Chapitre II

SEMIDIFFERENTIABILITE DES MORPHISMES STRATIFIES ET LA "WHITNEY FIBERING CONJECTURE"

Resume. Le chapitre se développe autour d'une théorie des morphismes stratifiés en vue d'étudier ceux dont la régularité est à "mi-chemin" entre continuité et régularité C^1.

En développant l'idée de base affirmant qu'un morphisme stratifié $f = \cup_{X\in\Sigma} f_X : A = \cup_{X\in\Sigma} X \to A' = \cup_{X'\in\Sigma'} X'$, entre deux espaces stratifiés (au moins (a)-réguliers) (A, Σ) et (A', Σ'), est assez régulier sur une strate $X \in \Sigma$ quand $f_{X*} : TX \to TX'$ s'étend continûment par $f_{Y*} : TY \to TY'$ ($\forall Y > X$, $TX \subseteq \overline{TY}$), nous analysons différentes définitions possibles de régularité en donnant pour la première fois une notion de convergence de f_{Y*} seulement "le long de la direction horizontale". Ce sont les notions de (faible-) semidifférentiabilité et de morphisme stratifié controlé horizontalement-C^1.

La semidifférentiabilité en un point $x_0 \in X$ d'un morphisme contrôlé f nécessite que pour toute $Y > X$, la différentielle de $f_Y : Y \to Y'$ soit bornée le long des fibres de la projection $\pi_{XY} : T_{XY} = T_X \cap Y \to X$ d'un S.D.C; nous introduisons donc la notion de morphisme horizontalement-C^1 de sorte qu'on ait *"f est semidifférentiable sur X ssi f est horizontalement-C^1 et $\forall\, Y > X$, $g_{XY}(y) = ||f_{|\ker \pi_{XY*y}}||$ est bornée autour de x_0 dans A"*.

Quand l'espace stratifié (A', Σ') codomaine de f est une variété lisse on a toujours, grâce à la condition de contrôle, la semidifférentiabilité de f en tout point $x_0 \in A$. Sinon, pour que $f : (A, \Sigma) \to (A', \Sigma')$ soit horizontalement-C^1 en un point x_0 d'une strate X de A, des conditions fortes, comme l'involutivité autour de x_0 dans A d'une distribution canonique $\mathcal{D}_X$, ou bien de façon équivalente la (a)-régularité en x_0 d'un feuilletage horizontal local d'un voisinage $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$, transverse aux fibres de la projection $\pi_X : T_X \to X$, sont indispensables.

Une telle condition de (a)-régularité d'un tel feuilletage horizontal reprend une propriété conjecturée par Whitney $[\mathbf{Wh}]_1$, en termes de *"fibering conjecture"* dans le cadre des variétés analytiques et équivaut à la condition (a_f) de Thom $[\mathbf{Th}]_1$ pour une certaine projection horizontale $\pi' : \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \to \pi_X^{-1}(x_0)$, transverse à π_X et se caractérise par le fait que π' est une *rétraction extrèmement adaptée* dans le langage de la théorie de du Plessis-Wall $[\mathbf{DW}]$.

La trivialisation topologique locale H en x_0 de la projection π_X sur X est obtenue par composition des flots des champs de vecteurs relevés de X sur $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$ et nous donne un feuilletage horizontal "canonique" grâce auquel l'analyse de la semidifférentiabilité des flots relevés occupe une place fondamentale.

Si un champ ζ_X défini sur $U_{x_0} \subseteq X$ est relevé de manière continue et contrôlée en un champ $\zeta = \{\zeta_Y\}_{Y \geq X}$ sur les strates supérieures alors, dans l'hypothèse du feuilletage (a)-régulier en x_0, son flot $\phi = \{\phi_Y\}_{Y \geq X}$ est un morphisme stratifié horizontalement-C^1 en x_0. D'autre part la continuité du relèvement contrôlé est aussi une condition nécessaire pour que le feuilletage canonique soit (a)-régulier. On obtient en particulier une version horizontalement-C^1 du premier théorème d'isotopie de Thom.

§1 **Introduction.** Dans le chapitre I, nous avons considéré le problème de l'extension continue contrôlée d'un champ de vecteurs, donné sur une (ou plusieurs) strate(s) d'une stratification régulière, à toutes les strates supérieures.

Le cas d'un relèvement (extension) uniquement contrôlé est très classique, et il est bien connu ([**Ma**], [**Gi**], . . .) que les flots relevés sur une stratification au moins (b)-régulière, définissent à tout instant $t \in \mathbb{R}$ des homéomorphismes stratifiés qui sont lisses sur chaque strate, mais qui ne donnent pas en général une application C^1 dans les points de la plus petite strate X à une strate supérieure $Y > X$ (exemple de la famille des quatre droites, $[\mathbf{Wh}]_1$, [**Gi**]). C'est la raison fondamentale pour laquelle les principaux théorèmes classiques de la théorie des stratifications régulières sont souvent des résultats de nature topologique (*"stabilité topologique"*, *"trivialisation topologique"*, etc. . .), et non différentiable. Le *premier théorème d'isotopie de Thom*, donnant la stabilité topologique de la fibre d'une submersion stratifiée contrôlée $f : (A, \Sigma) \to M$ à valeurs dans une variété M, en est l'exemple le plus célèbre et il est obtenu par la technique "standard" de relèvement contrôlé de champs de vecteurs v_i (asssociés à des cordonnées locales) qui donne des flots ϕ_i dont la régularité n'est pas toujours C^1 au voisinage des singularités.

Comme nous avons considéré dans le chapitre I des extensions de champs qui de plus sont continues, notre question devient alors: "quel type de régularité (en plus de la continuité [**Ma**]) obtient-on pour les flots relevés ?".

Ce problème sera donc le sujet principal de ce chapitre.

Précisons que même avec un relèvement continu $\zeta = \{\zeta_Y\}_{Y \geq X}$ d'un champ ζ_X on ne peut pas obtenir en général un flot qui prolonge de manière C^1 le flot ϕ_X de ζ_X (pour un calcul explicite voir [**Kuo**]).

D'autre part, il est facile de se rendre compte que dans les cas où la strate X est de dimension 1, les trajectoires du flot du champ relevé définissent automatiquement un feuilletage "horizontal" de dimension 1 $\mathcal{F} = \{F_\beta\}$ de type $C^{0,\infty}$: i.e. des courbes lisses dont les espaces tangents, en coïncidant avec ceux de la distribution canonique $\mathcal{D}_X(y) = \{\mathcal{D}_{XY}(y)\}_{Y \geq X}$, tendent vers T_xX quand $y \to x$.

Donc, si $\dim X = 1$, en considérant un relèvement continu $\zeta = \{\zeta_Y\}_{Y \geq X}$ du champ ζ_X, une condition de régularité de type C^1-affaiblie

$$\text{(L)} \; : \qquad \text{“} \lim_{(y_n,v_n)\to(x,v)} \phi_{Y*y_n}(v_n) = \phi_{X*x}(v) \qquad , \qquad \forall\, Y > X \text{ ”}$$

reste valable au moins pour toutes les suites de vecteurs $\{v_n\}$, $v_n \in \mathcal{D}_X(y_n)$ et pour d'autres suites qui dans un certain sens sont "horizontales" ou encore "très proches" de la distribution horizontale canonique $\mathcal{D}_X(y_n)$. Cette observation est la motivation cruciale de ce chapitre où nous introduirons les notions de *morphisme stratifié (faiblement-) semidifférentiable,* de *morphisme stratifié horizontalement-*C^1, et plus généralement de *morphisme stratifié* $\mathcal{F}$ *-semidifférentiable*, $\mathcal{F}$ étant un feuilletage assez général. Nous avons été inspirés par les questions suivantes :

– *Quand la petite strate* X *n'est pas de dimension* 1 *quel est l'analogue du feuilletage horizontal* $\mathcal{F} = \{F_\beta\}_\beta$ *?*

– *Peut-on obtenir que ses feuilles tendent vers* T_xX *de manière* C^0 *quand* $y \to x$*?*

– *Que peut-on dire de la différentiabilité du flot relevé (à l'instant* t*)* $\phi_Y : Y \to Y$ *(*$Y > X$*) le long de la "direction horizontale" ?* . . .

Notre première approche nous conduit à un nombre important de notions différentes:

Problèmes de "transport parallèle" de champs de vecteurs obtenus à partir d'un lieu singulier vers la partie lisse de l'espace ambient, crochet de Lie de champs et non commutativité des flots correspondants, nécessité de contrôler la norme de la différentielle des flots relevés **[Wi]**, non-involutivité de la distribution canonique, condition de continuité pour un feuilletage singulier, feuilletages géodesiques **[Cai]** définis à partir d'une distribution totalement géodesique qui ne sont pas totalement géodesiques **[JW]**, champs de vecteurs de Killing et isométries infinitésimales, métriques quasi-fibrées (bundle like metrics) **[Re]** associées à une submersion riemannienne, préservation d'un feuilletage ou bien de la distribution canonique par un morphisme stratifié, condition (a_f) de Thom, ... (voir aussi **[Bo]**,**[BH]**$_{1,2}$, **[Go]**, **[La]**, **[ON]**$_{1,2}$, **[Yo]**).

Toutes ces notions interviennent de manière importante en donnant chacune un point de vue différent du même problème.

Ce problème rappelle une propriété conjecturée par H. Whitney en 1965 **[Wh]**$_1$ dans le contexte moins général des stratifications (b)-régulières (et analytiques) d'une variété analytique. En fait, Whitney formula la validité de la *"Whitney fibering conjecture"*, une propriété qui entraîne pour toute strate X et pour tout $x_0 \in X$ l'existence d'un feuilletage $\{F_\beta\}_\beta$ ayant autour de x_0 la bonne convergence (L) des espaces tangents aux feuilles et que nous définissons au §2.4 (dans le context de stratifications réelles) comme la (a)*-régularité (autour de* x_0 *sur* X*) du feuilletage horizontal* $\{F_\beta\}$.

Pour de stratifications réelles (b)-régulières, l'existence d'un tel "bon" feuilletage a été conjecturée D. Trotman en 1993 et nous montrons au §7 qu'elle est une condition nécessaire et suffisante pour que les flots des champs relevés soient horizontalement-C^1, et de façon plus générale, qu'elle est nécessaire pour que d'autres morphismes horizontalement-C^1 puissent exister. Nous réinterpretons alors la conjecture de Trotman comme une *version lisse de la Whitney fibering conjecture* (§9, remarque 3).

Après avoir introduit le problème général et souligné que la validité de la version lisse de la "Whitney fibering conjecture" devient la condition essentielle pour disposer de bonnes catégories de morphismes stratifiés (dont la régularité au voisinage des singularités soit *concrètement* plus forte que la continuité), nous pouvons donner ci-dessous le plan de ce travail et les résultats principaux du chapitre.

Dans le §2, nous introduisons plusieurs conditions de régularité pour un morphisme stratifié $f : (A, \Sigma) \to (A', \Sigma')$: la *semidifférentiabilité*, la *faible-semidifférentiabilité*, les morphismes *horizontalement-*C^1, la *forte-semidifférentiabilité.*

Toutes les implications entre ces propriétés sont précisées et pour celles qui ne sont pas valables, des exemples simples sont donnés. La théorie est exposée pour un morphisme stratifié arbitraire. Nous renvoyons le lecteur à l'introduction au debut du §2 pour un resumé détaillé du contenu de ce paragraphe.

Des questions importantes sont laissées ouvertes :

– Quels sont les morphismes faiblement semidifférentiables et (ou bien) ceux horizontalement-C^1 ?

– Est ce que tout morphisme stratifié est faiblement semidifférentiable ou bien horizontalement-C^1 ?

Ces questions constitueront le point de départ pour la théorie à développer dans les paragraphes suivants.

Le §3 établit la transition entre l'étude de la régularité d'un morphisme de type général (fait au §2) et l'analyse du cas particulier où le morphisme est le flot $\phi = \{\phi_Y\}_{Y \geq X}$ d'un champ de vecteurs $\zeta = \{\zeta_Y\}_{Y \geq X}$ obtenu par relèvement continu contrôlé d'un champ ζ_X défini sur X.

Le §4 se développe autour de l'hypothèse d'involutivité de la distribution canonique $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ relative à la strate X (*). Le résultat principal montre que l'involutivité de $\mathcal{D}_X$ est une condition suffisante pour que les flots (à l'instant t) $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}_{Y \geq X}$ du champ ζ relevé continu contrôlé du champ ζ_X soient horizontalement-C^1 en tout point x_0 autour duquel $\mathcal{D}_X$ est involutive. On remarque en outre que si $\dim X = 1$ ou bien $\dim X = \dim A - 1$, le flot ϕ est toujours horizontalement-C^1 en tout point de X.

Tous les résultats analogues, concérnant la (plus forte) propriété de $\mathcal{F}$-semidifférentiabilité de $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}_{Y \geq X}$ sont présentés à la section 4.2.

D'autre part, les propositions et théorèmes 1 et 2 utilisés pour déduire ce résultat prouvent en realité un théorème plus général énoncé aux (théorèmes 2 des) §7.1 et §7.2.

Le §5 est consacré à l'étude de quelques propriétés très significatives (et utiles pour la suite) des champs de vecteurs $w_i = H_*(E_i)$. On montre que de tels champs coïncident avec les relèvements contrôlés horizontaux sur le feuilletage $\mathcal{H}$ des champs standards E_i de $X \equiv \mathbb{R}^l \times 0$.

La différence $w_i - v_i$ entre les champs de vecteurs w_i et v_i, qui mesure le défaut d'involutivité de la distribution canonique, est étudiée et cela rend quelque peu technique le paragraphe; un dessin détaillé (figure 5) résume qualitativement la situation.

Différentes propriétés qui caractérisent les champs w_i et d'autres portant sur l'involutivité de la distribution canonique $\mathcal{D}_X$ et sur la (a)-régularité du feuilletage $\mathcal{H}$ sont présentées aux sections 5.1 et 5.2. On conclut le paragraphe (sect. 5.3) en montrant l'unicité, sous certaines conditions, des champs de vecteurs w_i, en estimant ainsi une certaine "rigidité" du feuilletage horizontal $\mathcal{H}_{x_0}$ (local en x_0) obtenu par la technique classique d'intégration des champs relevés contrôlés.

Le §6 présente quelques caracterisations de l'involtivité de la distribution canonique $\mathcal{D}_X$. Il s'ouvre par des commentaires concernant deux feuilletages transverses : le feuilletage canonique $\mathcal{H}$ induit par la trivialisation $H : \mathbb{R}^l \times \pi_X^{-1}(x_0) \to \pi_X^{-1}(U_{x_0})$ locale en x_0 de la projection $\pi_X : T_X \to X$ et le feuilletage $\mathcal{V}$ des fibre de π_X : $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$ étant de dimension complementaire on peut définire une *projection horizontale* $\pi' : \pi^{-1}(U_{x_0}) \to \pi^{-1}(x_0)$. Le paragraphe se conclut alors avec quatre conditions caracterisant l'involutivité de $\mathcal{D}_X$.

Dans le §7 nous considérons le cas général où la distribution canonique n'est pas nécessairement intégrable. Dans cette situation, nous pouvons alors remplacer l'intégrabilité de $\mathcal{D}_X$ par l'hypothèse plus faible de (a)-régularité d'un feuilletage horizontal $\mathcal{H}$

(*) David Trotman and Andrew du Plessis ont vérifié (en avril 1994) qu'en général une distribution canonique $\mathcal{D}_X$ n'est pas involutive. D'autre part, Mike Field avait remarqué cette difficulté à D. Trotman, sous une forme équivalente, dans une lettre de janvier 1976 (transverse aux fibres de la projection π_X). Celà équivaut à l'involutivité d'une nouvelle distribution (liée à une métrique particulière, la *métrique quasi-fibrée* **[Re], [Ca]**). Il n'est pas surprenant alors de retrouver pour les flots des champs relevés les mêmes résultats qu'au §4.

Après avoir remarqué que la (a)-régularité du feuilletage $\mathcal{H}$ équivaut à ce que la projection horizontale $\pi' : T_X \to \pi'^{-1}(x_0)$ introduite au §4 vérifie la condition (a_f) de Thom, on montre un théorème contenant des conditions suffisantes pour qu'un morphisme stratifié $f : (A, \Sigma) \to (A', \Sigma')$ général soit horizontalement-C^1 (théorème 2).

Enfin, le paragraphe se termine par une version horizontalement-C^1 du premier théorème d'isotopie de Thom selon lequel tout morphisme stratifié propre $f : (A, \Sigma) \to M$ défini sur une stratification (A, Σ) et vérifiant la condition du feuilletage (a)-régulier en tout point, admet en tout point x_0 une trivialisation H_{x_0} ayant une régularité horizontalement-C^1. (Le cas particulier $f = \pi_X$ coïncide avec l'hypothèse de (a)-régularité du feuilletage considéré).

A la section 7.2. tous les analogues de ces théorèmes sont donnés en version $\mathcal{F}$-semidifférentiable.

Dans le §8 nous rappelons les éléments de base de la théorie des *rétractions adaptées* de du Plessis-Wall **[DW]**. Dans ce langage la (a)-régularité de $\mathcal{H}_{x_0}$ se caractérise par la propriété suivante : *"le feuilletage horizontal local* $\mathcal{H}_{x_0} = \{H(\mathbb{R}^l \times y_0)\}_{y_0 \in \pi_X^{-1}(x_0)}$ *est* (a)*-régulier sur le voisinage* $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$ *de* x_0 *si et seulement si la projection horizontale* $\pi' : \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \to \pi_X^{-1}(x_0)$ *est une rétraction extrèmement adaptée".* Les nombreux exemples et contrexemeples construits par du Plessis-Wall sont tous cités afin de mieux éclaircir les difficultés qui s'opposent à la (a)-régularité de $\mathcal{H}_{x_0}$.

Le §9 est entièrement dédié aux rappels concernant la *conjecture de fibration de Whitney* déjà mentionnée.

Le chapitre se conclut par le §10 où nous considérons des feuilletages globaux de voisinages tubulaires stratifiés du type de ceux "proposés" par Whitney (cf. §9). Nous reprenons brievement les idées développées au §5 du chapitre I à propos de la distribution canonique $\mathcal{D}_X$ relative à une strate X, et les adaptons au cas où les relèvements (π, ρ)-contrôlés des champs de vecteurs peuvent être obtenus tangents à un feuilletage global donné de T_X.

Nous introduisons alors la notion de *système de données de contrôle feuilleté totalement compatible* qui semble la plus naturelle pour obtenir des relèvements de champs de vecteurs (π, ρ)-contrôlés globaux, sans passer à travers des partitions de l'unité (cf. chapitre I). Sous l'hypothèse d'existence d'un système de données de contrôle feuilleté totalement compatible et (a)-régulier, la globalisations de tous les résultats concernant la semidifférentiabilité de flots des champs relevés obtenus aux paragraphes preédents est possible.

On présente en particulier la version "globalement horizontalement-C^1" du premier théorème d'isotopie de Thom.

§2 Quelques conditions de régularité pour les morphismes stratifiés.

Dans ce paragraphe, poussés par la nécessité de trouver quelques propriétés de régularité qui améliorent celles classiquement connues, nous faisons une recherche de différentes conditions de régularité pour un morphisme stratifié $f : (A, \Sigma) \to (A', \Sigma')$.

Notre idée de départ, développée dans la définition de *semidifférentiabilité*, consiste à demander (dans le cas de deux strates $X < Y$), qu'un morphisme stratifié $f_X \cup f_Y : X \cup Y \rightarrow X' \cup Y'$ continu et lisse sur les strates X et Y, soit tel que la différentielle $f_{Y*} : TY \rightarrow TY'$ se prolonge continûment à l'application f_{X*} : i.e. que l'application $f_{X*} \cup f_{Y*} : TX \cup TY \rightarrow TX' \cup TY'$ soit continue.

Le contrôle par rapport aux deux systèmes de données de contrôle (S.D.C.), réspectivement de A et de A', est supposé par définition(*) et implique qu'un morphisme stratifié $f : (A, \Sigma) \rightarrow M$ à valeurs dans une variété lisse M est toujours semidifférentiable. D'autre part même si une telle classe de morphismes semble *a priori* convenable, la semidifférentiabilité étant préservée par composition de morphismes semidifférentiables, elle sera insuffisante car (par exemple) elle ne se préserve pas par passage à l'application réciproque $f^{-1} : A' \rightarrow A$, pour un homéomorphisme stratifié $f : A \rightarrow A'$.

Cette situation provient du fait que la semidifférentiabilité en un point $x \in X$ nécessite que la norme de la différentielle $g(y) = ||f_{Y*y|\ker \pi_{XY*y}}||$ soit bornée autour de x dans $X \cup Y$ (et $\forall Y \geq X$).

Une telle condition sur les dérivées bornées impose de grosses restrictions à notre catégorie de morphismes, à laquelle un flot $\phi = \{\phi_Y : T_X \cap Y \rightarrow T_X \cap Y\}_{Y \geq X}$ d'un champ $\zeta = \{\zeta_Y\}_{Y \geq X}$ relevé contrôlé d'un champ ζ_X, même relevé de manière continue, n'appartienne pas en général ([**Kuo**]).

Cet inconvénient nous conduit à chercher des définitions plus faibles, et à introduire les notions de morphisme stratifié faiblement semidifférentiable et de morphisme stratifié horizontalement-C^1. On obtient alors que la semidifférentiabilité de f (en x) équivaut à ce que f soit horizontalement-C^1 (en x) et ait des dérivées bornées (autour de x dans A).

