) + \beta(z)) \right] \cdot \xi_X(x) = \xi_X(x).$$

Preuve ii). Les conditions de contrôle sont vérifiées par construction relativement à $X < Y$ et à $Y < Z$ sur $T_Y(1/2) \cap Z$. Vérifions-les pour $X < Z$.

Si $z \in T_X \cap Z$ il y a trois possibilités:

1) $z \in T_{XZ} - T_{YZ}$. Alors $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\xi = \xi_{XZ}$ et la condition est vérifiée.

2) $z \in T_{YZ}(1/2)$. Ici il suffit de remarquer que $\xi = \xi_{YZ}$.

3) $z \in T_{XZ} \cap T_Y(\geq 1/2)$ (où $T_Y(\geq 1/2) = T_Y \cap \{\rho_Y \geq 1/2\}$).

Dans ce cas on a alors

$$\begin{aligned} \pi_{XZ*}(\xi(z)) &= \alpha(z)\pi_{XZ*}(\xi_{XZ}(z)) + \beta(z)\pi_{XY*}\pi_{YZ*}(\xi_{YZ}(z)) = \\ &= \alpha(z)\xi_X(\pi_{XZ}(z)) + \beta(z)\pi_{XY*}\xi_{XY}(\pi_{YZ}(z)) = \\ &= \alpha(z)\xi_X(\pi_{XZ}(z)) + \beta(z)\xi_X(\pi_{XY}(\pi_{YZ}(z))) = \\ &= [\alpha(z) + \beta(z)] \cdot \xi_X(\pi_{XZ}(z)) = \xi_X(\pi_{XZ}(z)). \quad \square \end{aligned}$$

REMARQUE 1. Pour toute stratification (A, Σ) (a)-régulière, on peut construire un système de projections compatibles. C'est une conséquence du théorème généralisé du voisinage tubulaire de Mather [Ma] où l'on doit refaire la démonstration de l'existence d'un système de données de contrôle uniquement par rapport à des submersions $\{\pi_Y\}_{Y \in \Sigma}$.

REMARQUE 2. Le théorème de relèvement implique en particulier, que si un champ de vecteurs est donné sur toutes les strates de profondeur maximale, on peut en déduire une extension continue et contrôlée, définie sur la stratification A toute entière.

REMARQUE 3. Ce théorème permet également d'étendre le champ sur un voisinage tubulaire ouvert T_X de X dans $\mathbb{R}^n$, avec la stratification induite par Σ .

REMARQUE 4. Dans l'étape 1 de la preuve du théorème précédent, la partition de l'unité peut être prise *sur* X et relevée *cylindriquement* sur T_{XY} . En fait, si pour tout $x \in X$ nous considérons un voisinage de la forme $V_x^{\epsilon_x}$ tel que l'ensemble ouvert $W_x := (\pi_{XY}, \rho_{XY})^{-1}(V_x^{\epsilon_x} \times]0, \epsilon_x[)$ soit contenu dans $U_x \cap Y$ (voir figure 2), alors on peut remplacer (dans la preuve du théorème) les recouvrements $\{U_x \cap X\}$ et $\{U_x \cap Y\}$ par $\{V_x^{\epsilon_x}\}$ et $\{W_x\}$. Soit $\{\mu_x : V_x^{\epsilon_x} \rightarrow [0, 1]\}$ une partition de l'unité subordonnée à $\{V_x^{\epsilon_x}\}$ (sur X), alors la partition $\{\lambda_x\}$ peut être substituée par la famille de fonctions relevées $\{\tilde{\mu}_x : W_x \rightarrow [0, 1]\}$ où $\tilde{\mu}_x(y) = \mu_x(x')$ (et $x' = \pi_{XY}(y)$), qui sont constantes le long des fibres, i.e. dépendant uniquement de $x' \in X$.

§4. Relèvement sur des stratifications (au moins) (c)-régulières.

En 1988 Karim Bekka a introduit dans sa thèse [Be]₁ la condition (c) de régularité pour une stratification (A, Σ) dont l'espace support A est contenu dans $\mathbb{R}^n$. Une telle condition implique la condition (a) de Whitney et est plus faible que la condition (b) [Be]₁ (dans sa thèse Bekka l'appelle la "*condition de Whitney faible*").

De plus Bekka a démontré [Be]₁ que l'on peut construire pour A un système de données de contrôle (S.D.C.) $\mathcal{F} = \{(\pi_X, \rho_X) : T_X \rightarrow X \times [0, \infty[\}_{X \in \Sigma}$ ([Ma], [Gi]) et que toute stratification (c) -régulière vérifie le premier théorème d'isotopie de Thom.

DEFINITION 1. On dit que la submersion stratifiée $f = \cup_{Y \in \Sigma} f_Y : (A, \Sigma) \rightarrow (A', \Sigma')$ vérifie la *condition* (a_f) de Thom, si pour tout couple de strates $X < Y$ dans A et pour toute suite $\{y_n\}_n$ dans Y telle que $\lim_n y_n = x \in X$ et $\lim_n \ker f_{Y*} y_n = \tau$ on a $\tau \supseteq \ker f_{X*} x$.

DEFINITION 2. On dit qu'une stratification (A, Σ) est (c) -régulière si, pour toute strate $X \in \Sigma$, il existe un voisinage U_X de X dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction de classe C^1 , $\rho_X : U_X \rightarrow [0, \infty[$ telle que $\rho_X^{-1}(0) = X$ et telle que l'application stratifiée

$$\rho_X : Et(X) \cap U_X \rightarrow [0, \infty[\quad \text{où} \quad Et(X) := \bigcup_{\substack{Y \in \Sigma \\ Y \geq X}} Y$$

obtenue en considérant sur $Et(X) \cap U_X$ la stratification induite par Σ soit une application de Thom.

En substance, la (c) -régularité de Bekka signifie donc que pour tout couple de strates adjacentes $X < Y$, les espaces tangents en $y \in Y$ aux hypersurfaces de niveaux $\rho_X^{-1}(\epsilon)$ (où $\epsilon = \rho_X(y)$) ont des limites qui contiennent l'espace tangent $T_x X$ quand $y \rightarrow x \in X$.

Dans [Be]₃, Bekka montre que sur une stratification (c) -régulière on peut construire une famille d'applications tapissantes $\{f_Y : T_{\partial Y} \rightarrow [0, \infty[\}$, et qu'à partir de cela on peut relever (par image réciproque) des champs de vecteurs continus qui sont contrôlés par rapport à cette famille.

En étudiant la relation entre ces fonctions tapissantes et les applications distance tubulaires $\{\rho_Y\}_Y$ du S.D.C. on peut déduire que le théorème de Bekka [Be]₃ implique celui de Shiota énoncé pour des stratifications (b) -régulières ([Sh], Lemme 4.11). En tout cas (bien que cela ne soit pas immédiatement visible) l'idée clef, commune aux deux auteurs, reste celle de relever les champs sur les hypersurfaces de niveau d'une fonction distance laquelle dans [Sh] (où on considère une stratification de Whitney) se réduit à la distance standard $\rho_{XY}(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=l+1}^n y_i^2$ ($l = \dim X$). Cette idée est également présent dans [Du]_{1,2}.

Nous reprenons alors cette idée pour définir notre relèvement continu contrôlé “canonique” pour une stratification (c) -régulière.

Fixons alors une stratification (c) -régulière (A, Σ) et soit $\mathcal{F} = \{(\pi_X, \rho_X) : T_X \rightarrow X \times [0, \infty[\}_{X \in \Sigma}$ un S.D.C. dont les fonctions distance ρ_X sont de plus des applications de Thom (un tel S.D.C. existe pour [Be]₂). Fixons de plus une strate X de A .

Pour tout $Y > X$, soit $\rho_{XY} : T_{XY} \rightarrow [0, \infty[$ la restriction de ρ_X à $T_{XY} = T_X \cap Y$. Dans ce cas, on peut retrouver les théorèmes du §2 et §3 d'une manière plus complète avec des champs et des flots qui sont de plus contrôlés par rapport aux fonctions de la famille $\{\rho_Z\}_Z$. Pour obtenir cela, il suffira d'apporter quelques modifications à la construction du §2.

Introduisons alors les notations et le lemme suivants qui sont les analogues dans le cas (c) -régulier des notations et du lemme introduits au §2 pour le cas (a) -régulier.