La condition de morphisme stratifié horizontalement-C^1 pour $f : A \rightarrow A'$, rend caduque tout contre-exemple et nous permet de prouver que cette condition se préserve par passage à l'application réciproque $f^{-1} : A' \rightarrow A$ quand f est un homéomorphisme $f : A \rightarrow A'$. Cela fait l'objet du théorème 1.

Comme (à ce stade) nous nous sommes affranchis de tout problème de convergence le long de la direction verticale il nous reste à étudier la convergence le long de la direction horizontale. Deux questions se posent :

Quels sont les morphismes faiblement semidifférentiables et (et/ou) ceux horizontalement-C^1 ?

Est ce que tout morphisme stratifié est faiblement semidifférentiable ou bien horizontalement-C^1 ?

Ces questions et ces premières propriétés seront le point de départ de la théorie qui sera développée dans les paragraphes suivants.

Le paragraphe se conclut par une dernière notion de régularité pour les morphismes stratifiés. Cette notion, la *forte semidifférentiabilité* s'inspire de l'idée de récupérer (quand cela est possible) l'existence d'une application différentielle sur le "cône tangent" (la fibre de *Nash*, $[\mathbf{Wh}]_1$) à la stratification. Il nous semble alors raisonnable de considérer cette notion de régularité quand on dispose de beaucoup de régularité tant pour le morphisme que pour la stratification considérée, (par exemple dans un contexte analytique de deux stratifications dont les strates sont analytiques et dont la restriction des morphismes à toute strate est une application analytique.

(*) On ne sait pas s'il est possible de construire en général deux S.D.C. par rapport auxquels $f : (A, \Sigma) \rightarrow (A', \Sigma')$ soit contrôlée [**Ma**].

Même si dans la suite nous nous intéresserons au cas d'un morphisme qui sera le flot d'un champ de vecteurs relevé continu et contrôlé, la théorie exposée dans ce paragraphe reste générale.

2.1 : Morphismes semidifférentiables.

Dans tout le paragraphe (A, Σ) et (A', Σ') seront deux stratifications (a)-régulières de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ et de $A' \subseteq \mathbb{R}^m$, et $f : A \to A'$ désignera une application de A dans A'. Une variété et/ou une application (entre deux variétés) seront dites *"lisses"* quand elles seront de classe C^1.

Definition 1. L'application $f : A \to A'$ est un *morphisme stratifié* si f est continue, f est *stratifiée*, i.e. envoie chaque strate X de A dans une unique strate X' de A' : $f(X) \subseteq X'$, et enfin chacune des restrictions $f_X : X \to X'$ de f est une application lisse (non nécessairement une submersion).

Remarquons tout de suite que, grâce à la condition de frontière $X \subseteq \overline{Y}$ et à la continuité de f, on a pour tout couple de strates $X < Y$ de A la propriété $f(X) \subseteq f(\overline{Y}) \subseteq \overline{f(Y)}$. De plus, les strates X' et Y' définies ci-déssus vérifient $X' \geq Y'$ (à nouveau par la condition de frontière).

Les stratifications (A, Σ) et (A', Σ') considérées seront toujours munies de systèmes de données de contrôle $\mathcal{T} = \{(T_X, \pi_X, \rho_X)\}_{X \in \Sigma}$ et $\mathcal{T}' = \{(T_{X'}, \pi_{X'}, \rho_{X'})\}_{X' \in \Sigma'}$ et tout morphisme stratifié f considéré sera *contrôlé (par rapport aux systèmes $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$)*, i.e. :

$$\forall\, X < Y \ , \ \exists\, \epsilon > 0 \ : \ \forall\, y \in T^{\epsilon}_{XY} := T_X(\epsilon) \cap Y \quad \text{on ait} \quad \begin{cases} \pi_{X'} f_Y(y) = f_X \pi_X(y) \\ \\ \rho_{X'} f_Y(y)) = \rho_X(y)\,. \end{cases}$$

Si la stratification est seulement (a)-régulière et si le système $\mathcal{T}$ se réduit à la famille des projections, alors la condition de contrôle est considérée seulement par rapport à cette famille, i.e. $\pi_{X'} f_Y(y) = f_X \pi_X(y)$ (voir la remarque 1 au §3 du chapitre I).

D'autre part remarquons que pour toutes strates $X < Y$ de A, la condition de frontière de $X \subseteq \overline{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$ et la (a)-régularité de (A, Σ) et (A', Σ') impliquent que $TX \subseteq \overline{TY}$ et $TX' \subseteq \overline{TY'}$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ et $\mathbb{R}^{2m}$.

Definition 2. Nous dirons que le morphisme stratifié $f : (A, \Sigma) \to (A', \Sigma')$ est *semidifférentiable en un point $x \in X$ (resp. en $(x, v) \in TX$)*, si pour toute strate $Y > X$ (ce qui implique $Y' \geq X'$) l'application différentielle $f_{X*} \cup f_{Y*} : TX \cup TY \to TX' \cup TY'$ est continue en tout point $(x, v) \in \{x\} \times T_x X \subseteq TX$ (resp. en (x, v)). I.e. la condition de limite est vérifiée :

$(\mathrm{L})_x$: pour toute suite $\{(y_n, v_n)\}_n$ dans TY telle que $\lim_{n \to \infty} (y_n, v_n) = (x, v) \in TX$ on a aussi

$$\lim_{n \to \infty} f_{Y * y_n}(v_n) = f_{X * x}(v)\,.$$

Enfin, on dira que f *est semidifférentiable sur* X si f est semidifférentiable en tout point $x \in X$ et que f *est semidifférentiable* (en sous-entendant *sur* (A, Σ)) si f est semidifférentiable sur toute strate $X \in \Sigma$.

Attention. La semidifférentiabilité en un point x (sur une strate X ou sur A tout entier) d'un morphisme stratifié $f : (A, \Sigma) \to (A', \Sigma')$ est en général une condition sensiblement plus faible que la C^1-régularité de f en x (sur X ou sur A) comme on le verra dans la suite par des exemples élémentaires.

La proposition 1 montre que quand la stratification A' se réduit à une variété lisse, la condition de contrôle implique la semidifférentiabilité :

PROPOSITION 1. *Toute application $f : (A, \Sigma) \to M$ à valeurs dans une variété M et π-contrôlée par rapport à la famille des projections d'un S.D.C. $\mathcal{T} = \{(T_X, \pi_X, \rho_X)\}_{X \in \Sigma}$ est semidifférentiable.*

Preuve. Considérons deux strates $X < Y$ de A et soit $\{(y_n, v_n)\}_n$ une suite dans TY telle que $\lim_n (y_n, v_n) = (x, v) \in TX$.

La condition de π-contrôle pour $f : A \to M$, dans le cas où l'espace but est une variété s'exprime simplement par $f_Y = f_X \circ \pi_{XY}$. Donc $f_{Y*} = f_{X*} \circ \pi_{XY*}$ et la relation $\lim_n f_{Y*y_n}(v_n) = f_{X*x}(v)$ découle immédiatement de la propriété

$$\lim_n f_{X*x_n}(\pi_{XY*y_n}(v_n)) = f_{X*x}(v) \qquad \text{où} \quad x_n = \pi_{XY}(y_n)$$

valable pour les applications lisses $f_X : X \to M$ et $\pi_{XY} : T_{XY} \to X$. $\square$

Remarquons que les stratifications (b) et (c)-régulières admettent toujours des S.D.C. dont les projections (et les fonctions distance) sont des applications lisses (voir resp. [**Ma**] et [**Be**]$_1$). Evidemment, quand la stratification considérée est un ensemble stratifié abstrait (E.S.A., [**Ma**]) non plongé dans $\mathbb{R}^m$, la différentiablité de π_X, de même que la semidifférentiabilité de $f : (A, \Sigma) \to M$, n'a plus de sens.

Si dans la proposition précédente on a du prendre comme hypothèse la semidifférentiabilité des projections $\{\pi_X\}_X$, au contraire, quand l'on considère des stratifications (c)-régulières, on peut déduire facilement la semidifférentiabilité des fonctions distance $\{\rho_X\}_X$ quand ces dernières ont des dérivées bornées :

PROPOSITION 2. *Soit (A, Σ) une stratification (c)-régulière munie d'un S.D.C. $\mathcal{T} = \{(\pi_X, \rho_X) : T_X \to X \times [0, \infty[\ \}_{X \in \Sigma}$. Considérons chaque voisinage tubulaire T_X muni de la stratification induite de Σ et $[0, \infty[$ stratifié par $\{0\} \cup]0, \infty[$, alors toute fonction distance $\rho_X : T_X \to [0, \infty[$ est semidifférentiable sur X.*

Preuve. Pour chaque strate X de Σ, les strates de T_X supérieures à X sont du type $T_{XY} := T_X \cap Y$ avec $Y > X$ dans Σ.

Soit alors $(x, v) \in TX$ un point de X et $\{(y_n, v_n)\} \subseteq TY$ une suite convergente vers (x, v). Comme chaque fonction ρ_X est lisse, elle admet des dérivées bornées autour de x. En notant alors $M > 0$ une borne supérieure des différentielles des normes de $\mathrm{grad}\rho_{XY}(y_n)$ autour de x et en notant α_n l'angle entre $\mathrm{grad}\rho_{XY}(y_n)$ et v_n, on a évidemment l'inégalité suivante :

$$|\rho_{XY*y_n}(v_n)| = | < \mathrm{grad}\rho_{XY}(y_n), v_n > | \leq$$

$$||\mathrm{grad}\rho_{XY}(y_n)|| \cdot ||v_n|| \cdot cos\,\alpha_n \leq M \cdot (||v|| + 1) \cdot cos\,\alpha_n.$$

Maintenant, rappelons que par la (c)-régularité de Σ (condition $(a_{\rho_{XY}})$ de Thom), les espaces tangents $T_{y_n}\rho_{XY}^{-1}(\rho_{XY}(y_n))$ aux hypersurfaces de niveaux de ρ_{XY} tendent à contenir l'espace T_xX. Donc $\mathrm{grad}\rho_{XY}(y_n)$ tend à devenir orthogonal à T_xX, et comme $\lim_n v_n = v \in T_xX$, alors $\mathrm{grad}\rho_{XY}(y_n)$ tend à devenir orthogonale à v_n, i.e. $\lim_n \alpha_n = \frac{\pi}{2}$.

Comme la restriction $\rho_{X|X}$ est la fonction constante zéro, on conclut enfin que $\lim_n \rho_{XY*y_n}(v_n) = 0 = \rho_{X*x}(v)$. $\square$

Les remarques 1 et 2 qui suivent sont élémentaires :

Remarque 1. *Si $f : A \to A'$ est une application semidifférentiable il existe une application "différentielle" de f,*

$$f_* := \bigcup_X f_{X*} \ : \ TA = \bigcup_{X\in\Sigma} TX \ \longrightarrow \ TA' = \bigcup_{X'\in\Sigma'} TX'$$

qui est continue sur le "fibré tangent généralisé" $TA := \bigcup_{X\in\Sigma} TX$ à la stratification (A,Σ). $\square$

Remarque 2. *Si $f : A \to A'$ et $g : A' \to A''$ sont deux applications semidifférentiables, alors l'application $g\circ f : A \to A''$ l'est aussi.* $\square$

Les remarques 3 et 4 anticipent des observations sur la convergence de f_* le long des directions des fibres des projections du S.D.C. qui seront développées avec plus de précision à la section 2.2 et mieux comprises à la proposition 4 correspondante.

Remarque 3. *S'il existe une strate $Y > X$ telle que l'application $g_{XY}(y) = ||f_{Y*y}||$ ne soit pas bornée (autour d'un point $x \in X$ dans $X \cup Y$), alors f ne peut pas être semidifférentiable (en x).* $\square$

Remarque 4. *L'application réciproque $f^{-1} : A' \to A$ d'un homéomorphisme semidifférentiable $f : A \to A'$ n'est pas en général un morphisme semidifférentiable.* $\square$

Pour justifier les remarques 3 et 4 il suffit d'observer l'exemple élementaire suivant :

Exemple 1. Soit $A = A' = [0,\infty[$ stratifié par $X = X' = \{0\}$, $Y = Y' =]0,\infty[$ et $f : [0,\infty[\to [0,\infty[$ l'application $f(y) = y^m$ avec $m > 1$.

Alors f est un homéomorphisme stratifié avec application réciproque $g(y) = f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{m}}$ et on a $g'(y) = \frac{1}{m}\, y^{\alpha}$ où $\alpha = \frac{1-m}{m} < 0$. Cette application g_{*y} est définie sur la base standard $\underline{1} \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{rccc} g_{*y} : & T_yY = \mathbb{R} & \longrightarrow & T_{y'}Y = \mathbb{R} \\ & \underline{1} & \longmapsto & (\frac{1}{m}\, y^{\frac{1-m}{m}}) \cdot \underline{1} = \ ||g_{*y}|| \cdot \underline{1} \end{array}$$

i.e., comme $\alpha < 0$, les différentielles g_{*y} sont des "dilatations" divergentes pour $y \to 0$.

Si nous fixons un champ de vecteurs $v(y)$ sur Y qui se prolonge continûment sur $X = \{0\}$ i.e. $\lim_{y\to 0} v(y) = 0$, alors la condition de continuité ne sera pas suffisante pour que $\lim_{y\to 0} g_{*y}(v(y)) = 0$. En fait comme $g_{*y}(v(y)) = ||g_{*y}|| \cdot v(y)$ l'implication

$$(*) \ : \qquad \text{“} \lim_{y\to 0} v(y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{y\to 0} g_{*y}(v(y)) = 0\text{”}$$

est seulement valable pour les champs de vecteurs $v(y)$ dont l'ordre (pour $y \to 0$) est suffisamment fort pour "tuer" l'ordre d'infini de $||g_{*y}||$. Donc g n'est pas semidifférentiable bien que f soit semidifférentiable. $\square$

Nous remarquons que (dans le cas précédent) pour que l'implication $(*)$ soit valable il aurait fallu considérer des champs $v(y)$ dont la norme était (par exemple) plus petite que $\frac{1}{||g_{*y}||^2}$ ou $\frac{\rho_{XY}(y)}{||g_{*y}||+1}$ au voisinage de $x = 0$. Une telle idée sera exploitée et jouera un rôle très significatif par la suite.

Dans la figure 2 nous notons $\delta(y)$ une telle application.

Remarquons aussi, que si on considère les deux fonctions stratifiées $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : A \to \mathbb{R}$, à valeurs dans ls variété $M = \mathbb{R}$ (stratifiée avec une seule strate), alors f et g ne sont plus contrôlées (en fait, $f_Y(y) = y^m \neq 0 = f_X(0) = f_X(\pi_X(y))$ par exemple) et ne vérifient pas l'hypothèse essentielle de la proposition 1.

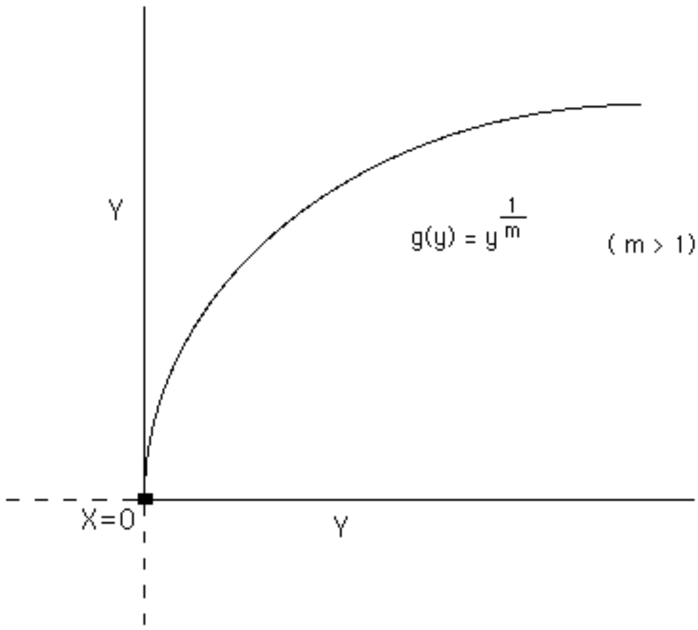

figure 1

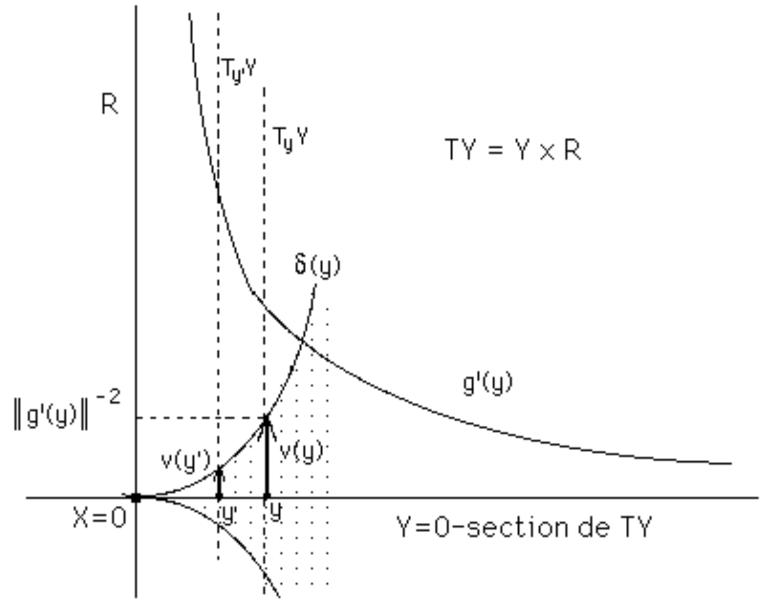

figure 2

L'exemple 1 et la remarque 3 se résument en une propriété valable plus généralement, et nécessaire pour la semidifférentiabilité (en un point de A).

PROPOSITION 3. *Une condition nécessaire pour qu'un morphisme stratifié* $f : (A, \Sigma) \to (A, \Sigma')$ *soit semidifférentiable en un point* x *d'une strate* $X \in \Sigma$ *est que pour toute strate* $Y > X$ *la fonction*

$$g_{XY}(y) := ||f_{Y*y|\ker \pi_{XY*y}}|| \quad \text{où} \quad f_{Y*y|\ker \pi_{XY*y}} : \ker \pi_{XY*y} \to \ker \pi_{X'Y'*y'}$$

soit bornées autour de x *dans* $X \cup Y$.

Preuve. Supposons qu'il existe suite $\{y_n\} \subseteq Y$ convergente vers un point $x \in X$, pour laquelle la suite des normes $||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y_n}}||$ soit divergente.

Il n'est pas difficile de vérifier qu'il existe alors une suite de vecteurs $v_n \in \ker \pi_{XY*y_n} = T_{y_n}\pi_{XY}^{-1}(x_n) \subseteq T_{y_n}Y$ $(x_n = \pi_{XY}(y_n))$ vérifiant :

i) $||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y}}(v_n)|| = ||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y_n}}|| \cdot ||v_n||$;
ii) $||v_n|| = ||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y}}||^{-\frac{1}{2}}$.

Comme $||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y_n}}||$ est divergente la condition *ii)* entraîne que $\lim_n v_n = 0 \in T_xX$ et $\lim_n(y_n, v_n) = (x, 0) \in TX$.

D'autre part, $\lim_n ||v_n|| = 0$, mais grâce à *i)* et *ii)*

$$||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y}}(v_n)|| = ||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y_n}}|| \cdot ||v_n|| = ||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y}}||^{\frac{1}{2}} \to \infty$$

ce qui implique que f n'est pas être semidifférentiable en x. □

Par la proposition ci-dessus, la non-convergence de f le long des directions des fibres des projections imposent d'importantes restrictions, et nous suggère donc de séparer l'analyse de la convergence le long de "la direction verticale" (celle du sous-fibré $\ker \pi_{X*}$) et le long de "la direction horizontale" (à définir) dans la limite

$$\lim_{(y,v)\to(x,u)} f_{Y*y}(v) = f_{X*x}(u) .$$

Nous sommes alors conduit de manière complètement naturelle à considérer une nouvelle condition de régularité pour des morphismes stratifiés que nous introduirons dans la section suivante.

2.2 : Morphismes stratifiés horizontalement-C^1.

DEFINITION 1. Un morphisme stratifié $f : (A, \Sigma) \to (A', \Sigma')$ sera dit *horizontalement-C^1 en un point* x *d'une strate* $X \in \Sigma$ si et seulement s'il existe une distribution canonique locale $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ autour de x dans A telle que la condition de limite demandée dans la définition de semidifférentiabilité :

$$(\mathrm{L})_x \ : \lim_{(y_n,v_n)\to(x,v)} f_{Y*y_n}(v_n) = f_{X*x}(v) \quad , \quad \text{pour tout} \quad (x, v) \in TX$$

soit vérifiée pour chaque suite $\{(y_n, v_n)\} \subseteq Y$ convergente vers (x, v) o`u $v_n \in \mathcal{D}_{XY}(y_n)$.

Quand on voudra préciser la distribution considérée, on dira que f *est horizontalement-C^1 en* x *par rapport à* $\mathcal{D}_X$. Les vecteurs $v_n \in \mathcal{D}_X(y_n)$ seront alors appelés *vecteurs horizontaux*, et dualement les vecteurs $v_n \in \ker \pi_{XY*y_n}$ seront dits *vecteurs verticaux.*

Un morphisme stratifié f est donc horizontalement-C^1 en $x \in X$ si et seulement si $\forall\, Y > X$ la restriction de l'application différentielle au sous-fibré $\mathcal{D}_{XY}$ de la distribution canonique locale

$$f_{X*} \cup f_{Y*|\mathcal{D}_{XY}} : TX \cup \mathcal{D}_{XY} \to TX' \cup TY'$$

est continue en x.