Pour tout $y \in Y$, notons σ_y le sous-espace de $T_y Y$ tangent à l'hypersurface de niveau $\rho_{XY}^{-1}(\rho_{XY}(y))$ de ρ_{XY} qui passe par y , i.e. $\sigma_y = T_y \rho_{XY}^{-1}(\rho_{XY}(y)) = \ker \rho_{XY*} y$ et soit $p_{\sigma_y} : \mathbb{R}^n \rightarrow \sigma_y$ la projection orthogonale sur σ_y .

Alors, si $X = \mathbb{R}^l \times 0$ et $\pi_{XY} = p_{\mathbb{R}^l|Y}$ on a

LEMME. $p_{\sigma_y}(T_x X) = \perp (\ker \pi_{XY*} \cap \ker \rho_{XY*}, \ker \rho_{XY*})$ où $x = \pi_{XY}(y)$.

Preuve. La démonstration est analogue à celle du lemme au §2. $\square$

PROPOSITION 1. Si $X = \mathbb{R}^l \times 0 < Y$ est un couple (c)-régulier, le diagramme du théorème du §2 peut être défini de sorte que le sous-espace $\mathcal{D}_{XY}(y) = [\{v_i(y)\}_{i=1}^l]$ soit tangent aux hypersurfaces de niveau $Y \cap \rho_X^{-1}(\rho_X(y))$.

Preuve. De l'hypothèse de (c)-régularité [Be]₂, on déduit qu'il existe un voisinage $T_{XY}(\epsilon)$ (appelons-le T_{XY}) tel que l'application $(\pi_{XY}, \rho_{XY}) : T_{XY} \rightarrow X \times]0, \epsilon[$ soit une submersion.

On peut définir alors la distribution $\mathcal{D}_{XY}$ par la formule (analogue au §2)

$$\mathcal{D}_{XY} : T_{XY} \rightarrow \mathbb{G}_l^n, \quad \mathcal{D}_{XY}(y) = \perp (\ker (\pi_{XY}, \rho_{XY})_{*y}, \ker \rho_{XY*y}).$$

En observant que $\ker \rho_{XY*y}$ est l'espace tangent à l'hypersurface de niveau $\{\epsilon = \rho_X(y)\}$, on a

$$T_y(Y \cap \rho_X^{-1}(\epsilon)) = T_y Y \cap T_y \rho_X^{-1}(\epsilon) = \ker(\rho_X|_{T_X \cap Y*y}) = \ker \rho_{XY*y}$$

et grâce à la (c)-régularité :

$$\lim_{y \rightarrow x} \ker \rho_{XY*y} \supseteq \mathbb{R}^l \times 0, \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Donc, comme au §2 (où ici $\ker \rho_{XY*y} = \sigma_y$ a pris la place de $T_y Y = \tau_y$), on trouve

$$\lim_{y \rightarrow x} \mathcal{D}_{XY}(y) = \mathbb{R}^l \times 0.$$

D'autre part comme la restriction $\pi_{XY*|y|} : \mathcal{D}_{XY}(y) \rightarrow \mathbb{R}^l \times 0$ est un isomorphisme, nous pouvons de nouveau définir $\forall i \leq l$ les vecteurs $v_i(y)$ relèvements des vecteurs canoniques E_i de $\mathbb{R}^l \times 0$ dans la nouvelle distribution par la formule

$$v_i(y) = \mathcal{D}_{XY}(y) \cap \pi_{XY*|y|}^{-1}(E_i).$$

Nous concluons alors en observant qu'avec l'application $\tilde{\mathcal{D}}_{XY}$

$$\tilde{\mathcal{D}}_{XY} : T_{XY} \rightarrow \mathbb{V}_l^n, \quad \tilde{\mathcal{D}}_{XY}(y) = (v_1(y), \dots, v_l(y))$$

grâce au lemme précédent on a encore

$$\begin{cases} \lim_{y \rightarrow x} v_i(y) = E_i \\ \lim_{y \rightarrow x} \tilde{\mathcal{D}}_{XY}(y) = (E_1, \dots, E_l). \end{cases} \quad \square$$

THEOREME 1. Soient (A, Σ) une stratification (c)-régulière de $A \subseteq \mathbb{R}^n$, X une strate de A et $\mathcal{F} = \{(\pi_Y, \rho_Y) : T_Y \rightarrow Y \times [0, \infty[\}_Y$ un système de données de contrôle pour A .

Alors pour tout champ de vecteurs ξ_X sur X , il existe un champ de vecteurs stratifié $\xi_U = \{\xi_{U \cap Y}\}_{Y \geq X}$ défini sur un voisinage U de X qui prolonge ξ_X de manière continue et (π, ρ) -contrôlée.

Preuve. Avec les nouvelles définitions des vecteurs v_i , la construction du champ est formellement identique à celle du théorème de §3. Il suffit donc d'observer que le champ ainsi obtenu vérifie en plus la condition de contrôle par rapport à la famille d'applications distance $\{\rho_Y\}_{Y \geq X}$.

En fait, dans l'étape 1, on doit en plus remarquer que

$$\rho_{XY*}(\xi_{U_x \cap Y}(y)) = 0 \quad \text{car par construction} \quad \xi_{U_x \cap Y}(y) \in \ker \rho_{XY*}$$

et dans l'étape 2 *cas 3*), pour tout $z \in T_{XZ} \cap T_{YZ} (\geq 1/2)$ on observe que :

$$\begin{aligned} \rho_{XZ*}(\xi(z)) &= \rho_{XZ*}(\alpha(z)\xi_{XZ}(z) + \beta(z)\xi_{YZ}(z)) = \\ &= \alpha(z)\rho_{XZ*}(\xi_{XZ}(z)) + \beta(z)\rho_{XY*}(\pi_{YZ*}\xi_{YZ}(z)) = 0, \end{aligned}$$

car

$$\begin{cases} \rho_{XZ*}(\xi_{XZ}(z)) = 0 & \text{par construction,} \\ \rho_{XY*}(\pi_{YZ*}\xi_{YZ}(z)) = \rho_{XY*}(\xi_{XY}(z)) = 0 & \text{par contrôle et construction.} \quad \square \end{cases}$$

On remarque encore que l'on peut obtenir une extension globale sur le sous-espace A tout entier si le champ est donné sur toutes les strates de profondeur maximale.

Au niveau des flots, notons en outre que la condition de ρ -contrôle permet de trouver que l'existence d'un flot global pour le champ ξ_X implique la préservation de cette même propriété pour tout champ relevé ξ_Y ([Sh] et [Gi]) et on obtient de plus que le flot réunion $\Psi_X \cup \Psi_Y : (X \cup Y) \times \mathbb{R} \rightarrow X \cup Y$ est une application continue. Nous soulignons que pour obtenir une telle continuité des flots relevés la condition de contrôle des champs relevés est suffisante sans nécessiter d'hypothèse sur leur continuité [Ma].

§5. La distribution canonique globale.

Dans ce paragraphe, nous montrons que les méthodes de partition de l'unité développées au §3 pour recoller les champs de vecteurs relèvements continus contrôlés (définis dans la distribution canonique locale) se réappliquent convenablement et permettent de définir une *distribution canonique globale* donnant une formulation plus simple et naturelle du théorème de relèvement continu.

Après avoir considéré le cas des stratifications (c) (et donc (b)-) régulières, nous considérons le cas des stratifications (w)-régulières [Ve] et lipschitziennes [Pa] (lesquelles n'admettent pas nécessairement un S.D.C.) et nous définissons également pour ces types de stratifications une distribution canonique globale.

5.1 : Le cas (c)-régulier

THEOREME 1. *Soit Σ une stratification (c)-régulière d'un sous-ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{F} = \{(\pi_X, \rho_X) : T_X \rightarrow X \times \mathbb{R}\}_{X \in \Sigma}$ un S.D.C. de (A, Σ) .*

Pour toute strate $X \in \Sigma$, il existe une application stratifiée $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$

$$\mathcal{D}_X : T_X \rightarrow \mathbb{G}_n^l \quad , \quad \text{où} \quad l = \dim X$$

définie dans un voisinage stratifié $T_X = \cup_{Y \geq X} T_{XY}$ de X à valeurs dans la grassmannienne $\mathbb{G}_n^l$ des espaces vectoriels de dimension $l = \dim X$ et telle que :