Nous dirons que f est *horizontalement-C^1 sur une strate X* (resp. *sur (A, Σ)* tout entier) si f est horizontalement-C^1 en tout point $x \in X$ (resp. $\forall x \in X$ et $\forall\, X \in \Sigma$).

Il est alors immédiat de remarquer que :

Remarque 1. *Tout morphisme stratifié semidifférentiable f est horizontalement-C^1 (par rapport à toute distribution canonique globale ou locale).* □

Proposition 4. *Un morphisme stratifié contrôlé $f : (A, \Sigma) \to (A', \Sigma')$ est semidifférentiable en un point $x \in X$ si et seulement s'il est horizontalement-C^1 en x et s'il existe un voisinage U_x de x dans A tel que pour toute strate $Y > X$, la fonction $g_{XY}(y) = ||f_{Y*y|\ker \pi_{XY*y}}||$ est bornée dans $U_x \cap Y$.*

Preuve. Comme la semidifférentiabilité de f en x implique que f est horizontalement-C^1 en x, alors le *"seulement si"* découle de la proposition 3 à la section 2.1.

Afin de démontrer l'implication *"si"*, pour toute strate $Y > X$ et pour toute suite $\{(y_n, v_n)\} \subseteq TY$ telle que $\lim_n (y_n, v_n) = (x, v) \in TX$, nous décomposons (par le théorème du chapitre I §5) tout vecteur $v_n \in T_{y_n}Y = \mathcal{D}_{XY}(y_n) \oplus \ker \pi_{XY*y_n}$ en une somme directe $v_n = v_n^h + v_n^v$ de ses composantes horizontale et verticale de sorte que grâce à $\lim_n v_n = v \in T_xX$ on obtient

$$\lim_{n\to\infty} v_n^h = v \in T_xX \quad \text{ et } \quad \lim_{n\to\infty} v_n^v = 0 \in T_xX\,.$$

Alors, comme f est horizontalement-C^1 en x, on a $\lim_n f_{Y*y_n}(v_n^h) = f_{X*_x}(v)$.

D'autre part, comme les différentielles le long des fibres des projections sont bornées autour de x, on peut alors écrire

$$0 \leq ||f_{Y*y_n}(v_n^v)|| \leq ||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y_n}}|| \cdot ||v_n^v|| \leq M \cdot ||v_n^v||$$

et en déduire que $\lim_n f_{Y*y_n}(v_n^v) = 0$.

Finalement en décomposant via f_* les images $f_{Y*y_n}(v_n)$ nous concluons que :

$$\lim_{n\to\infty} f_{Y*y_n}(v_n) = \lim_{n\to\infty} f_{Y*y_n}(v_n^h) + \lim_{n\to\infty} f_{Y*y_n}(v_n^v) = f_{X*_x}(v) + 0 = f_{X*_x}(v)$$

et donc f est semidifférentiable en x. □

Comme corollaire on en déduit tout de suite que :

Remarque 2. *Une projection π_X du S.D.C. est semidifférentiable en un point $x \in X$ si et seulement si elle est horizontalement-C^1 en x.* □

D'autre part quand (A, Σ) est (c)-régulière (sur (X)), on voit facilement que :

Remarque 3. *Toute fonction distance $\rho_X : T_X \to \{0\} \cup]0, \infty[$ est horizontalement-C^1 sur X.*

Preuve. Soit $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ une distribution canonique obtenue à partir du S.D.C. $\mathcal{T}$ auquel ρ_X appartient. Rappelons que pour tout $Y > X$, $\mathcal{D}_{XY}$ est par définition un sous-fibré vectoriel de $\ker \rho_{XY*}$.

Etant donnée une suite $\{(y_n, v_n)\} \subseteq TY$ telle que $\lim_n (y_n, v_n) = (x, v) \in TX$ et dont les vecteurs v_n sont horizontaux $v_n \in \mathcal{D}_{XY}(y_n)$, à partir de l'inclusion $\mathcal{D}_{XY}(y_n) \subseteq \ker \rho_{XY*y_n}$ on trouve que $v_n \in \ker \rho_{XY*y_n}$ et donc que $\rho_{XY*y_n}(v_n) = 0$.

On conclut alors que $\lim_n \rho_{XY*y_n}(v_n) = 0 = \rho_{XX*x}(v)$. $\square$

La notion de morphisme horizontalement-C^1 permet d'éviter les problèmes rencontrés dans la remarque 4 (section 2.1) et de trouver, quand on considère certaines homéomorphismes $f : A \to A'$ horizontalement-C^1, que ce type de régularité, contrairement à la semidifférentiabilité, peut se préserver par passage à l'application réciproque (théorème 1 dessous).

Definition 2. Un *homéomorphisme stratifié* est la donnée d'un morphisme stratifié contrôlé $f : (A, \Sigma) \to (A', \Sigma')$ tel que $f : A \to A'$ soit un homéomorphisme entre A et A' et tel que pour toute strate $X \in \Sigma$ la restriction $f_X : X \to X'$ soit un difféomorphisme de variétés lisses X et $X' = f(X)$.

Dans ce cas f induit (par image) sur (A', Σ') un S.D.C. $\mathcal{T}' := f_*(\mathcal{T})$ (voir chapitre III §3 prop. 1) avec lequel l'application $f^{-1} : (A', \Sigma') \to (A, \Sigma)$ est encore un morphisme stratifié contrôlé.

Avec ces notations on a alors les théorème et proposition suivants :

Theoreme 1. *Si $f : (A, \Sigma) \to (A', \Sigma')$ est un homéomorphisme stratifié horizontalement-C^1 sur un voisinage U de x dans X alors pour tout $z' \in U' = f(U)$ tel que $g(z') = ||f^{-1}_{*z'}||$ soit bornée dans un voisinage $V_{z'}$ de z' dans A', l'homéomorphisme stratifié f^{-1} est horizontalement-C^1 en z'.*

La preuve du théorème 1 réside essentiellement dans le fait qu'un homéomorphisme stratifié horizontalement-C^1 en un point x transforme une distribution canonique locale $\mathcal{D}_X$ définie autour de x en une distribution canonique locale $\mathcal{D}_{X'}$ définie autour de x'. Plus précisement on a :

Proposition 5. *Si $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ est une distribution canonique locale définie dans un voisinage W d'un point x dans A et $f : (A, \Sigma) \to (A', \Sigma')$ est un homéomorphisme stratifié horizontalement-C^1 sur un voisinage $U \subseteq W \cap X$ de x dans X par rapport à $\mathcal{D}_X$ alors la distribution $\mathcal{D}_{X'} = \{\mathcal{D}_{X'Y'}\}_{Y' \geq X'}$ définie dans le voisinage $W' = f(W)$ de $x' = f(x)$ dans A' :*

$$\mathcal{D}_{X'Y'}(y') := f_{Y*y}(\mathcal{D}_{XY}(y)) \qquad , \qquad \forall\, y' = f(y)$$

est une distribution canonique locale dans le voisinage W' de x'.

Preuve. Comme f est un homéomorphisme stratifié, il est immédiat d'en déduire que $\mathcal{D}_{X'}$ est une distribution d'espaces tangents vérifiant :

i) $\forall Y' \geq X'$, $\mathcal{D}_{X'Y'}$ est un sous-fibré de $\ker \rho_{X'Y'*}$ de même dimension que TX;

ii) $\mathcal{D}_{X'X'}(z') = T_{z'}X'$ pour tout $z' \in U' \subseteq X'$;

iii) $T_{y'}Y' = \mathcal{D}_{X'Y'}(y) \oplus \ker \rho_{X'Y'*y'}$ est une somme directe $\forall y' \in Y'$ dans $V' = f(V)$;

iv) la restriction $\pi_{X'Y'*y'|} : \mathcal{D}_{X'Y'}(y') \to T_{z'}X'$ où $z' = \pi_{X'Y'}(y')$ est un isomorphisme;

v) pour tout champ de vecteurs $\xi_{X'}$ sur X', la formule

$$\xi_{Y'}(y') := \mathcal{D}_{X'Y'}(y') \cap \pi^{-1}_{X'Y'*y'}(\xi_{X'}(z'))\ , \quad \text{où} \quad z = \pi_{X'}(y')\,,$$

définit un relèvement $\xi' = \{\xi_{Y'}\}_{Y' \geq X'}$ de $\xi_{X'}$ qui est contrôlé par rapport à $\mathcal{T}'$.

Alors afin de déduire que $\mathcal{D}_{X'}$ est une distribution canonique locale autour de x' (chapitre I §5) il nous suffit de vérifier la (a)-régularité de $\mathcal{D}_{X'}$ dans U, i.e. la condition de limite :

$$\lim_{y' \to z'} \mathcal{D}_{X'}(y') = T_{z'}X' \qquad , \qquad \forall z' \in U' = f(U)\,.$$

Considérons alors une suite de points $\{y'_n\} \subseteq W' = f(W')$ telle que $\lim_n y'_n = z'$ et montrons que $\lim_n \mathcal{D}_{X'}(y'_n) = T_{z'}X'$.

Fixons alors un vecteur $v' \in T_{z'}X'$. L'application f étant bijective on peut écrire $y'_n = f(y_n)$ avec $\lim_n y_n = z$, $T_{z'}X' = f_{X*z}(T_zX)$, et $v' = f_{X*z}(v)$ avec $v \in T_zX$.

Comme $\mathcal{D}_X$ est une distribution canonique et $\lim_n y_n = z$ il existe une suite $v_n \in \mathcal{D}_{XY}(y_n)$ telle que $\lim_n v_n = v$. D'autre part, f étant horizontalement-C^1 en z', on trouve

$$\lim_{y_n \to z'} f_{Y*y_n}(v_n) = f_{X*z'}(v) = v'.$$

Alors la suite de vecteurs

$$v'_n := f_{Y*y_n}(v_n) \in f_{Y*y_n}(\mathcal{D}_{XY}(y_n)) = \mathcal{D}_{X'Y'}(y'_n)$$

vérifie $\lim_n v'_n = v'$, donc $T_{z'}X' = \lim_n \mathcal{D}_{X'Y'}(y'_n)$, ce qui complète la preuve. $\square$

Preuve (du théorème). Soit $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ la distribution canonique locale par rapport à laquelle f est horizontalement-C^1 en x. En considérant autour de $x' = f(x)$ la distribution canonique locale $\mathcal{D}_{X'} = \{\mathcal{D}_{X'Y'}\}_{Y' \geq X'}$ définie en tout point $y' = f(y)$ par

$$\mathcal{D}_{X'Y'}(y') := f_{Y*y}(\mathcal{D}_{XY}(y))$$

on trouve que f^{-1} est horizontalement-C^1 autour de x' par rapport à $\mathcal{D}_{X'}$.

En fait, fixons un point $z' \in U'$, un vecteur $v' \in T_{z'}X'$, une strate $Y' > X'$ et une suite $\{(y'_n, v'_n)\}$ dans Y' telle que $\lim_n (y'_n, v'_n) = (z', v')$ avec $v'_n \in \mathcal{D}_{X'Y'}(y'_n)$.

Comme f est un homéomorphisme stratifié, nous pouvons écrire :

$$z' = f(z)\,, \quad X' = f(X)\,, \quad Y' = f(Y)\,, \quad v' = f_{X*z}(v)\,, \quad y'_n = f(y_n)\,, \quad v'_n = f_{Y*y_n}(v_n)$$

avec

$$z \in X\ , \qquad X, Y \in \Sigma\ , \qquad Y > X\ , \qquad v \in T_zX\ , \qquad y_n \in Y\ , \qquad v_n \in \mathcal{D}_{XY}(y_n)\,,$$

de sorte que la condition *"f^{-1} est horizontalement-C^1 en z'"* puisse être réécrite de manière équivalente sous la forme :

$$\lim_{n \to \infty} f^{-1}_{Y'*y'_n}(v'_n) = f^{-1}_{X'*z'}(v') \iff \lim_{n \to \infty} v_n = v\,.$$

Comme $f^{-1}_{Y'*}$ est bornée dans le voisinage $V_{z'}$ de z' dans A', on trouve

$$||v_n|| \leq ||f^{-1}_{Y'*y'_n}(v'_n)|| \leq ||f^{-1}_{Y'*y'_n}|| \cdot ||v'_n|| \leq M \cdot (||v'|| + 1)$$

et donc $\{v_n\}$ est également bornée.

Montrons alors que $\{v_n\}$ s'accumule sur un point unique $v = f^{-1}_{X'*z'}(v')$.

En fait, $\forall u \in T_z X$ limite d'une sous-suite convergente $\{v_{n_h}\}_h$ de $\{v_n\}$, comme f est horizontalement-C^1 en z, on déduit de l'égalité $u = \lim_h v_{n_h}$ que :

$$f_{X*z}(u) = \lim_{h\to\infty} f_{Y*y_h}(v_{n_h}) = \lim_{h\to\infty} v'_{n_h} = v'$$

et donc que $u = f^{-1}_{X'*z'}(v') = v$. On en conclut alors que la suite bornée $\{v_n\}$ admet un unique point d'accumulation v, donc $\lim_n v_n = v$ et f^{-1} est horizontalement-C^1 en $z' \in U' = f(U)$. $\square$

Remarque 5. De façon analogue à la définition donnée pour les morphismes *"horizontalement-C^1 (en x)"* on pourrait définir une condition de régularité du type *"verticalement-C^1 (en x)"*, afin d'obtenir un théorème du type *"f est de classe C^1 en x si et seulement si f est horizontalement-C^1 en x et verticalement-C^1 en x"*.

Une telle idée me semble s'adapter plus efficacement à une classe de morphismes beaucoup plus réguliers que ceux considérés ici. Nous ne la développerons donc pas dans ce travail. (*)

Une question importante se pose alors de façon spontanée :

Problème. *Un morphisme stratifié $f : A \to A'$ est-il toujours horizontalement-C^1 ?*

Comme on le verra dans la suite, la réponse à cette question dépend d'un problème plus général et *très profond.*

2.3 : Morphismes faiblement semidifférentiables

En restant fidèles à notre but d'étudier des conditions de régularité pour des morphismes stratifiés, à mi-chemin entre continuité et régularité C^1, nous introduisons dans cette section la notion de *faible semidifférentiabilité.* Les remarques 1 et 2 et les propositions 5 et 6 ci-dessous précisent la signification de cette notion et ses liens étroits avec la notion de morphisme horizontalement-C^1.

Definition 2. Soit X une strate de A (et x un point de X). Un morphisme stratifié $f : A \to A'$ est dit *faiblement semidifférentiable sur X (resp. en $x \in X$)* si pour tout $Y > X$ il existe un sous-ensemble ouvert U_{XY} de TY tel que

1) U_{XY} est un voisinage ouvert de la 0-section $Y_0 = \{(y, 0) \,|\, y \in Y\}$;

2) $TX \subseteq \overline{U_{XY}}$;

3) la restriction $f_{Y*|U_{XY}} : U_{XY} \to TY'$ se prolonge par continuité sur TX (resp. sur $\{x\}\times T_x X$) par l'application $f_{X*} : TX \to TX'$; i.e. pour toute suite $\{(y_n, v_n)\}_n$ dans U_{XY} telle que $\lim_n (y_n, v_n) = (x, v) \in \{x\} \times T_x X$ (resp. $\in TX$) on a aussi $\lim_n f_{Y*y_n}(v_n) = f_{X*x}(v)$.

Nous avons alors les relations suivantes :

Remarque 1. *Tout morphisme stratifié semidifférentiable est faiblement semidifférentiable.* (En prenant $U_{XY} = TY$ tout entier). $\square$

(*) Cependant nous introduirons à la section 2.5. les morphismes *fortement semidifférentiables* qui sont plus proches d'une telle classe.

Remarque 2. *Une application faiblement semidifférentiable n'est pas nécessairement semidifférentiable* (voir l'exemple 1). □

Proposition 5. *Tout morphisme stratifié horizontalement-C^1 sur une strate X est faiblement semidifférentiable sur X.*

Preuve. Soit $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ une distribution canonique par rapport à laquelle f est horizontalement-C^1 sur X. Considérons, pour toute strate $Y > X$, le sous-ensemble ouvert U_{XY} de TY défini par :

$$U_{XY} = \bigcup_{y \in Y} \{y\} \times \Big[\mathcal{D}_{XY}(y) \oplus B\big(0_y, \delta(y)\big)\Big]$$

où $B\big(0_y, \delta(y)\big)$ désigne la boule ouverte dans l'espace tangent à la fibre vertical $\ker \pi_{XY*y}$ et de rayon $\delta(y) = \frac{\rho_{XY}(y)}{1+||f_{Y*y|\ker \pi_{XY*y}}||}$.

Il est clair que U_{XY} vérifie les assertions 1) et 2) de la définition 2. Afin de vérifier l'assertion 3), considérons une suite $\{(y_n, v_n)\} \subseteq U_{XY}$ telle que $\lim_n (y_n, v_n) = (x, v) \in TX$.

En décomposant tout vecteur $v_n = v_n^h + v_n^v \in \mathcal{D}_{XY}(y_n) \oplus \ker \pi_{XY*y_n}$ et en utilisant

$$\lim_n v_n = v \in T_x X \quad \text{et} \quad \lim_n \mathcal{D}_{XY}(y_n) = T_x X$$

on obtient

$$\lim_n v_n^h = v \quad \text{et} \quad \lim_n v_n^v = 0\,,$$

de sorte que comme f est horizontalement-C^1 sur X et que $v_n^h \in \mathcal{D}_{XY}(y_n)$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité :

$$\lim_{(y_n, v_n^h) \to (x,v)} f_{Y*y_n}(v_n^h) = f_{X*x}(v).$$

D'autre part, notre choix de la fonction $\delta(y)$ nous donne :

$$0 \leq ||f_{Y*y_n}(v_n^v)|| = ||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y_n}}(v_n^v)|| \leq$$

$$||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y_n}}|| \cdot ||v_n^v|| < ||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y_n}}|| \cdot \delta(y_n) = \frac{||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y_n}}||}{1 + ||f_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y_n}}||} \cdot \rho_{XY}(y_n)$$

et donc

$$\lim_n f_{Y*y_n}(v_n^v) = 0.$$

En conclusion, la suite $\{(y_n, v_n)\} \subseteq U_{XY}$ vérifie

$$\lim_n f_{Y*y_n}(v_n) = \lim_n f_{Y*y_n}(v_n^h) + \lim_n f_{Y*y_n}(v_n^v) = f_{X*x}(v) + 0 = f_{X*x}(v)$$

et donc f est faiblement semidifférentiable sur X. □

L'idée de la preuve de la proposition ci-dessus est très naturelle.

Pour toute strate $Y \geq X$, on peut épaissir le sous-fibré $\mathcal{D}_{XY}$ de TY le long de la direction de $\ker \pi_{XY*}$ de sorte à déterminer l'ouvert U_{XY} convenable pour la faible semi différentiabilité sur X. En particulier, afin de conserver l'extension par continuité sur TX de la restriction $f_{Y*y|\mathcal{D}_{XY} \cup TX}$ après l'épaississement à $f_{Y*y|U_{XY} \cup TX}$, il faut s'assurer que les vecteurs verticaux qu'on va ajouter tendent vers 0 (pour $y \to x$) de manière suffisamment rapide pour "tuer" l'éventuel ordre de divergence de la différentielle $||f_{Y*y|\ker \pi_{XY*y}}||$ le long des directions verticales. La construction des ensembles U_{XY} rappelle, certaines constructions dans la théorie à frange (*"fringed sets"*) due à Goresky-MacPherson en **[GM]** (chapitre 5) et utilisés pour étudier les *"Local and Tangential Morse Data"* (Chapitres 6 et 7).

Il n'est pas clair que la réciproque de la proposition précédente soit vérifiée car celà semble dépendre de certaines conditions supplémentaires sur la "forme géométrique" des U_{XY}.

Une condition suffisante pour que l'implication réciproque soit vérifiée est (par exemple) l'existence d'une distribution canonique $\mathcal{D}_X$ entièrement contenue dans l'ensemble $\cup_{Y\geq X} U_{XY}$ de faible semidifférentiabilité de f, mais cette condition n'est pas nécessaire(*).

Proposition 6. *Un morphisme stratifié $f : A \to A'$ est semidifférentiable (en un point $x \in X$) si et seulement s'il est faiblement semidifférentiable et il existe un voisinage V de x dans A tel que $\forall\, Y > X$, la fonction $h_{XY}(y) = ||f_{Y*y}||$ soit bornée (sur $V \cap Y$).*

Preuve. Considérons une suite $\{(y_n, v_n)\}_n$ de points de TY convergent vers un point $(x, v) \in TX$, et décomposons chaque v_n en une somme du type

$$v_n = v_n' + v_n'' \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} (y_n, v_n') \in U_{XY} \\ \\ \lim_n v_n' = v\ . \end{cases}$$

On trouve alors $\lim_n v_n'' = 0$.

D'autre part, comme par hypothèse il existe un $M > 0$ tel que $h_{XY}(y) = ||f_{Y*y}|| \leq M$ (dans $V \cap Y$), on en déduit que

$$||f_{Y*y_n}(v_n'')|| \leq ||f_{Y*y_n}|| \cdot ||v_n''|| \leq\ M \cdot ||v_n''||$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} f_{Y*y_n}(v_n'') = 0\,.$$

En décomposant les images $f_{Y*y_n}(v_n)$ des vecteurs v_n, on obtient ainsi l'existence de la limite $\lim_n f_{Y*y_n}(v_n)$

$$\lim_{n\to\infty} f_{Y*y_n}(v_n) = \lim_{n\to\infty} f_{Y*y_n}(v_n') + \lim_{n\to\infty} f_{Y*y_n}(v_n'') = \lim_n f_{Y*y_n}(v_n').$$

Enfin, comme $(y_n, v_n') \in U_{XY}$ avec $\lim_n v_n' = v$, la condition 3) permet d'obtenir

$$\lim_{n\to\infty} f_{Y*y_n}(v_n') = f_{X*x}(v)$$

et ceci nous permet de conclure que :

$$\lim_{n\to\infty} f_{Y*y_n}(v_n) = f_{X*x}(v)\,. \qquad \square$$

(*) Une réciproque éventuelle de cette propriété présente des difficultées similaires à celle du "*problème*" de la sect. 2.2

2.4 : Morphismes stratifiés $\mathcal{F}$-semidifférentiables.

Dans cette section, nous introduisons une condition de régularité pour des morphismes stratifiés, condition qui est associée à un feuilletage $\mathcal{F}$ et qui permettra de caractériser la semidifférentiabilité et les morphismes horizontalement-C^1. Dans un certain sens, cette condition généralise ces dernières notions.

Comme aux sections 2.1, 2.2, et 2.3 précédentes A désignera un sous-ensemble d'un espace euclidien $\mathbb{R}^n$ et Σ une stratification de A.

Dans toute la section nous noterons $\mathcal{F} = \{F_\beta\}_\beta$ un feuilletage en sous-variétés F_β lisses de dimension h ($\leq \dim(A,\Sigma)$) d'un sous-ensemble ouvert U de A.

On considèrera toujours l'ouvert U de A comme étant stratifié par la stratification naturelle $\Sigma_U = \{Y \cap U\}_{Y\in\Sigma}$ induite par Σ sur U. Enfin, pour tout point $y \in U$, on notera F_y la feuille de $\mathcal{F}$ qui passe par $y \in U$; on peut alors désigner le feuilletage $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F} = \{F_y\}_{y\in U}$.

Definition 1. On dit que $\mathcal{F}$ est *un feuilletage stratifié compatible avec* Σ *(ou encore avec* Σ_U*)* si et seulement si toute feuille $F_y \in \mathcal{F}$ est entièrement contenue dans l'unique strate Y de Σ (ou encore de Σ_U) qui contient y.

Les feuilletages considérés seront toujours compatibles avec la stratification Σ (ou bien Σ_U) fixée au départ. On convient donc de dire simplement *"feuilletage stratifié"* en sous-entendant aussi que la condition de compatibilité (avec Σ ou Σ_U) est vérifiée.

Un feuilletage stratifié $\mathcal{F}$ de U détermine alors une famille de feuilletages $\{\mathcal{F}_Y\}_{Y\in\Sigma}$ où pour tout $Y \in \Sigma$, $\mathcal{F}_Y := \{F_y\}_{y\in U\cap Y}$ est l'ensemble des feuilles contenues dans la strate Y.

Nous dirons que *le feuilletage stratifié* $\mathcal{F}$ *est de classe* $C^{0,1}$ si pour toute strate Y le feuilletage $\mathcal{F}_Y$ est de classe $C^{0,1}$ **[Go]** (les variétés F_y, de classe C^1, "varient de manière C^0").

Les feuilletages stratifiés considérés seront toujours de classe $C^{0,1}$.

Soit maintenant x un point de U et $X \in \Sigma$ la strate contenant x.

Definition 2. Le feuilletage stratifié $\mathcal{F}$ sera dit (a)*-régulier en* x si et seulement si pour toute suite $\{y_n\} \subseteq U$ convergente vers x ($\lim_n y_n = x$), telle que la limite $\lim_n T_{y_n}F_{y_n}$ existe dans la grassmannienne $\mathbb{G}_h^n$, alors l'implication suivante est valable :

$$\lim\nolimits_n T_{y_n}F_{y_n} = \tau \in \mathbb{G}_h^n \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \tau \subset T_xX & \text{si } h < \dim X \\ \tau = T_xX & \text{si } h = \dim X \\ \tau \supset T_xX & \text{si } h > \dim X \end{cases}$$

Le feuilletage $\mathcal{F}$ sera dit (a)*-régulier sur* X *(ou sur* $X\cap U$*)* s'il est (a)-régulier en tout point $x \in X \cap U$. Enfin $\mathcal{F}$ sera dit (a)*-régulier* quand il est (a)-régulier sur X, $\forall X \in \Sigma$ (i.e. quand il est (a)-régulier sur toute strate $X \cap U$ de Σ_U).

Remarque 1. *Si* $\dim \mathcal{F} = \dim X = h$, $\mathcal{F}$ *est* (a)*-régulier en* $x \in X$ *(resp. sur* X*) si et seulement si* $\lim\limits_{y\to x} T_yF_y = T_xX$ *dans* $\mathbb{G}_h^n$. $\square$

Dans le cas d'un feuilletage induit par une submersion stratifiée, la notion de feuilletage (a)-régulier généralise la condition (a_f) de Thom :

Remarque 2. *Une submersion stratifiée surjective,* $f : (A,\Sigma) \to (A',\Sigma')$*, et de corang constant* h *vérifie la condition* (a_f) *de Thom en un point* x *d'une strate* X *de* A

si et seulement si $\forall Y > X$ *le feuilletage stratifié* $\mathcal{F}(f) = \{f^{-1}(a')\}_{a' \in A'}$ *est* (a)*-régulier en* x.

Preuve. Comme f est une submersion stratifiée de corang constant h, alors $\mathcal{F}(f) = \{f^{-1}(a')\}_{a' \in A'}$ est un feuilletage stratifié de variétés lisses ayant toutes pour dimension h.

Donc la condition (a_f) de Thom en $x \in X$ est valable si et seulement si la limite $\lim_{y \to x} T_y f^{-1}(y') = T_x X$, i.e. si et seulement si $\mathcal{F}(f)$ est (a)-régulier en x. □

Definition 3. *Le fibré tangent* $T\mathcal{F}$ à un feuilletage stratifié $\mathcal{F}$ est le sous-fibré de TU de dimension h, constitué par tous les vecteurs tangents aux feuilles de $\mathcal{F}$. Donc : $T\mathcal{F} := \cup_{y \in U} \cup_{y \in Y} \{y\} \times T_y F_y$.

Considérons alors $\mathcal{F}$ un feuilletage stratifié (a)-régulier d'un voisinage ouvert U (dans A) d'un point x d'une strate X et soit $f : (A, \Sigma) \to (A', \Sigma')$ un morphisme stratifié.

Definition 4. On dira que le morphisme f est $\mathcal{F}$*-semidifférentiable en* x si, pour chaque $(x, v) \in \{x\} \times T_x X \subseteq T(X \cap U)$ et pour toute suite $\{(y_n, v_n)\} \subseteq T\mathcal{F}$ telle que $\lim_n (y_n, v_n) = (x, v)$, on a aussi

$$\lim_n f_{Y_n * y_n}(v_n) = f_{X * x}(v)$$

où (pour tout $n \in \mathbb{N}$) Y_n désigne la strate de Σ_U qui contient y_n.

Nous dirons que f est $\mathcal{F}$-semidifférentiable sur X (ou sur $X \cap U$) si f est$\mathcal{F}$-semidifférentiable en tout point $x \in X \cap U$ et enfin on dira que f est $\mathcal{F}$*-semidifférentiable* (en sous-entendant *sur* $X \cap U$) si f est $\mathcal{F}$-semidifférentiable sur X pour toute $X \in \Sigma$ (i.e. sur toute strate $X \cap U$ de Σ_U).

La notion de $\mathcal{F}$-semidifférentiable (en un point $x \in X$) généralise celle de semidifférentiabilité et de morphisme horizontalement-C^1 (au point $x \in X$).

Afin d'éclaircir la première de ces affirmations, notons $\forall Y \in \Sigma$, $\{Y\}$ le feuilletage trivial de la strate Y et observons qu'on a immédiatement :

Remarque 3. *La stratification* Σ *est* (a)*-régulière (en* $x \in U \cap X$*) si et seulement si chaque feuilletage trivial* $\{U \cap Y\}$ *est* (a)*-régulier (en* $x \in U \cap X$*).* □

Alors on a :

Proposition 1. *Un morphisme stratifié* $f : (A, \Sigma) \to (A', \Sigma')$ *est semidifférentiable (en* $x \in X$*) si et seulement si pour toute strate* $Y \in \Sigma$ *(avec* $Y > X$*) il est* $\{Y\}$*-différentiable (en* x*).*

Preuve. Cela découle des définitions en observant que si $\mathcal{F} = \{Y\}$ alors $T\mathcal{F} = \cup_{y \in Y} \{y\} \times T_y Y = TY$. □

Soit U un voisinage ouvert de $x \in X$ dans A, soit $\mathcal{F} = \{F_y\}_{y \in U}$ un feuilletage (a)-régulier de dimension $\dim F_y = \dim X$ et transverse aux fibres de la projection π_X du S.D.C. $\mathcal{T}$ de (A, Σ). En considérant la distribution d'espaces tangents $\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ de plan tangent aux feuilles de $\mathcal{F}$, on a :

Proposition 2. *Un morphisme stratifié* $f : (A, \Sigma) \to (A', \Sigma')$ *est horizontalement-*C^1 *en* x *(sur* $X \cap U$*) par rapport à* $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ *si et seulement s'il est* $\mathcal{F}$*-semidifférentiable en* x *(sur* $X \cap U$*).*

Preuve. Remarquons seulement que si $\dim \mathcal{F} = \dim X$ et si $\mathcal{F}$ est (a)-régulier alors la distribution $\mathcal{D}(\mathcal{F}) := \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ définie $\forall Y > X$ par $\mathcal{D}_{XY}(y) := T_y F_y$ est une distribution canonique sur le voisinage ouvert U de x et le sous-fibré $\cup_{y \in U} \{y\} \times \mathcal{D}_X(y)$

coïncide avec l'espace tangent $T\mathcal{F}$ au feuilletage $\mathcal{F}$. La preuve découle alors facilement des définitions. $\square$

2.5 : Morphismes fortement semidifférentiables

Dans cette section, nous examinons une dernière condition de régularité pour un morphisme stratifié $f = \cup_{X\in\Sigma} f_X : (A,\Sigma) \to (A,\Sigma')$. Cette notion, la "forte semidifférentiabilité" nous semble convenable dans le cas où on dispose vraiment de beaucoup de régularité soit tant sur l'application f que pour les stratification (A,Σ), (A,Σ'), car elle assure l'existence d'une application différentielle de *la fibre de Nash* de la stratification (A,Σ) dans la fibre de Nash de (A',Σ'). Par exemple dans un contexte analytique de deux stratifications dont les strates sont analytiques et dont la restriction des morphismes à toute strate est une application analytique.

La "forte semidifférentiabilité" nécessite en particulier que la différentielle $f_* = \bigcup_{Y\in\Sigma} f_{Y*}$ a ses normes $\{||f_{Y*y}||\}$ bornées.

La définition 1 ci-dessous est l'analogue dans le cas lisse de la notion de cône tangent C_4 introduite par Whitney en 1965 ([**Wh**]$_1$ §3, voir $C_4(Y,x)$) dans le contexte des variétés analytiques.

Definition 1. Soit x un point d'une strate X de A et soit Y une strate de A telle que $Y > X$. La *fibre de Nash* $C_x(Y)$ *de* Y *en* x est l'ensemble de tous les vecteurs possibles $v = \lim_n v_n$ obtenus comme limites d'une suite $\{v_n\}$ de vecteurs tangents à Y, $v_n \in T_{y_n}Y$ avec $\lim_n y_n = x$:

$$C_x(Y) := \left\{ v \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists \text{ une suite } \{(y_n,v_n)\} \subseteq TY \quad \text{telle que } \lim_n (y_n,v_n) = (x,v) \right\}.$$

On définit alors le *fibré de Nash* $C_X(Y)$ *de* Y *sur* x par :

$$C_X(Y) := \bigcup_{x\in X} \{x\} \times C_x(Y).$$

Remarque 1. *$C_x(Y)$ ne dépend pas de la strate X contenant x.* $\square$

Il découle de la définition, que pour tout couple de strates $X < Z$, on a $C_X(Z) \subseteq \overline{TZ}$, et de plus on voit facilement que :

Remarque 2. *Pour toute $Z \in \Sigma$, $\overline{TZ}$ est la réunion disjointe*

$$\overline{TZ} = TZ \bigcup \left[\bigcup_{X\in\Sigma\ ,\ X<Z} C_X(Z) \right]. \quad \square$$

D'autre part, on ne doit pas s'attendre à ce que la partition ci-dessus donne une stratification de $\overline{TZ}$. En fait, dans notre cas où la variété considérée Z est (seulement) de classe C^∞, chaque fibré de Nash $C_X(Z)$ (avec $X < Z$) n'est pas en général une variété mais un ensemble vraiment assez arbitraire comme l'ont prouvé M. Kwiecinski et D. Trotman [**KT**].

Remarque 3. *Si $X < Y$ est (a)-régulier en x (resp. sur X) alors $T_xX \subseteq C_x(Y)$ (resp. $TX \subseteq C_X(Y)$).* $\square$

Remarque 4. *Si $x \in X$, $X < Y < Z$ et $Y < Z$ est (a)-régulier alors*

$$C_x(Y) \subseteq C_x(Z) \quad et \quad C_X(Y) \subseteq C_X(Z)\,.$$

Preuve. Soit $v \in C_x(Y)$, considérons une suite $\{(y_n, v_n)\}_n \subseteq TY$ telle que la limite $\lim_n (y_n, v_n) = (x, v)$.

Comme $Z > Y$ est (a)-régulier en tout $y_n \in Y$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite $\{(z_n^h, v_n^h)\}_h$ telle que $\lim_h (z_n^h, v_n^h) = (y_n, v_n)$.

Comme $X \cap Y = \emptyset$, $x \in X$ et $y_n \in Y$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $\epsilon_n = ||(x, v) - (y_n, v_n)||$ est strictement positif. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, en considérant la suite $\{(z_n^h, v_n^h)\}_h \to (y_n, v_n)$ on peut fixer un index h_n tel que, pour tout $h \geq h_n$, on ait

$$||(y_n, v_n) - (z_n^h, v_n^h)|| < \epsilon_n\,.$$

De cette façon, on trouve la suite $\{(z_n^{h_n}, v_n^{h_n})\}_n \subseteq TZ$ vérifiant

$$||(x,v) - (z_n^{h_n}, v_n^{h_n})|| \leq ||(x,v) - (y_n, v_n)|| + ||(y_n, v_n) - (z_n^{h_n}, v_n^{h_n})|| \leq 2 \cdot ||(x,v) - (y_n, v_n)||$$

et alors $\lim_n (z_n^{h_n}, v_n^{h_n}) = (x, v)$ et donc par définition $(x, v) \in C_x(Z)$. $\square$

Definition 2. Soit X une strate de A (et x un point de X). Une application stratifiée, continue, lisse sur les strates $f : A \to A'$ est dite *fortement semidifférentiable en x* si elle vérifie les conditions suivantes :

i) $\forall\, Y > X$ et $\forall\, \{(y_n, v_n)\} \subseteq TY$ telle que $\lim_n (y_n, v_n) = (x, v) \in \{x\} \times C_x(Y)$

$$\text{on a} \quad : \quad \begin{cases} \text{la limite} \quad (\mathrm{L})_{(x,v)} : \quad \lim\limits_{(y_n, v_n) \to (x,v)} f_{Y*y_n}(v_n) \quad \text{existe} \\ \\ \text{et de plus} \\ \\ (x,v) \in TX \quad \Longrightarrow \quad \lim\limits_{(y_n, v_n) \to (x,v)} f_{Y*y_n}(v_n) = f_{X*x}(v) \end{cases}$$

ii) $\forall Z \geq Y > X$ et pour tout couple de suites $\{(y_n, v_n)\} \subseteq TY$ et $\{(z_n, u_n)\} \subseteq TZ$ telles que

$$\lim_n (y_n, v_n) = \lim_n (z_n, u_n) = (x, v) \in C_x(Y) \cap C_x(Z)$$

on a aussi

$$\lim_n f_{Y*y_n}(v_n) = \lim_n f_{Z*z_n}(u_n).$$

Remarquons ici que $C_x(Y) \subseteq C_x(Z)$ (remarque 4).

On dira enfin que f est *fortement semidifférentiable sur X* (resp. *sur* (A, Σ)) si f est fortement semidifférentiable sur X (resp. sur X , $\forall\, X \in \Sigma$).

La condition *ii)* de la définition 1 dit que la limite $(\mathrm{L})_{(x,v)}$ ne dépend que de (x, v), en particulier elle ne dépend ni de la suite $\{(y_n, v_n)\} \subseteq TY$ approchant (x, v), ni de la strate Y contenant $\{y_n\}$ et telle que $(x, v) \in C_x(Y)$.

Remarque 5. *$f : (A, \Sigma) \to (A', \Sigma')$ est fortement semidifférentiable en $x \in X$ (resp. sur X) si et seulement si pour tout $Y > X$ la différentielle $f_{Y*} : TY \to TY'$ admet un prolongement continu sur $C_x(Y) \subseteq \overline{TY}$, définit par :*

$$\begin{array}{cccc} f_{Y*x} : & C_x(Y) & \longrightarrow & C_{x'}(Y') \\ \\ & v = \lim_n v_n & \longmapsto & \lim_n f_{Y*y_n}(v_n) \end{array}$$

(resp.

$$\begin{array}{cccc} f_{Y*X}: & C_X(Y) & \longrightarrow & C_{X'}(Y') \\ & (x,v)=(x,\lim_n v_n) & \longmapsto & (f(x),\lim_n f_{Y*y_n}(v_n)) \end{array} \quad).$$

Preuve. C'est immédiat. □

Remarque 6. Avec un langage un peu moins formel et en considérant des limites d'applications linéaires dans un sens ponctuel, on aurait pu définir de manière équivalente f fortement semidifférentiable en x par les conditions suivantes :

i) pour toute strate X et pour toute strate $Z > X$, maximale telle que $Z > X$, on a : pour toute suite $\{z_n\}_n$ dans Z telle que les limites suivantes existent

$$\lim_n z_n = x \in X \qquad \lim_n z'_n = x' \in X'$$

$$\lim_n T_{z_n} Z = \tau \qquad \lim_n T_{z'_n} Z' = \tau'$$

où $z'_n = f(z_n)$, (ici $Z' \geq X'$ automatiquement), alors la limite des applications linéaires $f_{Z*z_n} : T_{z_n} Z \to T_{z'_n} Z'$

$$\lim_n f_{Z*z_n} : \tau \to \tau' \quad \text{existe et est un prolongement de} \quad f_{X*x} : T_x X \to T_{x'} X'$$

ii) pour toute autre strate Y tel que $X < Y \leq Z$ on a :
pour toute suite $\{y_n\}_n$ dans Y telle que les limites suivantes existent

$$\lim_n y_n = x \qquad \lim_n y'_n = x'$$

$$\lim_n T_{y_n} Y = \sigma \qquad \lim_n T_{y'_n} Y' = \sigma'$$

(où $y'_n = f(y_n)$), la limite des applications linéaires

$$\lim_n f_{Y*y_n} : \sigma \to \sigma' \quad \begin{array}{ll} \text{existe aussi et est un prolongement de :} & f_{X*x} : T_x X \to T_{x'} X' \\ \text{et est de plus une restriction de :} & \lim_n f_{Z*z_n} : \tau \to \tau'. \end{array}$$

Exemple 1. Soit $(A, \Sigma) = (A', \Sigma)$ la stratification où $A = A' = \mathbb{R}^2$ et où les strates de Σ sont les quatre quadrants ouverts de dimension 2 $\{Z_i \mid i = 1, \ldots, 4\}$, les quatre demi-axes ouverts de dimension 1 $\{Y_i \mid i = 1, \ldots, 4\}$, et l'origine $X = \{0\}$, i.e.

$$\Sigma = \{\, Z_i\ ,\ Y_i\ ,\ X = 0 \,|\, i = 1, \ldots, 4\}.$$

Alors l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f : (A,\Sigma) \longrightarrow (A,\Sigma) \quad , \quad f(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y) = (x, 2y) & \text{sur } \overline{Z_1} \\ f_2(x,y) = (3x, 2y) & \text{sur } \overline{Z_2} \\ f_3(x,y) = (3x, 4y) & \text{sur } \overline{Z_3} \\ f_4(x,y) = (x, 4y) & \text{sur } \overline{Z_4} \end{cases}$$

est un morphisme stratifié qui préserve les strates ($f(S) = S$ pour toute strate $S \in \Sigma$) et qui induit sur les strates Z_i les applications différentielles $f_{i*z} : T_zZ_i = \mathbb{R}^2 \to T_zZ_i = \mathbb{R}^2$ (bornées en norme) telles que pour tout $i, j = 1, \ldots, 4$ (avec $i \neq j$), en notant Y_h le demi-axe 1-dimensionel $\subseteq \overline{Z_i} \cap \overline{Z_j}$, on ait

$$\left[\lim_{\substack{z\to y\\ z\in Z_i}} f_{i*z}\right]\Big|_{T_yY_h} = \left[\lim_{\substack{z\to y\\ z\in Z_j}} f_{j*z}\right]\Big|_{T_yY_h} = \left[f_{Y_h}\right]_{*y} \ : \ T_yY_h \longrightarrow T_{y'}Y_h \quad , \quad \forall\, y \in Y_h$$

i.e., les restrictions à T_yY_h (remarquons que $\forall i \ \lim_{z\to y} T_zZ_i \supseteq T_yY_h$) des limites des applications différentielles f_{i*z} coïncident avec l'application $(f_{Y_h})_{*y}$.