- i) $\mathcal{D}_X$ est continue sur T_X ;
- ii) $\mathcal{D}_{XX}(x) = T_x X$ pour tout $x \in X$;
- iii) $\mathcal{D}_{XY}$ est un sous-fibré de $\ker \rho_{XY*}$, $\forall Y \geq X$;
- iv) $T_y Y = \mathcal{D}_{XY}(y) \oplus \ker \pi_{XY*y}$ est une somme directe $\forall Y \geq X$ et $\forall y \in T_{XY}$;
- v) la restriction $\pi_{XY*y}| : \mathcal{D}_{XY}(y) \rightarrow T_x X$ est un isomorphisme (où $x = \pi_X(y)$);
- vi) pour tout champ de vecteurs ξ_X sur X , la formule

$$\xi_Y(y) := \mathcal{D}_{XY}(y) \cap \pi_{XY*y}^{-1}(\xi_X(x)) \quad , \quad \text{où} \quad x = \pi_X(y) \quad ,$$

définit un champ de vecteurs stratifié $\xi_{T_X} = \{\xi_{XY}\}_{Y \geq X}$ relèvement continu contrôlé de ξ_X sur $T_X = \cup_{Y \geq X} T_{XY}$.

Preuve. Pour tout couple de strates $X < Y$, considérons la distribution Q_{XY} définie sur T_{XY} par

$$Q_{XY} : T_{XY} \rightarrow \mathbb{G}_n^l \quad , \quad Q_{XY}(y) = p_{\sigma_y}(T_x X)$$

où $x = \pi_{XY}(y)$, $\sigma_y = \ker \rho_{XY*y} = T_y \rho_{XY}^{-1}(\rho_{XY}(y))$ et $p_{\sigma_y} : \mathbb{R}^n \rightarrow \sigma_y$ note la projection orthogonale sur σ_y . De cette manière, par la (c)-régularité de $X < Y$, de $\lim_{y \rightarrow x'} \sigma_y \supseteq T_{x'} X$, on déduit évidemment la continuité de Q_{XY} sur X .

Alors quitte à rétrécir les rayons des tubes $\{T_X\}_{X \in \Sigma}$ du S.D.C. nous pourrions supposer que $\forall y \in T_X$ la projection p_{σ_y} est surjective et donc que $\dim Q_{XY}(y) = \dim X$ et cela $\forall Y > X$.

Introduisons maintenant la “fonction distance” δ entre deux espaces vectoriels U et V :

$$\delta(U, V) := \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\|=1}} \inf_{v \in V} \|u - v\| \quad \text{avec laquelle on a} \quad U \subseteq V \iff \delta(U, V) = 0.$$

Soit donc $Z > Y$ une troisième strate adjacente à X .

De la (c)-régularité de $Z > Y$, $\forall y \in T_{XY}$ on a $\lim_{z \rightarrow y} \ker \rho_{YZ*z} \supseteq T_y Y$, donc on obtient $\lim_{z \rightarrow y} Q_{YZ}(z) \supseteq T_y Y$ et de plus, si on note

$$\widetilde{Q_{XY}}(z) := p_{Q_{YZ}(z)}(Q_{XY}(y)) \quad \text{où} \quad \begin{cases} y = \pi_{YZ}(z) \\ \text{et} \\ p_H = \text{proj. orth. sur } H \end{cases}$$

on obtient également :

$$\lim_{z \rightarrow y} \widetilde{Q_{XY}}(z) = Q_{XY}(y).$$

De même que pour le théorème de relèvement continu au §3, si $x = \pi_{XY}(y) = \pi_{XZ}(z)$, on trouve alors que l'ensemble

$$W := \left\{ z \in T_{YZ} \cap T_{XZ} \mid \delta(\widetilde{Q_{XY}}(z), Q_{XY}(y)) < d(y, x) \right\}$$

est un sous-ensemble ouvert non vide de $T_{YZ} \cap T_{XZ}$ tel que $W \cup T_{XY}$ soit un voisinage ouvert de T_{XY} dans $T_Y \cap T_{XZ}$ et avec lequel on ait :

$$\lim_{\substack{z \in W \\ z \rightarrow x}} \widetilde{Q_{XY}}(z) = T_x X \quad , \quad \forall x \in X .$$