D'autre part, pour tout point y dans le 1-squelette $A^{(1)} = 0 \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times 0$ de (A, Σ), $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ n'est pas une application de classe C^1 en y. $\square$

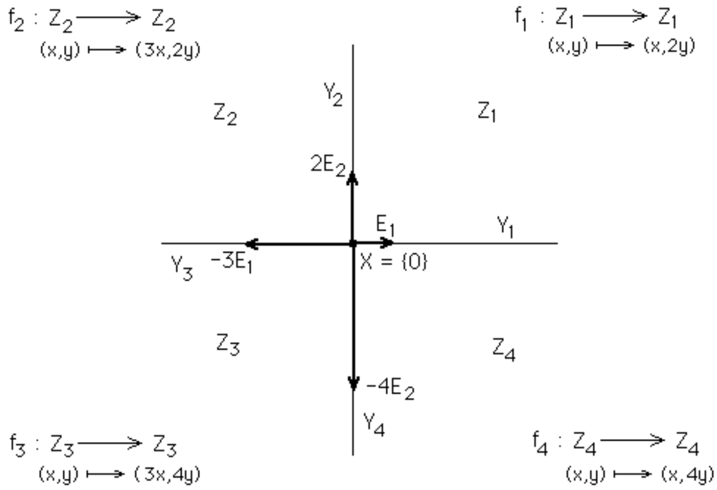

figure 3

On a facilement :

Remarque 7. *Tout morphisme composé de deux morphismes fortement semidifférentiables l'est aussi.* $\square$

Remarque 8. *Tout morphisme stratifié fortement semidifférentiable est semidifférentiable.* $\square$

Les conditions de semidifférentiabilité et de forte semidifférentiabilité, réclament toutes deux, comme on l'a déjà remarqué, que le morphisme en question $f : A \to A'$ ait ses dérivées bornées et elles pourraient ainsi sembler équivalentes.

La différence entre ces deux notions est : étant données deux strates $X < Y$ de A et $x \in X$, la semidifférentiabilité n'impose que des conditions de limites "le long de la petite strate" X sans aucune restriction sur les limites le long des directions restantes, alors que la forte semidifférentiabilité impose la coïncidence des applications linéaires limites :

$$\lim_n f_{Y*y_n} = \lim_n f_{Y_1*y_{1\,n}} : \tau \to \tau'$$

pour toute autre strate $Y_1 > X$ de même dimension que Y et pour tout couple de suites $\{y_n\} \subseteq Y$ et $\{y_{1\,n}\} \subseteq Y_1$ convergeant vers x avec les mêmes limites des plans tangents du domaine et du codomaine,

$$\lim_n T_{y_n} Y = \lim_n T_{y_{1\,n}} Y_1 = \tau \quad \text{et} \quad \lim_n T_{y'_n} Y' = \lim_n T_{y'_{1\,n}} Y'_1 = \tau'$$

L'exemple qui suit exhibe un morphisme stratifié semidifférentiable et non fortement semidifférentiable.

Exemple 2. Soit $A = A' \subseteq R^2$, la stratification ayant les deux strates de dimension 1 : $Y = \{\, (y,0) \,|\, y > 0 \,\}$, $Y_1 = \{\, (y_1, y_1^2) \mid y_1 > 0 \,\}$ et une unique strate 0-dimensionelle $X = \{0\}$. Donc $A = Y \cup Y_1 \cup \{0\}$.

Considérons sur A l'application définie par

$$f : A \to A' \qquad , \qquad f(s,t) = \begin{cases} (0,0) & \text{si } (s,t) = (0,0) \in X \\ (s,t) & \text{si } (s,t) = (y,0) \in Y \\ (s^2 + 2s, [t + 2t^{\frac{1}{2}}]^2) & \text{si } (s,t) = (y_1, y_1^2) \in Y_1 \, . \end{cases}$$

On voit alors que f est stratifiée envoyant toute strate sur elle-même.

D'autre part on a facilement que

$$f_{*(s,t)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } (s,t) \in Y \\ \begin{pmatrix} 2s+2 & 0 \\ 0 & 2t + 6t^{\frac{1}{2}} + 4 \end{pmatrix} & \text{si } (s,t) \in Y_1 \end{cases}$$

et donc en considérant l'espace tangent limite

$$\tau = (\text{axe des } x) = \lim_{(y,0)\to(0,0)} T_{(y,0)} Y = \lim_{(y_1,y_1^2)\to(0,0)} T_{(y_1,y_1^2)} Y_1$$

on a aussi que

$$\lim_{(y,0)\to(0,0)} f_{*(y,0)} = id_\tau \qquad , \qquad \lim_{(y_1,y_1^2)\to(0,0)} f_{*(y_1,y_1^2)} = 2 \cdot id_\tau .$$

Comme les deux applications linéaires limites ne coïncident pas, nous concluons qu'une telle application f n'est pas fortement semidifférentiable en $(0,0)$, bien qu'elle soit semidifférentiable.

A la suite de l'exemple 2, nous pouvons aussi remarquer que:

Remarque 9. *La semidifférentiabilité d'un morphisme stratifié n'implique pas la forte semidifférentiabilité.* □

Remarque 10. *L'application réciproque d'un homéomorphisme fortement semidifférentiable n'est pas en général fortement semidifférentiable ni semidifférentiable, (bien qu'elle soit horizontalement-C^1 et faiblement semidifférentiable sous les hypothèses du théorème 1).*

Preuve. Il suffit de considérer un homéomorphisme arbitraire fortement semidifférentiable dont l'homéomorphisme réciproque admette des dérivées non-bornées. □

Remarque 11. *Soit $f : A \to A'$ un homéomorphisme fortement semidifférentiable et vérifiant en un point $x \in A$ les hypothèses du théorème 1.*

Si la différentielle de l'application réciproque $f^{-1} : A' \to A$ est bornée autour de x dans A alors f^{-1} est fortement semidifférentiable en x.

Preuve. En réalité, comme f est fortement semidifférentiable, f est aussi semidifférentiable, horizontalement-C^1 et faiblement semidifférentiable.

Par le théorème 1, f^{-1} est alors également horizontalement-C^1 (et faiblement semidifférentiable) en x. D'autre part, f^{-1} ayant sa différentielle bornée autour de x dans A, est grâce à la proposition 4 semidifférentiable.

Le reste de la démonstration est similaire à la deuxième partie de la preuve du théorème 1 car les applications différentielles induites par un homéomorphisme stratifié sont toujours des isomorphismes (bijections). □

§3 Le cas du flot d'un champ relevé.

A partir de ce paragraphe, et dans toute la suite, nous étudierons particulièrement les propriétés de régularité d'un flot continu, contrôlé, obtenu par relèvement aux strates de dimensions supérieures d'un champ de vecteurs défini sur un certain squelette de la stratification A.

Quelques rappels autour de la trivialisation topologique locale $H : U_{x_0} \times \pi_X^{-1}(x_0) \to \pi_X^{-1}(U_{x_0})$ de la projection π_X sur X sont nécessaires pour montrer qu'on peut définir deux feuilletages transverses (orthogonaux selon la métrique quasi-fibrée [**Re**]) $\mathcal{V} = \{N_y\}_y$ et $\mathcal{H} = \{M_y\}_y$, le premier "parallèle" à la fibre $\pi_X^{-1}(x_0)$ et le deuxième à $X(\equiv U_{x_0})$.

Alors pour toute strate $Y > X$ l'isomorphisme $\phi_{Y*y} : T_yY \to T_{y'}Y$ se décompose en une composante verticale $\phi_{Y*y|T_yN_y} : T_yN_y \to T_{y'}N_{y'}$ et une composante horizontale à choisir entre les deux restrictions possibles :

$$(*) \ : \qquad \phi_{Y*y|\mathcal{D}_{XY}(y)} : \mathcal{D}_{XY}(y) \to T_{y'}Y \qquad , \qquad \phi_{Y*_y}\Big|_{T_yM_y} : T_yM_y \to T_{y'}Y \ .$$

La condition de contrôle du flot relevé implique que l'application ϕ_Y est compatible avec $\mathcal{V}$, i.e. ϕ_Y envoie toute feuille N_y de $\mathcal{V}$ dans une unique feuille $N_{y'}$ de $\mathcal{V}$. En revanche nous remarquons explicitement que cette condition de compatibilité n'est pas vérifiée quand il s'agit du feuilletage horizontal. Ceci nous impose de considérer les deux choix possibles de restrictions $(*)$. Cependant, l'on verra au §4 que lorsqu'a lieu l'involutivité de la distribution canonique $\mathcal{D}_X$ alors $\mathcal{D}_{XY}(y) = T_yM_y$, les deux choix deviennent le même et ceci nous permettra de prouver que le flot relevé $\phi = \{\phi_Y\}_{Y \geq X}$ est horizontalement-C^1 (par rapport à $\mathcal{D}_X$).

Après avoir souligné par un exemple explicite (*l'escargot de Kuo*) la difficulté d'obtenir des flots avec des différentielles localement bornées, nous concluons le paragraphe en remarquant que, quand une telle condition est vérifiée, (comme par exemple dans le cas des stratifications lipschitziennes [**Pa**]) les conditions de régularité "semidifférentiable", "horizontalement-C^1" et "faiblement différentiable" deviennent alors équivalentes.

Considérons alors une stratification Σ au moins (c)-régulière d'un sous-ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Considérons aussi un champ de vecteurs ζ_X défini sur une strate X de Σ ayant un flot global Φ_X et soit $\zeta = \{\zeta_Y\}_{Y \geq X}$ le champ, relèvement continu contrôlé de ζ_X (défini au §1) sur un voisinage stratifié $T_X^\epsilon \equiv T_X$ (identifié à T_X). Soit enfin $\Phi = \{\Phi_Y\}_{Y \geq X}$ le flot de $\zeta = \{\zeta_Y\}_{Y \geq X}$. Notre but est alors de mesurer la régularité du flot Φ de ζ.

Il est bien connu (voir **[Ma]**) que la seule hypothèse de *contrôle* de $\zeta = \{\zeta_Y\}$ suffit pour que l'application $\Phi : \mathbb{R}\times T_X \to T_X$ soit un prolongement continu de $\Phi_X : \mathbb{R}\times X \to X$; i.e. que

$$\Phi = \bigcup_{Y\geq X} \Phi_Y \quad : \quad \mathbb{R}\times T_X = \bigcup_{Y\geq X} \mathbb{R}\times T_{XY} \longrightarrow T_X = \bigcup_{Y\geq X} T_{XY}$$

soit continue même si le champ a été relevé sur T_X sans continuité.

Notre question principale est alors la suivante :

QUESTION. *"Quelle régularité est ajoutée à l'application $\Phi = \bigcup_{Y\geq X}\Phi_Y$ quand le champ $\zeta = \cup_{Y\geq X}\zeta_Y$ est relevé sur T_X plus régulièrement qu'en imposant seulement l'hypothèse de contrôle, i.e. de manière continue ? Obtient-on "un peu plus" de régularité que la continuité (bien connue) de l'application Φ ? Si oui, combien ?".*

On peut faire une première remarque :

REMARQUE 1. *L'application $\Phi : \mathbb{R}\times T_X \to T_X$ est de classe C^1 par rapport à la variable $t\in\mathbb{R}$.*

Preuve. Comme $\frac{\partial}{\partial t}\Phi(y,t) = \zeta(\Phi(y,t)) = \zeta\circ\Phi(y,t)$, et comme le champ ζ est maintenant continu sur X, l'application composée $\zeta\circ\Phi = \frac{\partial}{\partial t}\Phi$ l'est aussi. □

Donc il reste à comprendre l'éventuelle amélioration de la régularité de l'application $\Phi_* = \bigcup_{Y\geq X}\Phi_{Y*}$ par rapport aux variables autres que $t\in\mathbb{R}$.

A partir de maintenant et dans tous les paragraphes suivants, nous fixerons une strate X et travaillerons presque exclusivement avec le voisinage tubulaire T_X stratifié par la stratification $\Sigma_{T_X} := \{T_{XY}\}_{Y\geq X}$ induite de Σ. D'autre part, Σ ne sera plus utilisée et donc nous convenons pour simplifier les notations d'identifier $T_X\equiv A$, $\Sigma_{T_X}\equiv\Sigma$ et donc tout $T_{XY}\equiv Y$ avec la strate Y toute entière.

Fixons alors un $t\in\mathbb{R}$ et considérons l'homéomorphisme stratifié:

$$\Phi_t = \Big(\bigcup_{Y\geq X}\Phi_Y\Big)_t = \bigcup_{Y\geq X}\Phi_{Yt} : T_X \to T_X$$

dont la restriction à toute strate $Y\geq X$ est l'application lisse

$$\phi_Y := \Phi_{Yt} : Y \to Y \qquad , \qquad (T_{XY}\equiv Y \quad \text{(avec l'identification)})$$

laquelle, *a priori*, se prolonge de manière seulement continue sur le *lieu singulier* $X\subseteq\overline{Y}$.

Etant données une strate $Y > X$ et une suite de points $\{y_n\}_n$ dans Y convergeant vers un point $x\in X$ et telle que la limite $\lim_n T_{y_n}Y = \tau$ existe aussi, notre but sera d'analyser le comportement pour $n\to\infty$ de la suite d'applications différentielles

$$\phi_{Y*y_n} : T_{y_n}Y \to T_{y'_n}Y \quad \text{où} \quad y'_n = \phi_Y(y_n)$$

et éventuellement de chercher des conditions suffisantes pour qu'une application linéaire limite

$$\lim_n \phi_{Y*y_n} : \lim_n T_{y_n}Y \longrightarrow \lim_n T_{y'_n}Y$$

existe (en supposant que la limite $\lim_n T_{y'_n}Y$ existe aussi).

Ainsi notre problème devient :

Problème. *L'homéomorphisme stratifié $\phi : T_X \to T_X$ est-il horizontalement-C^1 ou bien faiblement semidifférentiable sur X ?*

Sous quelles hypothèses ϕ peut-il devenir semidifférentiable ou bien fortement semidifférentiable, sur X ?

Les difficultés principales relatives à ce problème seront mises en évidence à partir du §4 par la théorie des feuilletages (transversaux au feuilletage vertical d'une submersion riemannienne $[\mathbf{BH}]_{1,2}$) et des distributions des plans tangents **[JW]** (i.e. des systèmes différentiels); les définitions données au paragraphe précédent seront alors justifiées.

Soit alors $\pi_X : T_X \to X$ la projection du système de données de contrôle utilisé au §1 pour définir la *distribution canonique* $\mathcal{D}_X := \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ relative à X. Rappelons alors que le champ relevé $\zeta = \{\zeta_Y\}_{Y \geq X}$ est défini sur toute strate $Y > X$ par la formule:

$$\zeta_Y(y) = \pi_{XY}{}_{*y}^{-1}(\zeta_X(x)) \bigcap \mathcal{D}_{XY}(y) \ , \quad \text{où} \quad x = \pi_{XY}(y).$$

Fixons un point $x_0 \in X$. La stratification Σ étant (c)-régulière, la submersion stratifiée $\pi_X : T_X \to X$ admet pour les points d'un voisinage U_{x_0} de x_0 dans X une trivialisation topologique locale, i.e. un homéomorphisme stratifié $H = H_{x_0}$:

$$H : U_{x_0} \times {\pi_X}^{-1}(x_0) \to {\pi_X}^{-1}(U_{x_0})$$

lisse sur les strates et qui est "l'identité" sur U_{x_0} $(H(p, x_0) = p \ , \ \forall\, (p, x_0) \in \mathbb{R}^l \times x_0 \equiv X)$.

Ainsi, ${\pi_X}^{-1}(U_{x_0})$ est structuré par un *feuilletage vertical* $\mathcal{V}$ dont les feuilles sont les fibres de la projection π_X et, en même temps, par un *feuilletage horizontal* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{x_0}$ supplémentaire à $\mathcal{V}$ (via H).

Notons ces deux feuilletages

$$\mathcal{V} := \left\{N_y := {\pi_X}^{-1}(\pi_X(y))\right\}_{y \in {\pi_X}^{-1}(U_{x_0})} \quad , \quad \mathcal{H} := \left\{M_{y_0} := H(\mathbb{R}^l \times y_0)\right\}_{y_0 \in {\pi_X}^{-1}(x_0)} .$$

Par cette décomposition de chaque variété $Y \geq X$ $(\equiv T^{\epsilon}_{XY})$, nous formaliserons le langage nécessaire à l'étude des propriétés de convergence horizontale des applications ϕ_{Y*y} (quand $y \to x \in U_{x_0}$).

Remarquons alors (ce qu'il est immédiat de vérifier), que :

Remarque 2. *Le feuilletage $\mathcal{H}_{x_0}$ est compatible avec la stratification de T_X.* □

D'autre part on a :

Remarque 3. *L'application $\phi = \{\phi_Y\}$ est compatible avec le feuilletage vertical $\mathcal{V}$:*

$$\phi_Y(N_y) = N_{y'} \qquad \forall\, y, y' \in Y \quad \textit{avec} \ \ y' = \phi_Y(y) \, .$$

Preuve. La condition de contrôle par rapport à π_X dit que pour toute strate $Y > X$ et $\forall\, y \in Y$, on a :

$$\pi_{XY}{}_{*y}(\zeta_Y(y)) = \zeta_X(\pi_{XY}(y))$$

ce qui, au niveau des flots, équivaut à la relation

$$\pi_{XY}(\phi_Y(y)) = \phi_X(\pi_{XY}(y)) \, .$$

Une telle condition signifie précisement que ϕ_Y préserve les fibres de $\pi_{XY} : T_{XY} \to X$ (feuilles verticales dans Y) : donc

$$\phi_Y(N_y) \subseteq N_{y'} .$$

Par symétrie,

$$\phi_Y^{-1}(N_{y'}) \subseteq N_y$$

et nous concluons que $\phi_Y(N_y) = N_{y'}$. $\square$

D'après la remarque précédente, l'analyse de la convergence des applications $\phi_{Y*y} : T_yY \to T_{y'}Y$ peut être développée dans les deux parties **V)** et **H)** suivantes :

V) l'analyse des "applications composantes verticales" de ϕ_{Y*y}

$$\phi_{Y*y|T_yN_y} : T_yN_y \to T_{y'}N_{y'} \quad \text{i.e.} \quad \phi_{Y*y|\ker \pi_{XY*y}} : \ker \pi_{XY*y} \to \ker \pi_{XY*y'}$$

qui sont aussi les différentielles des restrictions

$$\phi_{Y\big|\ {\pi_{XY}}^{-1}(x)} : {\pi_{XY}}^{-1}(x) \to {\pi_{XY}}^{-1}(x')$$

où $x = \pi_{XY}(y)$ et $x' = \pi_{XY}(y')$;

H) l'analyse de la convergence de la famille d' "applications composantes horizontales":

$$\phi_{Y*y|\mathcal{D}_{XY}(y)} : \mathcal{D}_{XY}(y) \to T_{y'}Y .$$

Il est intéressant ici de faire deux précisions :

i) d'une part, on ne peut pas écrire $\phi_{Y*y|\mathcal{D}_{XY}(y)} : \mathcal{D}_{XY}(y) \to \mathcal{D}_{XY}(y')$, car on n'a pas nécessairement $\phi_{Y*y}(\mathcal{D}_{XY}(y)) \subseteq \mathcal{D}_{XY}(y')$,

ii) d'autre part, on ne peut pas considérer la convergence sur U_{x_0} des restrictions aux feuilles horizontales $\phi_{Y*_y\big|T_yM_y} : T_yM_y \to T_{y'}M_{y'}$ car, le feuilletage $\mathcal{H} = \{M_y\}$ n'étant pas nécessairement (a)-régulier sur U_{x_0}, la $\mathcal{H}$-semidifférentiabilité de $\phi = \{\phi_Y\}_Y$ peut perdre sa signification.

On verra au §4 que la propriété $\phi_{Y*y}(\mathcal{D}_{XY}(y)) \subseteq \mathcal{D}_{XY}(y')$ est équivalent à l'involutivité de la distribution canonique $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ et au §7 que la (a)-régularité du feuilletage $\mathcal{H}$ est la condition nécessaire et suffisante pour que les flots des champs r'elevés soient horizontalemen-C^1 et $\mathcal{H}$-semidifférentiables.

Entre outre, sous l'hypothèse d'involutivité de $\mathcal{D}_X$ on trouvera $\mathcal{D}_{XY}(y) = T_yM_y$ ce qui supprime les deux choix ci-dessus et permet d'obtenir une "bonne théorie" des morphismes stratifiés.

A propos de l'analyse de la convergence de ϕ_{Y*} le long de la direction verticale (i.e. des applications $\phi_{Y*y|N_y}$) nous nous limitons à rappeler que grâce aux résultats du paragraphe précédent on a:

Corollaire 1. *S'il existe une strate Y et une suite $\{y_n\}_n$ convergente en un point $x \in U_{x_0}$ telles que les restrictions (verticales) aux fibres*

$$\phi_{Y\,\big|{\pi_{XY}}^{-1}(x_n)} : {\pi_{XY}}^{-1}(x_n) \to {\pi_{XY}}^{-1}(x'_n) \qquad \textit{où} \quad \begin{cases} x_n = \pi_{XY}(y_n) \\ x'_n = \pi_{XY}(y'_n) \end{cases}$$

aient des différentielles non-bornées, alors le flot relevé $\phi_Y : Y \to Y$ de l'application $\phi_X : X \to X$ ne définit pas une application semidifférentiable en x (bien qu'elle puisse encore être horizontalement-C^1). $\square$

Le corollaire précédent s'applique dans le contexte des stratifications (b) ou (c)-régulières. Par exemple, une situation caractéristique est celle de l'*Escargot de Kuo* (exemple ci dessous) où le difféomorphisme $\phi_{Y|\ \pi_{XY}{}^{-1}(x)}$ transforme une fibre $\pi_{XY}{}^{-1}(x)$, d'un point $x \in X$, ayant une courbure inférieurement bornée au voisinage du "point singulier" $x \in \overline{\pi_{XY}{}^{-1}(x)}$ en une fibre $\pi_{XY}{}^{-1}(x')$ ayant une courbure arbitrairement petite au voisinage du point $x' = \phi_X(x)$ de $\overline{\pi_{XY}{}^{-1}(x')}$. C'est en général la cause d'une divergence de la norme des différentielles pour $y \to x$ **[Wi]**. En prenant alors n'importe quelle suite de points $\{y_n\}_n$ dans la même fibre $\pi_{XY}{}^{-1}(x)$, la suite des normes $\{||\phi_{Y*y_n|N_{y_n}}||\}_n$ ne pourra pas être bornée.

Exemple 1 : *L'Escargot de T.C. Kuo* (**[0T]**). L'escargot de Kuo $A = X \cup Y$ est une stratification plongeable dans $\mathbb{R}^3$ n'ayant que deux strates de dimensions respectivement 1 et 2. La strate 1-dimensionelle X est simplement l'axe des x (pour nous l'axe horizontal) et la strate 2-dimensionelle Y contient (voir figure 4) une surface Y' obtenue à partir d'une spirale d'équation en coordonnées polaires du type $\rho = h(\theta)$ (avec $\lim_{\theta\to\infty} h(\theta) = 0$) dans un plan $(x = 1)$ orthogonale à X et en la réduisant le long du "paramètre" x jusqu'à la contracter en un point $x_0 = (0, 0, 0)$.

Selon la vitesse $h(\theta)$ avec laquelle la spirale verticale s'enroule (pour $\theta \to \infty$) et selon la vitesse $g(x)$ par laquelle on la contracte au point 0, on peut obtenir des escargots (c) ou (b)-réguliers mais ni (w)-réguliers ni Lipschitziens.

Donc en coordonnées cylindriques (x, ρ, θ), on peut représenter le "morceau enroulé" Y' de la strate Y par:

$$Y' = \{(x, \rho, \theta) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho = g(x) \cdot h(\theta) \ \ x \in [0, 1[\ ,\ \theta \in [0, \infty[\ \}.$$

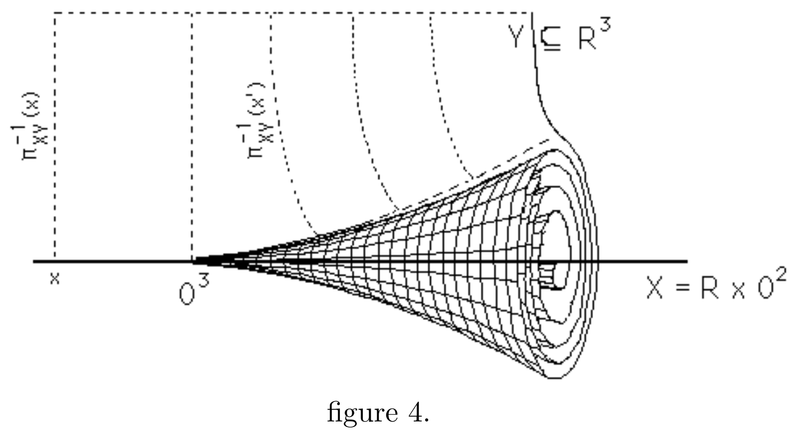

figure 4.

Par exemple :

1) avec $g(x) = x$ on obtient un cône sur la spirale initiale et donc évidemment l'escargot Y ne sera même pas (c)-régulier sur X;

2) avec $g(x) = x^2$ et $h(\theta) = \theta^{-\alpha}$ $(\alpha > 1)$, la spirale initiale $\rho = \theta^{-\alpha}$ est une spirale lente (logarithmique) qui est (c)-régulière mais pas (b) par rapport à son centre et donc tel sera aussi l'escargot Y par rapport à X;

3) avec $g(x) = x^2$, $h(\theta) = e^{-k(\theta)}$ ($\lim_{\theta\to\infty} k(\theta) = \infty$) et $\lim_{\theta\to\infty} \dfrac{1}{k'(\theta)} = 0$, la spirale initiale $\rho = e^{-k(\theta)}$ est une spirale ("rapide" i.e.) (b)-régulière$(*)_1$ et tel sera aussi l'escargot Y par rapport a X.

4) aucune spirale ne peut donner un escargot (w)-régulier $(*)_2$.

La figure 4 pensée avec un nombre infini d'enroulements autour de l'axe des x montre un escargot du type 2). $\square$

Dans le cas de l'escargot, nous ne calculerons pas explicitement le champ relevé sur Y du champ canonique constant E_1 de X mais nous précisons (comme il arrivait déjà à l'exemple 1 §2) que pour que la suite des normes des restrictions $\{||\phi_{Y*y_n|\ker \pi_{XY*y_n}}||\}_n$ soit non bornée, il n'est pas nécessaire que la strate Y ait de telles *pathologies de courbure*. Nous avons préféré citer cet exemple caractéristique avant tout car le phénomène de divergence en norme de la différentielle d'un flot ϕ_Y le long de la fibre est un problème qui nous intéressera particulièrement par la suite et en même temps pour remarquer que *"la géométrie de la strate Y peut donner une contribution décisive à une telle divergence"*.

Pour un calcul explicite du champ ζ_Y relevé (où $\zeta_X = E_1$) et de son flot (à l'instant t) ϕ, dans le cas où la stratification est *"la famille des quatres droites"*, on peut consulter [**Kuo**] : dans ce cas également les normes des différentielles de ϕ_Y ne sont pas bornées.

Concluons ce paragraphe en remarquant que, dans le cas où l'on considère des stratifications Lipschitziennes, comme les relèvements des champs peuvent être obtenus avec les flots à dérivées bornées [**Pa**], alors grâce à la proposition 4, §2.2 et à la proposition 6, §2.3, on a :

PROPOSITION 1. *Pour une stratification Lipschitzienne Σ munie d'un S.D.C. $\mathcal{T} = \{(T_X, \pi_X, \rho_X)\}_{X\in\Sigma}$ les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $\phi = \{\phi_Y\}$ est semidifférentiable en $x \in U_{x_0}$;
ii) $\phi = \{\phi_Y\}$ est horizontalement-C^1 en $x \in U_{x_0}$;
iii) $\phi = \{\phi_Y\}$ est faiblement semidifférentiable en $x \in U_{x_0}$; $\square$

Dans les prochains §4 et §5, nous nous occuperons seulement de problèmes **H)** de convergence du flot stratifié $\phi = \{\phi_Y\}$ relevé de ϕ_X, le long des directions horizontales.

§4 Le cas où la distribution canonique est involutive.

Ce paragraphe se développe autour de l'hypothèse d'involutivité de la distribution canonique locale $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y\geq X}$.

Le paragraphe s'ouvre avec le théorème 1 dans lequel nous montrons que l'involutivité de $\mathcal{D}_X$ est une condition suffisante pour que le flot (à l'instant t) $\Phi_t = \phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}_{Y\geq X}$ du champ $\zeta = \{\zeta_Y\}_{Y\geq X}$ relevé continu contrôlé d'un champ ζ_X défini sur la strate $X \in \Sigma$, préserve $\mathcal{D}_X$ induisant $\forall Y > X$ des restrictions horizontales $\phi_{Y*y|} : \mathcal{D}_{XY}(y) \to \mathcal{D}_{XY}(y')$ $(y' = \phi_Y(y))$, dont la matrice représentative par rapport aux bases canoniques est la même que celle de l'isomorphisme $\phi_{X*x} : T_xX \to T_{x'}X$ $(x' = \phi_X(x))$.

$(*)_1$ Rappelons que, plus généralement, la (b)-régularité d'une spirale arbitraire $\rho = h(\theta)$ équivaut à la condition de limite $\lim_{\theta\to\infty} \frac{h(\theta)}{h'(\theta)} = 0$.

$(*)_2$ Remarque de D. Trotman (1996).

D'autre part, l'hypothèse d'involutivité entraîne (mais la réciproque est fausse) que le feuilletage horizontal $\mathcal{H}$, autour de x_0, $\mathcal{H} = \{M_{y_0} = H(U_{x_0} \times y_0),\ y_0 \in \Pi_X^{-1}(x_0)\}$ induit par l'homéomorphisme de trivialisation topologique de la projection $\pi_X : T_X \to X$ est (a)-régulier sur X : i.e. les espaces tangents aux feuilles tendent vers $T_x X$ quand $y \to x$ $(\forall x \in U_{x_0})$.

Cette observation et le théorème 1 sont les arguments décisifs qui nous permettent de déduire que le flot $\Phi_t = \{\phi_Y : Y \to Y\}_{Y \geq X}$ est horizontalement-C^1 autour de x_0 (théorème 2).

Le feuilletage horizontal déterminé par la trivialisation topologique H, le flot ϕ et la distribution canonique $\mathcal{D}_X$ utilisés pour obtenir ces théorèmes, sont des notions obtenues en utilisant la méthode du relèvement continu développée au chapitre I. Une telle continuité du relèvement (avec l'hypothèse de contrôle), joue un rôle essentiel dans la théorie ici développée et particulièrement dans le théorème 2.

Nous remarquons dans les corollaires 2, 3 (resp. 4 et 5) que quand $\dim X = 1$ (resp. quand $\dim X = \dim A - 1$), l'involutivité de $\mathcal{D}_X$ est toujours vérifiée; alors dans ce cas les résultats des théorèmes 1 et 2 sont valables et les flots ϕ des champs rélevés de manière continue sont horizontalement-C^1 sur U_{x_0} et $\mathcal{H}$-semidifférentiables sur $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$.

4.1 : $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}$ est horizontalement-C^1 sur X.

Considérons donc le cas spécial où il existe une distribution canonique $\mathcal{D}_X$ qui est involutive dans un voisinage du type $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$ dans A. A. duPlessis et D. Trotman (1994) ont construit un contrexemple montrant que ce n'est pas en général le cas.

Notre problème étant local, à partir de maintenant et dans toute la suite, nous ne considèrerons que la stratification induite de T_X sur le voisinage $\pi^{-1}(U_{x_0})$ de x_0 dans A. Nous identifierons alors le voisinage U_{x_0} de x_0 dans X avec X et toute $\pi_{XY}^{-1}(U_{x_0}) = \pi^{-1}(U_{x_0}) \cap Y$ avec $Y > X$. D'autre part $U_{x_0} \equiv X$ étant le domaine d'un système de coordonnées locales autour de x_0, on pourra aussi poser $U_{x_0} \equiv \mathbb{R}^l \times 0^{n-l}$ et $x_0 \equiv 0^n$. Donc dès maintenant : $U_{x_0} = X = \mathbb{R}^l \times 0^{n-l}$ (où $l = \dim X$).

Le théorème ci-dessous dit que si $\mathcal{D}_X$ est involutive alors le flot relevé ϕ agit sur les variétés intégrales du feuilletage horizontal de la "même manière" que le flot ϕ_X sur la *variété modèle* **[Ca]** X et il annonce ainsi un théorème de régularité pour le morphisme $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}_{Y \geq X}$ (théorème 2).

THEOREME 1. *Si la distribution canonique $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ est intégrable, alors $\forall Y > X$ le difféomorphisme ϕ_Y préserve les variétés intégrales du feuilletage horizontal $\mathcal{H}$, et pour tout $y \in Y$ l'isomorphisme $\phi_{Y*y} : T_y Y \to T_{y'} Y$ transforme le sous-espace horizontal $\mathcal{D}_{XY}(y)$ en $\mathcal{D}_{XY}(y')$ (i.e. : ϕ_{Y*y} préserve la distribution $\mathcal{D}_{XY}$), et se décompose en une somme directe*

$$\phi_{Y*y} = \phi_y^h \oplus \phi_y^v \ : \mathcal{D}_{XY}(y) \oplus \ker \pi_{XY*y} \xrightarrow{\phi_y^h \oplus \phi_y^v} \mathcal{D}_{XY}(y') \oplus \ker \pi_{XY*y'} .$$

En outre, si $v_1(y), \dots, v_l(y)$ désignent les champs relevés continus des champs canoniques constants $E_1, \dots, E_l$ de $X = \mathbb{R}^l \times 0$ en $\mathcal{D}_{XY}(y)$, alors la matrice $A(y)$ qui représente l'isomorphisme restriction $\phi_y^h : \mathcal{D}_{XY}(y) \to \mathcal{D}_{XY}(y')$ par rapport aux bases $\sigma = \{v_i(y)\}_{i=1}^l$ et $\sigma' = \{v_i(y')\}_{i=1}^l$ coïncide avec la matrice $A = A(x)$ qui représente l'isomorphisme $\phi_{X*x} : T_x X \to T_{x'} X$ $(x = \pi_{XY}(y))$ par rapport à la base canonique $\{E_i\}_{i=1}^l$ de $X = \mathbb{R}^l \times 0$.

Preuve. Rappelons, d'abord, que pour toute stratification qui vérifie une des conditions de régularité du type (c), (b), *Lipschitz* ou bien *bilipschitz* et dont les strates sont de classe C^k, C^∞ ou analytiques, l'homéomorphisme H de trivialisation topologique locale de la projection π_X est toujours obtenu de la manière suivante.

Soient $E_1, \ldots, E_l$ les champs de vecteurs constants sur $\mathbb{R}^l \times 0 = X$ et $v_1(y), \ldots, v_l(y)$ les champs relevés continus dans la distribution $\mathcal{D}_X$. Comme les champs $v_i = v_i(y)$ sont contrôlés, leurs flots $\phi_1, \ldots, \phi_l$ sont définis pour tout $t \in \mathbb{R}$, et l'application

$$H : \mathbb{R}^l \times \pi_X^{-1}(x_0) \to \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \equiv T_X \quad , \quad H((t_1, \ldots, t_l), y_0) = \phi_l(t_l, \ldots, \phi_1(t_1, y_0)..) = y$$

est un homéomorphisme stratifié lisse sur les strates (*trivialisation topologique* de π_X au voisinage de x_0).

Comme, par hypothèse, $\mathcal{D}_X$ est intégrable alors il existe un feuilletage horizontal $\mathcal{H}' = \{M'_y\}_y$ dont les espaces tangents aux variétés intégrales maximales sont précisément les espaces tangents à la distribution : i.e. $T_y M'_y = \mathcal{D}_X(y)$ pour tout $y \in \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \equiv T_X$.

Avant de conclure la démonstration du théorème nous avons besoin de la proposition et du lemme 1 ci-dessous.

Proposition 1. *Si $\mathcal{D}_X$ est involutive, alors les champs relevés v_i sont les images des champs canoniques par le morphisme de trivialisation H, i.e. :*

$$v_i(y) = H_{*(t_1,\ldots,t_l,y_0)}(E_i) \quad , \quad \forall i = 1, \ldots l\,.$$

De plus le feuilletage intégral $\mathcal{H}'$ tangent à $\mathcal{D}_X$ coïncide avec le feuilletage horizontal $\mathcal{H} = \{M_{y_0} = H(\mathbb{R}^l \times y_0)\}_{y_0 \in \pi_{XY}{}^{-1}(x_0)}$ déterminé par le morphisme de trivialisation H.

Lemme 1. *Si la distribution canonique $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ est involutive alors les champs crochets de Lie*

$$[v_i, v_j] = 0 \qquad , \qquad \textit{pour tout } i, j = 0, \ldots, l.$$

sont nuls et en particulier les flots ϕ_i commutent (entre eux).

Réciproquement il est évident que la condition $[v_i, v_j] = 0 \;\; \forall i, j = 1, \ldots, n$ entraîne l'involutivité de $\mathcal{D}_X$.

Preuve. Fixons une strate $Y > X$ et soit $y \in Y$. Par définition les champs relevés $v_1(y), \ldots, v_l(y)$ sont tangents à $\mathcal{D}_{XY}(y)$, et comme $\mathcal{D}_X$ est involutive pour tout $i, j = 0, \ldots, l$ alors $[v_i, v_j](y)$ est encore tangent à $\mathcal{D}_{XY}(y)$. Donc $[v_i, v_j](y)$ coïncide avec sa composante horizontale.

D'autre part, comme les champs v_i sont des relèvements π_X-contrôlés, alors pour tout $h \leq l$, $\pi_{XY*}(v_h) = E_h$ et donc

$$\pi_{XY*}[v_i, v_j](y) = [\pi_{XY*}(v_i), \pi_{XY*}(v_j)](y) = [E_i, E_j](y) = 0.$$

Nous concluons alors que $[v_i, v_j](y) \in \ker \pi_{XY*y}$ i.e. sa composante horizontale est nulle. $\square$

Preuve de la Proposition 1. Fixons une strate $Y > X$ et un point $y \in Y$ ($\equiv \pi_{XY}^{-1}(U_{x_0})$). Il suffira de montrer que les espaces tangents aux feuilles $T_y M_y$ et $T_y M'_y$ coïncident.

Pour tout $y = H(t_1, \dots, t_l, y_0) \in Y$ la variété intégrale horizontale $M_y = M_{y_0}$ définie par H et passant par y passe aussi pour y_0 et donc $T_y M_y$ est engendré par les vecteurs $\{H_{*(t_1,\dots,t_l,y_0)}(E_i)\}_i$, donc en notant $\forall\, i = 1, \dots, l \;\; w_i(y) = H_{*(t_1,\dots,t_l,y_0)}(E_i)$ on a :

$$T_y M_y = T_y M_{y_0} = T_y H(\mathbb{R}^l \times y_0) = H_{*(t_1,\dots,t_l,y_0)}(\mathbb{R}^l \times x_0) =$$

$$= \Big[w_1(y), \dots, w_l(y) \Big].$$

D'autre part, par le lemme précédent, les flots ϕ_i dans la définition de l'application H commutent, et nous pouvons donc écrire

$$H(t_1, \dots, t_l, y_0) = \phi_i(t_i, \phi_l(t_l, \dots, \widehat{\phi_i(t_i}, \dots, \phi_1(t_1, y_0) \dots)$$

(où $\widehat{\phi}$ signifie “omission de ϕ”).

Donc

$$w_i(y) = \frac{\partial}{\partial \tau}\bigg|_{\tau = t_i} \phi_i(\tau, \phi_l(t_l, \dots, \widehat{\phi_i(t_i}, \dots, \phi_1(t_1, y_0) \dots) =$$

$$v_i(\phi_i(t_i, \phi_l(t_l, \dots, \widehat{\phi_i(t_i}, \dots, \phi_1(t_1, y_0) \dots) = v_i(H(t_1, \dots, t_l, y_0)) = v_i(y).$$

Nous concluons alors que

$$T_y M_y = T_y M_{y_0} = \Bigg[w_1(y), \dots, w_l(y) \Bigg] = \Bigg[v_1(y), \dots, v_l(y) \Bigg] = \mathcal{D}_{XY}(y) = T_y M'_y \,.$$

Leurs espaces tangents coïncidant, les deux feuilletages $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ coïncident donc aussi. □

L'utilité essentielle de la proposition ci-dessus se résume dans le corollaire suivant dont la démonstration est immédiate :

Corollaire. *Si la distribution canonique est involutive, alors le feuilletage horizontal $\mathcal{H}$ est (a)-régulier sur X.* □

Suite de la preuve du Théorème 1. Fixons une strate $Y > X$, un point $y \in Y$ et considérons le champ continu ζ_Y relevé de ζ_X sur Y. Comme ζ_Y est par définition tangent à $\mathcal{D}_{XY}$, il est alors, d'après la proposition précédente, également tangent aux variétés du feuilletage $\mathcal{H}$ et cela assure que chaque trajectoire de ζ_Y est contenue toute entière dans une unique variété intégrale maximale.

En particulier, on a $M_y = M_{y'}$ car $y' = \phi_Y(y) = (\Phi_Y)_t(y)$.

D'autre part, la même propriété étant vérifiée pour tout couple de points z, z' correspondants par ϕ_Y $(z' = \phi_Y(z))$, il s'en suit que pour tout $z \in M_y$ on a $M_{z'} = M_z = M_y$. Cela suffit pour avoir les égalités :

$$\phi_Y(M_y) = \bigcup_{z \in M_y} \{\, \phi_Y(z) \,\} \subseteq \bigcup_{z \in M_y} M_{z'} = \bigcup_{z \in M_y} M_y = M_y \;,$$

et donc pour que le difféomorphisme ϕ_Y préserve les variétés intégrales du feuilletage $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ i.e. $\phi_Y(M_y) \subseteq M_y$.

Alors nous trouvons facilement $\phi_Y(M_y) = M_y$, car la même propriété est vérifiée par le morphisme $\phi_Y^{-1} = (\Phi_{Y\,t})^{-1} = (\Phi_Y)_{-t}$.

Ici, en observant que

$$\phi_{Y*y}(\mathcal{D}_{XY}(y)) = \phi_{Y*y}(T_y M_y) = T_{y'}\phi_Y(M_y) = T_{y'}M_y = T_{y'}M_{y'} = \mathcal{D}_{XY}(y').$$

nous déduisons que les sous-espaces complémentaires $\mathcal{D}_{XY}(y')$ et $\ker \pi_{XY*y'}$ sont deux sous-espaces de T_yY qui se préservent par l'isomorphisme $\phi_{Y*y} : T_yY \to T_yY$, et donc on a la décomposition en somme directe

$$\phi_{Y*y} : \mathcal{D}_{XY}(y) \oplus \ker \pi_{XY*y} \xrightarrow{\phi^h \oplus \phi^v} \mathcal{D}_{XY}(y') \oplus \ker \pi_{XY*y'}.$$

Notons maintenant A la matrice qui représente l'isomorphisme $\Phi_{X*x} : T_xX \to T_{x'}X$ dans la base canonique $\{E_i\}_{i=1}^l$ de $\mathbb{R}^l \times 0$.