Soit maintenant ϵ une fonction sur $T_{YZ} \cap T_{XZ}$ telle que $T_{YZ}^\epsilon \cap T_{XZ} \subseteq W$, considérons le recouvrement ouvert $\{V_1, V_2\}$ de T_{XZ} ,

$$V_1 = T_{XZ} - \overline{T_{YZ}^{\epsilon/2}} \quad , \quad V_2 = T_{XZ} \cap T_{YZ}$$

et soit enfin $\{\alpha, \beta\}$ une partition de l'unité relative au recouvrement $\{V_1, V_2\}$ de T_{XZ} . Comme (déjà fait) au §3 dans la preuve du théorème de relèvement continu *étape 2* (figures 3 et 4) les deux distributions

$$\begin{cases} Q_{XZ} : T_{XZ} - \overline{T_{YZ}^{\epsilon/2}} \rightarrow \mathbb{G}_n^l \\ \widetilde{Q_{XY}} : T_{YZ} \cap T_{XZ} \rightarrow \mathbb{G}_n^l \end{cases}$$

peuvent être recollées par la partition de l'unité $\{\alpha, \beta\}$ afin de définir une distribution finale stratifiée $\mathcal{D}_X : T_X \rightarrow \mathbb{G}_n^l$ qui vérifie évidemment les conditions *i)*, *ii)* et *iii)*.

A ce propos, nous précisons seulement que la partition de l'unité sur les deux espaces vectoriels $Q_{XZ}(z)$ et $\widetilde{Q_{XY}}(z)$ de même dimension $l = \dim X$ peut être faite le long de l'angle minimum entre eux (orienté et linéairement reparamétré en $[0, 1]$), ou bien le long de l'arc géodésique dans la variété grassmannienne $\mathbb{G}_n^l$ (car $Q_{XZ}(z)$ et $\widetilde{Q_{XY}}(z)$ sont très proches au voisinage de X). Ces deux méthodes semblent être équivalentes.

La distribution finale $\mathcal{D}_X$, vérifiant les conditions *i)*, *ii)* et *iii)*, il est facile d'observer que pour tout champ de vecteurs ξ_X sur X et pour tout $z \in T_X$ en notant $x = \pi_X(z)$, l'intersection transversale entre $\mathcal{D}_X(z)$ et la fibre $\pi_{X*}^{-1}(\xi_X(x))$ détermine un unique vecteur

$$\xi_{T_X}(z) := \mathcal{D}_X(z) \cap \pi_{X*}^{-1}(\xi_X(x))$$

de sorte que le champ de vecteurs ξ_{T_X} soit un relèvement continu et contrôlé du champ initial ξ_X . $\square$

5.2 : Le cas (w) -régulier et lipschitzien

Le théorème qui suit est l'analogie du théorème 1 pour des stratifications (w) -régulières et lipschitziennes.

THEOREME 2. *Soit Σ une stratification (w) -régulière (resp. lipschitzienne) de A et soit $\mathcal{F} = \{\pi_X : T_X \rightarrow X\}_{X \in \Sigma}$ une famille de projections compatibles de (A, Σ) .*

Pour toute strate $X \in \Sigma$ il existe une application stratifiée $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$

$$\mathcal{D}_X : T_X \rightarrow \mathbb{G}_l^n \quad , \quad \text{où} \quad l = \dim X$$

définie dans un voisinage stratifié $T_X = \cup_{Y \geq X} T_{XY}$ de X à valeurs dans la grassmannienne $\mathbb{G}_n^l$ des espaces vectoriels de dimension $l = \dim X$ et telle que :

i) $\mathcal{D}_X$ est rugueuse (resp. lipschitzienne) sur T_X ;