Alors, pour démontrer la formule de transformation

$$(*)_Y \quad : \qquad \phi_{Y*y}(v_i(y)) = \sum_{j=0}^{l} A^i_j v_j(y') \quad , \qquad i = 0, \ldots, l$$

où l'on a posé $A = \left(A^i_j\right)_{\substack{i\leq l \\ j\leq l}}$, (i = indice de colonne, j = indice de ligne), comme les deux membres sont (maintenant!) des vecteurs de $\mathcal{D}_{XY}(y')$ et comme la projection $\pi_{XY*y'}$: $\mathcal{D}_{XY}(y') \to \mathbb{R}^l \times 0 = T_{x'}X$ est un isomorphisme (voir Chapitre I, où $\pi_{XY*y'} = p_{\mathbb{R}^l}$), il sera suffisant de vérifier que les deux projections

$$\pi_{XY*y'}(\phi_{Y*y}(v_i(y))) = \pi_{XY*y}\left(\sum_{j=0}^{l} A^i_j v_j(y')\right).$$

de tels vecteurs coïncident.

En fait, on a évidemment

$$\pi_{XY*y'}\left(\sum_{j=0}^{l} A^i_j v_j(y')\right) = \sum_{j=0}^{l} A^i_j \pi_{XY*y'}(v_j(y')) = \sum_{j=0}^{l} A^i_j E_j$$

et d'autre part, grâce à la condition de contrôle, ce vecteur coïncide avec

$$\pi_{XY*y'}\big(\phi_{Y*y}(v_i(y)\big) = \phi_{X*x}\big(\pi_{XY*y}(v_i(y))\big) = \phi_{X*x}(E_i) = \sum_{j=0}^{l} A^i_j E_j. \quad \square$$

Grâce au théorème 1 précedent, nous pouvons conclure maintenant que l'hypothèse d'involutivité de la distribution canonique $\mathcal{D}_{XY}$ est une condition suffisante pour obtenir que le flot relevé ϕ soit horizontalement-C^1.

En fait on a :

Theoreme 2. *Si la distribution canonique $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y\geq X}$ est intégrable, alors le flot $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}_{Y\geq X}$ (à l'instant $t \in \mathbb{R}$) est horizontalement-C^1 sur $X \equiv U_{x_0}$.*

Preuve. Soit $Y > X$ une strate. Etant donnée une suite de points $\{(y_n, v_n)\}_n$ de TY telle qu'aucun vecteur v_n ne possède de composante verticale, i.e. $v^v_n = 0$ et $v_n = v^h_n \in \mathcal{D}_{XY}(y_n)$, nous devons vérifier l'implication

$$\text{“} \lim_n (y_n, v_n) = (x, v) \in TX \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \phi_{Y*}(y_n, v_n) = \Big(\phi_X(x), \phi_{X*x}(v)\Big) \text{”}.$$

Par la continuité de l'application

$$\phi = \cup_{Y \geq X} \phi_Y : \cup_{Y \geq X} Y \to \cup_{Y \geq X} Y \qquad \text{on a} \qquad \lim_n \phi_Y(y_n) = \phi_X(x)\,,$$

et donc il suffit de montrer que

$$\lim_{n \to \infty} \phi_{Y*y_n}(v_n) = \phi_{X*x}(v)\,.$$

Il sera convenable de noter la matrice $A(y_n)$ définie au théorème précédent, par $[\phi_{Y*y_n}]$ et d'utiliser des notations analogues relativement à $A(x_n)$ (où $x_n = \pi_{XY}(y_n) \in X$). Notons aussi $A(y_n)^i$ et $A(x_n)^i$ leurs $i-$èmes colonnes.

Comme $v_n \in \mathcal{D}_{XY}(y_n)$ et que ce dernier est engendré par les vecteurs canoniques relevés $v_1(y_n), \ldots, v_l(y_n)$ nous pouvons écrire

$$v_n = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^n v_i(y_n) \quad \text{pour des} \quad \lambda_i^n \in \mathbb{R}\,,\ (\,i = 1, \ldots, l) \text{ convenables}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En notant, pour $v \in \mathbb{R}^l \times 0$, $v = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i E_i$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{R}$, et en utilisant la limite $\lim_n v_i(y_n) = E_i$ on trouve aussi

$$\lim_{n \to \infty} (\lambda_1^n, \ldots, \lambda_l^n) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l).$$

Il est utile pour désigner une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{k} \mu_i w_i$, d'introduire la notation de produit d'un k-uplet de scalaires $M = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ par un k-uplet de vecteurs $W = (w_1, \ldots, w_k)$: $M \cdot W := \sum_i^k \mu_i w_i$.

Avec cette notation on peut écrire :

$$\phi_{Y*y_n}(v_n) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^n \phi_{Y*y_n}(v_i(y_n)) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^n \left[\phi_{Y*y_n}\right]^i \cdot (v_1(y_n), \ldots, v_l(y_n))$$

lequel par le théorème 1 est aussi égal à

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i^n \left[\phi_{X*x_n}\right]^i \cdot (v_1(y_n), \ldots, v_l(y_n)).$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{n \to \infty} \phi_{Y*y_n}(v_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^n \left[\phi_{X*x_n}\right]^i \cdot (v_1(y_n), \ldots, v_l(y_n)).$$

Maintenant nous pouvons conclure que

$$\lim_{n \to \infty} \phi_{Y*y_n}(v_n) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \left[\phi_{X*x}\right]^i \cdot (E_1, \ldots, E_l) =$$

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \phi_{X*x}(E_i) = \phi_{X*x}\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i E_i\right) = \phi_{X*x}(v),$$

grâce aux relations de limites (évidentes) suivantes :

$$\lim_n \phi_{X*x_n} = \phi_{X*x} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_i^n = \lambda_i \quad (\forall\, i = 1, \dots, l)$$

et grâce à notre définition de relèvement, nos champs relevés canoniques v_i vérifient la condition de continuité sur X

$$\lim_{n\to\infty} (v_1(y_n), \dots, v_l(y_n)) = (E_1, \dots, E_l)\,. \quad \square$$

Corollaire 2. *Si* $\dim X = 1$*, toute distribution canonique locale ou globale* $\mathcal{D}_X$ *est involutive. En particulier tout flot* $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}_{Y\geq X}$ *obtenu à partir d'un relèvement continu contrôlé d'un champ de vecteurs* ζ_X *défini sur une strate* X *de dimension* 1 *est horizontalement-*C^1 *sur* X*.* $\square$

Corollaire 3. *Si* $\dim X = \dim A - 1$*, la distribution canonique globale* $\mathcal{D}_X$ *est involutive. Donc tout relèvement continu contrôlé* $\xi = \{\xi_Y\}_{Y\geq X}$ *d'un champ de vecteurs* ξ_X *a un flot* $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}_{Y\geq X}$ *horizontalement-*C^1 *sur* X*.*

Preuve. Si $\dim X = \dim A - 1$, alors, par (c)-régularité de la stratification, chaque système de donnée de contrôle $\mathcal{T} = \{(T_X, \pi_X, \rho_X)\}$ fixé de (A, Σ) admet un seul choix possible d'une distribution canonique $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y\geq X}$ qui s'obtient précisément en considérant le sous-fibré défini par $D_{XY}(y) := \ker \rho_{XY*y}$ pour toute $Y > X$ (donc $\dim Y = \dim A$).

Alors une telle distribution canonique globale $\mathcal{D}_X$ est nécessairement intégrable sur T_X tout entier, en admettant comme variétés intégrales maximales les hypersurfaces de niveaux $\{\rho_{XY}^{-1}(\rho_{XY}(y)\}_y$ de la fonction distance $\rho_{XY} : T_{XY} \to [0, \infty[$.

Le résultat découle alors du théorème 1.

4.2 : $\mathcal{H}$-semidifférentiabilité de $\phi = \{\phi_Y\}_{Y\geq X}$

Dans cette section, nous améliorons les résultats obtenus à la section 4.1 en démontrant que le flot $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}_{Y\geq X}$ d'un champ $\xi = \{\xi_Y\}_{Y\geq X}$ rélevé continu contrôlé dans une distribution canonique $\mathcal{D}_X$ involutive est $\mathcal{F}$-semidifférentiable, par rapport au feuilletage horizontal $\mathcal{H} = \{M_y = H(y_0 \times \mathbb{R}^l)\}_{y\in\pi_X^{-1}(x_0)}$ de $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$ (donc $\mathcal{H}$-semidifférentiable) dans tout le voisinage $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$.

Pour être plus précis, notre nouvelle question est la suivante :

Etant données une strate $Z > X$ *et une suite* $\{(z_n, v_n)\} \subseteq TZ$ *convergeant en un point* $(y, v) \in TY$*, où* Y *est une strate telle que* $Z > Y > X$*, est-il vérifié que :*

$$\lim_n \phi_{Z*z_n}(v_n) \overset{?}{=} \phi_{Y*y}(v)\,.$$

La notion de $\mathcal{F}$-semidifférentiabilité interviendra pour éclaircir ce problème et la $\mathcal{H}$-semidifférentiabilité de $\phi = \{\phi_Y\}_{Y\geq X}$ nous dira que la réponse à la question ci-dessus est affirmative au moins pour toutes les suites dont les vecteurs v_n sont "horizontaux par rapport à X" ($X-$*horizontaux*), i.e. : $v_n \in \mathcal{D}_{XZ}(z_n)$.

Nous allons montrer alors tous les énoncés analogues à ceux de la section précédente et adaptés à cette nouvelle situation.

Avant tout, on a donc (avec les mêmes hypothèses qu'au théorème 1) :

THEOREME 3. *Pour toutes strates $Z > Y > X$ et pour tout point $z \in Z \equiv T_{XZ} \cap T_{YZ}$ en notant $z' = \phi_Z(z)$, $y = \pi_{YZ}(z)$ et $y' = \pi_Y(z') = \phi_Y(y')$, la matrice $A(z)$ qui représente l'isomorphisme restriction $\phi_{Z*z|} : \mathcal{D}_{XZ}(z) \to \mathcal{D}_{XZ}(z')$ par rapport aux bases $\sigma_z = \{v_i(z)\}_{i=1}^l$ et $\sigma'_{z'} = \{v_i(z')\}_{i=1}^l$ coïncide avec la matrice $A = A(y)$ qui représente l'isomorphisme restriction $\phi_{Y*y|} : \mathcal{D}_{XY}(y) \to \mathcal{D}_{XY}(y')$ par rapport aux bases canoniques $\sigma_y = \{v_i(y)\}_{i=1}^l$ et $\sigma'_{y'} = \{v_i(y')\}_{i=1}^l$.*

Preuve. Remarquons que grâce au théorème 1, $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ étant involutive on a les deux isomorphismes de restriction

$$\phi_{Z*z|} : \mathcal{D}_{XZ}(z) \to \mathcal{D}_{XZ}(z') \quad \text{et} \quad \phi_{Y*y|} : \mathcal{D}_{XY}(y) \to \mathcal{D}_{XY}(y') \,.$$

En notant alors $A = \left(A^i_j\right)_{\substack{i \leq l \\ j \leq l}}$, le résultat s'obtient en démontrant la formule :

$$(*)_Z \quad : \qquad \phi_{Z*z}(v_i(z)) = \sum_{j=0}^{l} A^i_j v_j(z') \quad , \qquad i = 0, \ldots, l \,.$$

Rappelons alors que la distribution canonique $\mathcal{D}_X$ vérifie la condition de *multicompatibilité* (par construction voir chap. 1 §5) avec une distribution canonique $\mathcal{D}_Y = \{\mathcal{D}_{YZ}\}_{Z \geq Y}$, ce qui signifie que $\mathcal{D}_{XZ}(z') \subseteq \mathcal{D}_{YZ}(z')$.

L'application $\pi_{YZ*z'} : \mathcal{D}_{YZ}(z') \to T_{y'}Y$ étant un isomorphisme, il s'en suit que $\mathcal{D}_{XZ}(z')$ se projette isomorphiquement sur un sous-espace vectoriel de $T_{y'}Y$. Ce sous-espace est grâce aux conditions de contrôle précisément $\mathcal{D}_{XY}(y')$, et donc on a l'isomorphisme de restriction

$$\pi_{YZ*z'|} : \mathcal{D}_{XZ}(z') \to \mathcal{D}_{XY}(y') \,.$$

Alors pour démontrer la formule $(*)_Z$ il nous suffit de vérifier l'égalité des deux images via $\pi_{YZ*z'}$:

$$\pi_{YZ*z'}(\phi_{Z*z'}(v_i(z'))) = \pi_{YZ*z'}\left(\sum_{j=0}^{l} A^i_j v_j(z')\right).$$

D'une part, par la condition de π_Y-contrôle sur ϕ_Z, $v_i(z)$ étant le relèvement π_{YZ}-contrôlé de $v_i(y)$, on trouve :

$$\pi_{YZ*z'}(\phi_{Z*z}(v_i(z))) = \phi_{Y*y}(\pi_{YZ*z}(v_i(z))) = \phi_{Y*y}(v_i(y))$$

d'autre part de façon analogue, on trouve :

$$\pi_{YZ*z'}\left(\sum_{j=0}^{l} A^i_j v_j(z')\right) = \sum_{j=0}^{l} A^i_j \pi_{YZ*z'}\left(v_j(z')\right) = \sum_{j=0}^{l} A^i_j v_j(y') \,.$$

La preuve se conclut alors en rappelant que l'égalité

$$(*)_Y \quad : \qquad \phi_{Y*y}(v_i(y)) = \sum_{j=0}^{l} A^i_j v_j(y') \quad , \qquad i = 0, \ldots, l$$

est valable à nouveau par l'involutivité de $\mathcal{D}_X$ (voir la "suite de la preuve du théorème 1"). □

Proposition 2. *Si* $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ *est involutive, le feuilletage* $\mathcal{H} = \{M_y = H(y_0 \times \mathbb{R}^l)\}$ *est* (a)*-régulier (sur* $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$*).*

Preuve. Soit Y une strate arbitraire telle que $Y > X$ et fixons aussi une strate $Z > Y$. Pour tout $z \in Z \equiv T_{YZ}$, par involutivité de $\mathcal{D}_X$ et grâce à la proposition 1 on a :

$$T_z\mathcal{H} = T_z M_z = \mathcal{D}_{XZ}(z)\,.$$

La distribution canonique étant continue sur $Y \equiv T_{XY}$, on en déduit tout de suite que pour tout $y' \in T_{XY}$ on a :

$$\lim_{z \to y'} T_z\mathcal{H} = \lim_{z \to y'} \mathcal{D}_{XZ}(z) = \mathcal{D}_{XY}(y')$$

et donc comme $\mathcal{D}_{XY}(y') \subseteq T_{y'}Y$, on obtient la (a)-régularité de $\mathcal{H}$ sur Y. □

Nous pouvons conclure alors cette section par le théorème suivant :

Theoreme 4. *Si* $\mathcal{H} := \{M_y = H(y_0 \times \mathbb{R}^l)\}$ *désigne le feuilletage local défini sur le voisinage* $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$ *de la trivialisation topologique de la projection* $\pi_X : T_X \to X$*, alors* $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}$ *est* $\mathcal{H}$*-semidifférentiable (sur* $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$*).*

Preuve. Avant tout, pour que la notion de $\mathcal{H}$-semidifférentiabilité ait du sens il faut remarquer que le feuilletage $\mathcal{H}$ est (a)-régulier ce qui nous est assuré par la proposition 2 ci-dessus.

En considérant alors une suite $\{(z_n, v_n)\} \in T\mathcal{H}$ (i.e. v_n tangent au feuilletage $\mathcal{H}$) convergente vers un point $(y, v) \in \{y\} \times T_y\mathcal{H} \subseteq T_yY$, la preuve s'obtient de manière complètement analogue à celle du théorème 2.

En fait, comme $v_n \in T_{z_n}\mathcal{H} = T_{z_n}M_{z_n} = \mathcal{D}_{XZ}(z_n)$ et que ce dernier est engendré par les relevés canoniques $v_1(z_n), \ldots, v_l(z_n)$ nous pouvons écrire

$$v_n = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^n v_i(z_n) \quad \text{pour des} \quad \lambda_i^n \in \mathbb{R}\,,\ (\,i = 1, \ldots, l) \text{ convenables}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De même, comme $v \in T_y\mathcal{H} = T_yM_y = \mathcal{D}_{XY}(y)$ et que ce dernier est engendré par les vecteurs canoniques relevés $v_1(y), \ldots, v_l(y)$ on peut également écrire :

$$v = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i v_i(y) \quad \text{pour des} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}\,,\ (\,i = 1, \ldots, l)\,, \text{ convenables}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme les relèvements $v_i(z)$ sont continus sur Y et que $\lim_{z_n \to y} v_i(z_n) = v_i(z)$ on peut déduire que :

$$\text{(1)} \qquad \lim_{n \to \infty} (\lambda_1^n, \ldots, \lambda_l^n) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l).$$

En notant alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $y_n = \pi_{YZ}(z_n)$, et en utilisant des notations analogues à celles du théorème 2 pour les matrices (et pour leurs i-colonnes)

$$A(z_n) = \left[\phi_{Z*z_n|}\right] \quad , \quad A(y_n) = \left[\phi_{Y*y_n|}\right] \quad , \quad A(y) = \left[\phi_{Y*y|}\right]$$

$$A(z_n)^i = \left[\phi_{Z*z_n|}\right]^i \quad , \quad A(y_n)^i = \left[\phi_{Y*y_n|}\right]^i \quad , \quad A(y)^i = \left[\phi_{Y*y|}\right]^i$$

on trouve les égalités :

$$\phi_{Z*z_n}(v_n) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^n \phi_{Z*z_n}(v_i(z_n)) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^n \left[\phi_{Z*z_n|}\right]^i \cdot (v_1(z_n), \ldots, v_l(z_n)) .$$

Maintenant, comme grâce au théorème 3 les deux matrices

$$\left[\phi_{Z*z_n|}\right] = A(z_n) = A(y_n) = \left[\phi_{Y*y_n|}\right]$$

coïncident, on trouve

$$\phi_{Z*z_n}(v_n) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^n \left[\phi_{Y*y_n|}\right]^i \cdot (v_1(z_n), \ldots, v_l(z_n))$$

et donc en passant aux limites :

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{Z*z_n}(v_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^n \left[\phi_{Y*y_n|}\right]^i \cdot (v_1(z_n), \ldots, v_l(z_n)) .$$

Finalement, en utilisant la continuité des relevés $v_i(z_n)$ qui convergent vers les champs $v_i(y)$ (pour $z_n \to y$), la relation de limite (1) et la relation $\lim_{y_n \to y}\left[\phi_{Y*y_n|}\right] = \left[\phi_{Y*y|}\right]$ (car $\phi_Y : Y \to Y$ est lisse), on conclut que :

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{Z*z_n}(v_n) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \left[\phi_{Y*y}\right]^i \cdot (v_1(y), \ldots, v_l(y)) =$$

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \phi_{Y*y} v_i(y) = \phi_{Y*y}\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i (v_i(y))\right) = \phi_{Y*y}(v)$$

ce qui prouve la $\mathcal{H}$-semidifférentiabilité de $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}_{Y \geq X}$. $\square$

De même que pour le cas horizontalement-C^1, en améliorant le corollaire 2 on trouve

Corollaire 4. *Si* $\dim X = 1$, *toute distribution canonique locale ou globale* $\mathcal{D}_X$ *est involutive. En particulier tout flot* $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}_{Y \geq X}$ *obtenu à partir d'un relèvement continu contrôlé d'un champ de vecteurs* ζ_X *défini sur une strate* X *de dimension* 1 *est* $\mathcal{H}$ *-semidifférentiable sur* X. $\square$

D'autre part, le corollaire qui suit est une amélioration seulement apparente du corollaire 3 (car il lui est en fait équivalent).

Corollaire 5. *Si* $\dim X = \dim A - 1$, *la distribution canonique globale* $\mathcal{D}_X$ *est involutive. Donc tout relèvement continu contrôlé* $\xi = \{\xi_Y\}_{Y \geq X}$ *d'un champ de vecteurs* ξ_X *a un flot* $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}_{Y \geq X}$ $\mathcal{H}$ *-semidifférentiable.*

Preuve. Si $\dim X = \dim A - 1$ la distribution canonique $\mathcal{D}_X$ est unique (comme on l'a vu au corollaire 3) globalement définie sur T_X tout entier et toujours intégrable, car $\forall Z > X$ elle coïncide avec $D_{XZ}(y) = \ker \rho_{XZ*y}$. De plus, le feuilletage $\mathcal{H}$ a pour feuilles les hypersurfaces de niveaux $\{\rho_{XZ}^{-1}(\rho_{XZ}(y))\}_y$ de la fonction distance $\rho_{XY} : T_{XZ} \to [0, \infty[$.

Comme $\dim X = \dim A - 1$ et $Z > X$, on a $\dim Z = \dim A$, et donc il n'existe aucune strate Y vérifiant $Z > Y > X$. Le flot $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}$ est alors $\mathcal{H}$-semidifférentiable si et seulement s'il est horizontalement-C^1, et l'assertion de ce corollaire est donc équivalente à celle du corollaire 3. $\square$

§5. Quelques propriétés significatives des champs $\{ H_{*(t_1,\dots,t_l,y_0)}(E_i) \}_{i=1,\dots l}$ tangents au feuilletage horizontal $\mathcal{H}$.