- ii) $\mathcal{D}_{XX}(x) = T_x X$ pour tout $x \in X$;
- iii) $\mathcal{D}_{XY}$ est un sous-fibré du fibré tangent TY à la strate Y , $\forall Y \geq X$;
- iv) $T_y Y = \mathcal{D}_{XY}(y) \oplus \ker \pi_{XY*|y}$ est une somme directe $\forall Y \geq X$ et $\forall y \in T_{XY}$;
- v) la restriction $\pi_{XY*|y} : \mathcal{D}_{XY}(y) \rightarrow T_x X$ est un isomorphisme ($x = \pi_X(y)$);
- iv) pour tout champ de vecteurs ξ_X sur X , la formule

$$\xi_Y(y) := \mathcal{D}_{XY}(y) \cap \pi_{XY*}^{-1}(\xi_X(x)), \quad \text{où } x = \pi_X(y),$$

définit un champ de vecteurs stratifié $\xi_{T_X} = \{\xi_{XY}\}_{Y \geq X}$ relèvement rugueux (resp. lipschitzien) de ξ_X sur $T_X = \cup_{Y \geq X} T_{XY}$.

Preuve. Précisons avant tout que la démonstration de Mather [Ma] utilisée pour construire un S.D.C. pour des stratifications (b)-régulières peut être refaite pour des stratifications (w)-régulières (resp. lipschitziennes) de manière formellement analogue afin d'obtenir une famille d'applications $\mathcal{F} = \{(\pi_X, \rho_X) : T_X \rightarrow X \times \mathbb{R}\}_{X \in \Sigma}$ ayant toutes les propriétés d'un S.D.C. sauf éventuellement la submersivité de chaque fonction $(\pi_X, \rho_X) : T_X \rightarrow X \times \mathbb{R}$ (*). Cependant, dans le cas (w)-régulier (resp. lipschitzien) on peut obtenir, au lieu de la submersivité de (π_X, ρ_X) , la (plus faible) submersivité de $\pi_X : T_X \rightarrow X$.

Si nous considérons maintenant, pour tout couple de strates $X < Y$, la distribution

$$Q_{XY} : T_{XY} \rightarrow \mathbb{G}_n^l, \quad Q_{XY}(y) := p_{\tau_y}(T_x X)$$

où pour tout $y \in T_{XY}$, $x = \pi_{XY}(y)$ et $\tau_y = T_y Y$, alors à partir de la (w)-régularité (resp. de la "lipschitzianité") de $X < Y$, on voit facilement que la distribution Q_{XY} est rugueuse [Ve] (resp. lipschitzienne [Pa]). La preuve du théorème peut alors être déduite de la même manière qu'au théorème 1 avec comme seules modifications le fait de considérer chaque fois l'espace $\tau_y = T_y Y$ au lieu du précédent $\sigma_y = \ker \rho_{XY*|y}$ et de recoller dans le cas de trois strates $Z > Y > X$ les deux distributions $Q_{XZ}(z)$ et $\widetilde{Q_{XY}}(z) = p_{\tau_z}(p_{\tau_y}(T_x X))$ par des partitions de l'unité rugueuses (resp. lipschitziennes). $\square$

DEFINITION 1. Si Σ est une stratification (c)-régulière (resp. (w)-régulière ou bien lipschitzienne), pour toute strate $X \in \Sigma$, chaque application $\mathcal{D}_X : T_X \rightarrow \mathbb{G}_n^l$ vérifiant les propriétés dans l'énoncé du théorème 1 (resp. au théorème 2) est dite *la distribution canonique globale déterminée par X (dans T_X)* et le champ relevé ξ_{T_X} défini par la formule iv) est dit le *relèvement canonique du champ ξ_X (sur T_X)*.

Concluons ce paragraphe en observant que le choix des familles de distributions canoniques $\{\mathcal{D}_X\}_{X \in \Sigma}$ peut être amélioré en introduisant la notion ci-dessous :

DEFINITION 2. Nous dirons que la famille de distributions canoniques globales $\{\mathcal{D}_X : T_X \rightarrow \mathbb{G}_n^l\}_{X \in \Sigma}$, vérifie la *condition de multicompatibilité* si pour toute triplet de strates adjacentes $Z > Y > X$, la propriété suivante est vérifiée:

$$\mathcal{D}_{XZ}(z) \subseteq \mathcal{D}_{YZ}(z), \quad \forall z \in T_{XZ} \cap T_{YZ}^e,$$

éventuellement en réduisant les rayons des tubes $\{T_X\}_{X \in \Sigma}$.

(*) Si (A, Σ) est (w)-régulier ou bien lipschitzien et avec toutes les strates analytiques alors les (π_X, ρ_X) peuvent de nouveau être obtenues submersives car dans ce cas (A, Σ) est de plus (b)-régulier [Tr]₂.

PROPOSITION. *Les familles de distributions canoniques exhibées aux théorèmes 1 et 2 précédents, peuvent être obtenues avec, de plus, la condition de multicompatibilité.*

Preuve. C'est immédiat car, avec les mêmes notations qu'au théorème 1, pour tout $z \in T_{XZ} \cap T_{YZ}^{\epsilon/2}$, on a par construction

$$\mathcal{D}_{XZ}(z) = \widetilde{Q_{XY}}(z) = p_{Q_{YZ}(z)}(Q_{XY}(y)) \subseteq Q_{YZ}(z) = \mathcal{D}_{YZ}(z). \quad \square$$

BIBLIOGRAPHIE

- [Be]₁ K. Bekka, *Sur les propriétés topologiques et métriques des espaces stratifiés*, thèse, Université de Paris-Sud, Orsay (1988).
- [Be]₂ K. Bekka, *(C')-régularité et trivialité topologique*, Singularity theory and its applications, Warwick 1989, (ed. D. Mond & J. Montaldi), Part I, Lecture Notes in Math. 1462 (Springer, Berlin 1991), pp. 42-62.
- [Be]₃ K. Bekka, *Isotopy Theorem*, preprint, University of Liverpool (1991).
- [BT] H. Brodersen and D.J.A. Trotman, *Whitney (b)-regularity is weaker than Kuo's ratio test for real algebraic stratifications* Mat. Scandinavica, 45 (1979), 27-34.
- [Da] J.N. Damon, *Topological triviality and versality for subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$* , Memoirs of the Amer. Math. Soc., September 1988, Volume 75, Number 389.
- [Du]₁ A.A. du Plessis, *Continuous controlled vector fields*, Lettre à D. Trotman, 1988.
- [Du]₂ A.A. du Plessis, *Continuous controlled vector fields*, 12 pages, archives de l'ESN <http://www.mi.aau.dk/~esn/>.
- [DW] A. du Plessis and T. Wall, *The Geometry of Topological Stability*, London Mathematical Society Monographs, New Series 9, Oxford Sciences Publications, (1995).
- [Gi] C.G. Gibson, K. Wirthmüller, A. Du Plessis, E.J.N. Looijenga, *Topological stability of smooth mappings*, Lecture Notes in Math. 552, Springer Verlag, (1976).
- [Ma] J. Mather, *Notes on topological stability*, Mimeographed notes, Harvard University, (1970).
- [Pa] A. Parusiński, *Lipschitz stratifications*, Global Analysis in Modern Mathematics (K. Uhlenbeck, ed.), Proceedings of a Symposium in Honor of Richard Palais' Sixtieth Birthday, Publish or Perish, Houston, 1993, pp 73-91.
- [Sc] M.H. Schwartz, *Champs radiaux sur une stratification analytique*, Travaux en cours, Hermann, Paris, (1991).
- [Sh] M. Shiota, *Piecewise linearization of real analytic functions*, Publ. Res. Inst. Math. sci. 20 (1984) pp. 724-792.
- [Th] R. Thom, *Ensembles et morphismes stratifiés*, Bull.A.M.S. 75 (1969), pp. 240-284.
- [Tr]₁ D.J.A. Trotman, *Geometric versions of Whitney regularity for smooth stratifications*, Ann. Ec. Norm. Sup. Paris, 4^e serie, t. 12, (1979), pp 453-463.
- [Tr]₂ D.J.A. Trotman, *Comparing regularity conditions on stratifications*, Singularities, Arcata 1981, Proc. Sympos. Pure Math. 40, (A.M.S.) (1983), pp. 575-586.
- [Tr]₃ D.J.A. Trotman, *Stability of Transversality to a Stratification Implies Whitney (a)-régularité*, Inventiones math. 50, (1979), pp. 273-277.
- [Ve] J.L. Verdier, *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard*, Inventiones Math. 36 (1976), pp. 295-312.