Nous avons vu dans le §4 que l'hypothèse d'involutivité d'une distribution canonique $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ relative à la strate X et engendrée par le champ de repères $(v_1, \dots, v_l)$ suffit pour obtenir la $\mathcal{H}$-semidifférentiabilité des flots des champs relevés de $U_{x_0} \equiv X \equiv \mathbb{R}^l \times 0$ sur les strates supérieures dans $\pi_X^{-1}(U_{x_0}) \equiv T_X$.

D'autre part, nous verrons dans le §7 que la *"même propriété"* reste valable si on suppose la (a)-régularité du feuilletage horizontal $\mathcal{H}$ ou bien de manière équivalente la continuité $\forall\, i = 0, \dots, l$, des champs de vecteurs

$$w_i(y) := H_{*(t_1,\dots,t_l,y_0)}(E_i) \quad \text{où} \quad y = H(t_1, \dots, t_l, y_0)\,.$$

En pratique, la difficulté principale pour obtenir un théorème général de $\mathcal{H}$-semidifférentiabilité pour les flots relevés réside dans le fait que nous aurions besoin d'un champ des repères relevé dans $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$ qui vérifie à la fois l'hypothèse de continuité, caractéristique par construction du champ de repères $(v_1, \dots, v_l)$, et l'hypothèse d'involutivité, caractéristique du champ de repères $(w_1, \dots, w_l)$. Cette condition était nécessaire pour que toute orbite du champ relevé reste en tout point tangente aux feuilles du feuilletage $\mathcal{H} = \{M_y\}_y$ (comme on l'a vu pour $\phi_Y(y \times \mathbb{R})$ dans la preuve du théorème 2 au §4).

Les deux champs de repères ne coïncident pas en général (!) et cela est une manière d'estimer la non-involutivité de la distribution canonique $\mathcal{D}_X$ (proposition 1 §4).

La différence non nulle pour tout $i = 1, \dots, l$, entre chaque champ v_i et le champ correspondant w_i demande une analyse minutieuse et nous conduit à introduire les notations suivantes.

Notations. A tout point $y = H(t_1, \dots, t_l, y_0) \in Im\, H = \pi_X^{-1}(U_{x_0})$, associons la chaîne ordonnée de points $y_0 < \dots < y_i < \dots < y_l = y$ définie à partir de y sur la variété intégrale $M_y = H(y_0 \times \mathbb{R}^l)$ du feuilletage horizontal $\mathcal{H}$ par les formules

$$\begin{cases} y_0 &= H(0^l, y_0) \\ y_1 &= H(t_1, 0^{l-1}, y_0) = \phi_1(t_1, y_0) \\ y_2 &= H(t_1, t_2, 0^{l-2}, y_0) = \phi_2(t_2, \phi_1(t_1, y_0)) \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_i &= H(t_1, \dots, t_i, 0^{l-i}, y_0) = \phi_i(t_i, \dots, \phi_1(t_1, y_0))..) \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_l &= H(t_1, \dots, t_l, y_0) = \phi_l(t_l, \dots, \phi_i(t_i, \dots, \phi_1(t_1, y_0))..) \end{cases}$$

alors on a également

$$\begin{cases} y_1 &= \phi_1(t_1, y_0) \\ y_2 &= \phi_2(t_2, y_1) \\ \dots & \quad \dots\dots \\ y_i &= \phi_i(t_i, y_{i-1}) \\ \dots & \quad \dots\dots \\ y_l &= \phi_l(t_l, y_{l-1}) = y\,. \end{cases}$$

Notons $\phi_i := \{\phi_{iY} : \mathbb{R}\times Y \to Y\}_{Y\geq X}$ les flots des champs v_i relevés continus contrôlés des champs canoniques E_i, $\forall\, i = 1,\dots,l$. Pour ces flots, et pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, notons aussi ϕ_i^τ l'homéomorphisme stratifié (difféomorphisme sur chaque strate $Y \geq X$),

$$\phi_i^\tau = \phi_{i\tau} := \{\phi_{iY}^\tau : Y \to Y\}_{Y\geq X} \qquad , \qquad \phi_i^\tau(y) = \phi_i(\tau, y)\,.$$

Enfin, avec les mêmes notations qu'au §4, pour tout $i = 1,\dots,l$ désignons par w_i les champs images des champs canoniques E_i par l'application H i.e.

$$w_i(y) = H_{*(t_1,\dots,t_l,y_0)}(E_i) \qquad \text{où} \qquad y = H(t_1,\dots,t_l,y_0)\,.$$

Avec ces notations, nous avons alors:

Proposition 1. *Pour tout point $y = H(t_1,\dots,t_l,y_0) \in \pi_X^{-1}(U_{x_0})$*

$$w_i(y) = \phi_l^{t_l}{}_{*y_{l-1}} \circ \cdots \circ \phi_{i+1}^{t_{i+1}}{}_{*y_i}\big(v_i(y_i)\big) \qquad , \qquad \forall\, i = 1,\dots,l-1\,.$$

Preuve. Si $y = H(t_1,\dots,t_l,y_0)$, on a alors:

$$w_i(y) := H_{*(t_1,\dots,t_l,y_0)}(E_i) = \frac{\partial}{\partial \tau_i} H(\tau_1,\dots,\tau_l,y_0)\bigg|_{(\tau_1,\dots,\tau_l)=(t_1,\dots,t_l)} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \tau_i}\bigg|_{(\tau_1,\dots,\tau_l)=(t_1,\dots,t_l)} \phi_l(\tau_l,\dots,\phi_i(\tau_i,\dots,\phi_1(\tau_1,y_0)..)..) =$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_i}\bigg|_{\tau_i=t_i} \phi_l^{t_l} \circ \cdots \circ \phi_{i+1}^{t_{i+1}} \circ \phi_i^{\tau_i}(y_{i-1}) = \phi_l^{t_l}{}_{*y_{l-1}} \circ \cdots \circ \phi_{i+1}^{t_{i+1}}{}_{*y_i}\left(\frac{\partial}{\partial \tau_i}\bigg|_{\tau_i=t_i} \phi_i(\tau_i, y_{i-1})\right) =$$

$$= \phi_l^{t_l}{}_{*y_{l-1}} \circ \cdots \circ \phi_{i+1}^{t_{i+1}}{}_{*y_i}\Big(v_i\big(\phi_i(t_i,y_{i-1})\big)\Big) = \phi_l^{t_l}{}_{*y_{l-1}} \circ \cdots \circ \phi_{i+1}^{t_{i+1}}{}_{*y_i}\big(v_i(y_i)\big)\,. \qquad \square$$

Fixons maintenant une strate $Y > X$ et notons $S_Y^0 \subseteq S_Y^1 \subseteq \cdots \subseteq S_Y^l$ la chaîne des “sous-espaces coordonnés” de $\pi_{XY}^{-1}(U_{x_0}) \equiv Y$, où chaque S_Y^i est constitué de tous les points du type $y = y_i$:

$$S_Y^i = H\big(\mathbb{R}^i \times 0^{l-i} \times {\pi_{XY}}^{-1}(x_0)\big) =$$

$$= \big\{y = H(t_1,\dots,t_i,0^{l-i},y_0) \;\big|\; y_0 \in {\pi_{XY}}^{-1}(x_0)\,;\, t_1,\dots,t_i \in \mathbb{R}\big\}$$

alors pour tout $i = 1, \dots, l$, S_Y^i est une sous-variété de dimension $i + (k-l)$ de Y, où $k = \dim Y$ $(k - l = \dim {\pi_{XY}}^{-1}(x_0))$ et on a

Corollaire 1. *Pour tout $i = 1,\dots,l$ et pour toute strate $Y > X$, le champ de vecteurs w_i coïncide sur les points de S_Y^i avec le champ de vecteurs v_i relevé dans la distribution canonique $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y\geq X}$:*

$$w_i(y) = v_i(y) \qquad , \qquad \forall\, y = y_i \in S^i_Y \qquad et \quad \forall\, Y > X \, .$$

Preuve. Fixons une strate $Y > X$. Si un point $y = H(t_1, \ldots, t_l, y_0)$ coïncide avec le y_i correspondant alors $t_{i+1} = \cdots = t_l = 0$ et donc $y = y_l = y_{l-1} = \cdots = y_i$.

Pour les flots, $t_{i+1} = \cdots = t_l = 0$ entraîne aussitôt $\phi^{t_{i+1}}_{i+1} = \cdots = \phi^{t_l}_l = id_Y$ et leur différentielle est donc toujours l'application linéaire identique

$$\phi^{t_j}_{j\ *y_{j-1}} = id_{Y*y_j} = id_{Y*y} = id_{T_yY} \quad \text{pour tout} \quad j = i+1, \ldots, l \, .$$

En remplaçant dans la formule de la proposition 1, on trouve alors

$$w_i(y) = \phi^{t_l}_{l\ *y_{l-1}} \circ \cdots \circ \phi^{t_{i+1}}_{i+1\ *y_i}\big(v_i(y_i)\big) =$$

$$= id_{Y*y_{l-1}} \circ \cdots \circ id_{Y*y_{i+1}}\big(v_i(y_i)\big) = v_i(y_i) = v_i(y) \, . \quad \square$$

Le corollaire 1 permet de mieux estimer le "défaut éventuel" de chaque vecteur $w_i(y)$ par rapport au vecteur correspondant $v_i(y)$. Plus précisement, le défaut de chaque $w_i(y)$ par rapport à $v_i(y)$ augmente pour i décroissant : il est nul pour $i = l$ et maximal quand $i = 1$. Ceci est dû à la définition de la trivialisation H,

$$H(t_1, \ldots, t_l, y_0) = \phi_l(t_l, \ldots, \phi_{i+1}(t_{i+1}, \phi_i(t_i, \ldots, \phi_1(t_1, y_0)..)..) \, .$$

Dans la pratique, comme pour toute $Y > X$, la sous-variété S^l_Y coïncide avec $\pi^{-1}_{XY}(U_{x_0}) \equiv Y$ tout entier et que S^0_Y coïncide seulement avec la fibre $\pi^{-1}_{XY}(x_0)$ on a

Remarque 1. *Les champs $w_i(y)$ vérifient :*

$$\begin{cases} w_l(y) = v_l(y) & \textit{coïncident sur } \pi^{-1}_X(U_{x_0}) \textit{ tout entier} \\ w_{l-1}(y) = v_{l-1}(y) & \textit{seulement sur les points } y = y_{l-1} \in H\big(\mathbb{R}^{l-1} \times 0^1 \times \pi^{-1}_X(x_0)\big), \\ \quad \ldots & \\ w_1(y) = v_1(y) & \textit{seulement sur les points } y = y_1 \in H\big(\mathbb{R} \times 0^{l-1} \times \pi^{-1}_X(x_0)\big). \quad \square \end{cases}$$

Tout cela souligne aussi que l'ordre des indices $i = 1, \ldots, l$ choisi pour définir l'application H intervient de façon significative.

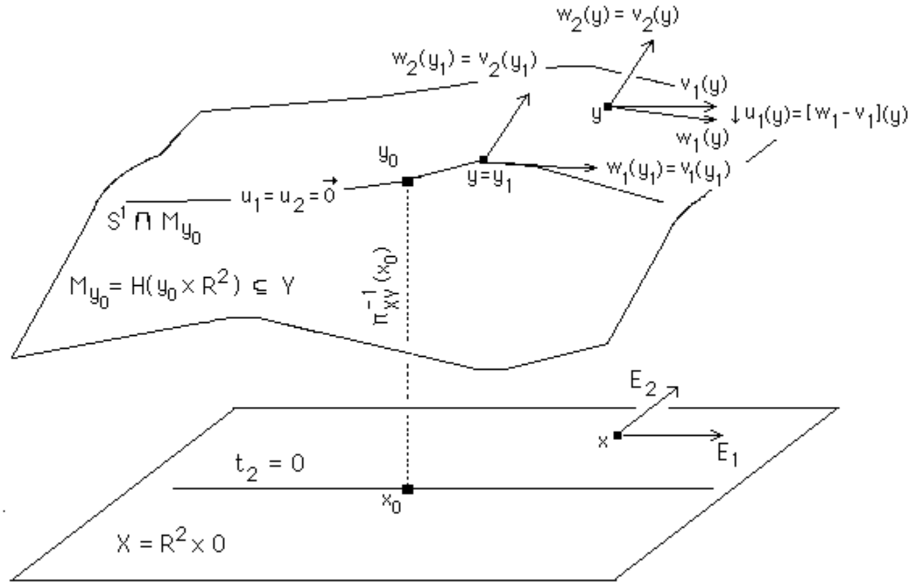

figure 5

Comme autre application de la proposition 1, nous pouvons donner une proposition caractérisant les champs $w_i(y)$ en termes de condition de contrôle.

Proposition 2. *Chaque champ $w_i(y)$ est l'unique relèvement controlé du champ canonique E_i qui est tangent aux feuilles du feuilletage horizontal $\mathcal{H}$.*

Preuve. Fixons une strate $Y > X$. Par définition, les champs $v_j(y)$ sont les relèvements contrôlés dans $\mathcal{D}_{XY}(y)$ des champs constants standards $E_j(x) = E_j$ définis sur $U_{x_0} \equiv X \equiv \mathbb{R}^l \times 0$ et donc pour tout $j = 1, \ldots, l$ et pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, chaque flot $\phi_j^\tau = \{\phi_{jY}^\tau : Y \to Y\}_{Y \geq X}$ vérifie la condition de contrôle

$$\pi_{XY*y}\, \phi_{jY*y}^\tau = \phi_{jX*x}^\tau\, \pi_{XY*} \quad \text{où} \quad x = \pi_{XY}(y)$$

et où

$$\phi_{jX*x}^\tau = id_{T_xX} = id_{\mathbb{R}^l} \qquad , \qquad \text{pour tout } j = 1, \ldots, l$$

car (pour tout j) l'application ϕ_{jX} est le flot "identique" du champ E_j sur X.

D'après la proposition 1 précédente, on obtient alors :

$$\pi_{XY*y}\big(w_i(y)\big) = \pi_{XY*y}\Bigg(\phi_{l\ \ *y_{l-1}}^{t_l} \circ \cdots \circ \phi_{i+1\ *y_i}^{t_i+1}\big(v_i(y_i)\big)\Bigg) =$$

$$= \pi_{XY*y_i}\big(v_i(y_i)\big) = E_i(x) = E_i.$$

Chaque $w_i(y)$ est donc un champ contrôlé par rapport à la projection π_X et de manière analogue on prouve qu'il est contrôlé par rapport à la fonction distance tubulaire ρ_X.

D'autre part, étant donné un point $y = H(t_1, \ldots, t_l, y_0)$, si l'on considère le difféomorphisme, restriction de la trivialisation H à la variété intégrale $M_y = M_{y_0} = H(\mathbb{R}^l \times y_0)$ du feuilletage horizontal, i.e. :

$$H_{|\mathbb{R}^l \times y_0} : \mathbb{R}^l \times \{y_0\} \xrightarrow{\simeq} H(\mathbb{R}^l \times y_0)$$

alors, d'après la proposition 1 , on voit que

$$w_i(y) = H_{*(t_1,\dots,t_l,y_0)}(E_i) = \Big[H_{|\mathbb{R}^l \times y_0}\Big]_{*(t_1,\dots,t_l,y_0)}(E_i)$$

est un vecteur tangent à la feuille horizontale considérée $H(\mathbb{R}^l \times y_0)$.

En conclusion, pour tout $Y > X$, si $y \in Y$ on a

$$w_i(y) \in \pi_{XY}{}_{*y}^{-1}(E_i) \cap T_y H(\mathbb{R}^l \times y_0)$$

et par transversalité et complémentarité de dimension dans T_yY, l'intersection $\pi_{XY}{}_{*y}^{-1}(E_i)$ $\cap\, T_y H(\mathbb{R}^l \times y_0)$ se réduit alors à un unique vecteur. $\square$

5.1 : Sur l'involutivité de la distribution canonique $\mathcal{D}_X$.

La proposition 1, le corollaire 1 et la proposition 2, nous permettent de démontrer entre autres le théorème suivant :

Theoreme 1. *Si tout champ $v_i(y)$, relèvement continu contrôlé du champ de vecteurs constant E_i sur X, est tel que pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, la différentielle ϕ^{τ}_{i*y} préserve la distribution canonique $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$, alors $\mathcal{D}_X$ est une distribution involutive.*

Preuve. Nous démontrons que dans notre hypothèse, pour tout $i = 1, \dots, l$ le champ v_i relevé dans la distribution $\mathcal{D}_X$ coïncide, sur tous les points $\pi_X^{-1}(U_{x_0}) \equiv T_X$, avec le champ w_i relevé de E_i dans le feuilletage $\mathcal{H}$ (proposition 2).

Fixons un indice $i = 1, \dots, l$ et considérons le champ w_i.

Fixons en outre une strate $Y > X$ (avec notre identification $Y \equiv \pi_{XY}^{-1}(U_{x_0}) \equiv T_{XY}$), soit $y \in Y$ un point fixé arbitrairement et considérons la chaîne des "points coordonnés" qui lui sont associés : $y_0 < \dots < y_l = y$.

Nous démontrerons l'égalité $w_i(y) = v_i(y)$ en la vérifiant par récurrence sur la chaîne de points $y_0 < \dots < y_l = y$. On va donc vérifier que

$$w_i(y_1) = v_i(y_1)\,, \quad w_i(y_2) = v_i(y_2)\,, \quad \cdots\,, \quad w_i(y_l) = v_i(y_l)$$

ce qui nous permettra de conclure car $y = y_l$ et donc $w_i(y) = w_i(y_l) = v_i(y_l) = v_i(y)$.

Il découle immédiatement du corollaire 1 que

$$w_i(y_1) = v_i(y_1)\,, \quad \cdots\,, \quad w_i(y_i) = v_i(y_i)$$

et donc il reste à vérifier que

$$w_i(y_{i+1}) = v_i(y_{i+1})\,, \quad \cdots\,, \quad w_i(y_l) = v_i(y_l)\,.$$

D'après la proposition 1, on a facilement:

$$w_i(y_{i+1}) = \phi^{t_{i+1}}_{i+1\ *y_i}\big(v_i(y_i)\big)\,.$$

D'autre part, comme $v_i(y_i) \in \mathcal{D}_{XY}(y_i)$ et comme dans nos hypothèses $\phi^{t_{i+1}}_{i+1\ *y_i}$ préserve la distribution canonique, on trouve aussi :

$$w_i(y_{i+1}) = \phi^{t_{i+1}}_{i+1\ *y_i}\big(v_i(y_i)\big) \in \phi^{t_{i+1}}_{i+1\ *y_i}\big(\mathcal{D}_{XY}(y_i)\big) = \mathcal{D}_{XY}(\phi^{t_{i+1}}_{i+1}(y_i)) = \mathcal{D}_{XY}(y_{i+1})\,.$$

Alors $w_i(y_{i+1}) \in \mathcal{D}_{XY}(y_{i+1})$ et donc les vecteurs $w_i(y_{i+1})$ et $v_i(y_{i+1})$ sont tous les deux caractérisés comme l'unique vecteur de $\mathcal{D}_{XY}(y_{i+1}) \cap \pi_{XY*y_{i+1}}^{-1}(E_i)$:

$$w_i(y_{i+1}) = \mathcal{D}_{XY}(y_{i+1}) \cap \pi_{XY*y_{i+1}}^{-1}(E_i) = v_i(y_{i+1})\,.$$

De nouveau, à partir des relations:

$$w_i(y_{i+2}) = \phi_{i+2\;*y_{i+1}}^{t_{i+2}}\Big(\phi_{i+1\;*y_i}^{t_{i+1}}(v_i(y_i))\Big) = \phi_{i+2\;*y_{i+1}}^{t_{i+2}}(w_i(y_{i+1})) = \phi_{i+2\;*y_{i+1}}^{t_{i+2}}(v_i(y_{i+1}))$$

on trouve que $w_i(y_{i+2}) \in \phi_{i+2\;*y_{i+1}}^{t_{i+2}}(\mathcal{D}_{XY}(y_{i+1}))$ et comme $\phi_{i+2\;*y_{i+1}}^{t_{i+2}}$ préserve la distribution canonique, on trouve aussi :

$$w_i(y_{i+2}) \in \phi_{i+2\;*y_{i+1}}^{t_{i+2}}(\mathcal{D}_{XY}(y_{i+1})) = \mathcal{D}_{XY}(\phi_{i+2}^{t_{i+2}}(y_{i+1})) = \mathcal{D}_{XY}(y_{i+2})\,.$$

Donc on a

$$w_i(y_{i+2}) = \mathcal{D}_{XY}(y_{i+2}) \cap \pi_{XY*y_{i+2}}^{-1}(E_i) = v_i(y_{i+2})$$

et ainsi de suite, par récurrence sur l'index $j = i+1, \ldots, l$ du point $y_j \in Y$, on obtient que

$$w_i(y_l) = v_i(y_l) \quad \text{i.e.} \quad w_i(y) = v_i(y)$$

pour tout $y \in Y$, car $y_l = y$ d'après les notations introduites au début du §5.

On en déduit alors que la distribution canonique $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ engendrée par les champs $(v_1, \ldots, v_l)$ coïncide nécéssairement avec la distribution $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ engendrée par les champs $(w_1, \ldots, w_l)$. Cette dernière étant évidemment intégrable puisqu' admettant comme feuilletage $\mathcal{H} = \{H(\mathbb{R}^l \times y_0)\}$, on conclut que $\mathcal{D}_X$ l'est également. □

5.2 : Sur la (a)-régularité sur X du feuilletage $\mathcal{H}$.

Afin de caractériser, en termes de limites des normes de certaines restrictions des flots $\psi_{i*y_i}^{t_i}$ (ou bien des $\phi_{i*y_i}^{t_i}$), la (a)-régularité du feuilletage $\mathcal{H}$, nous considérons d'abord les propriétés suivantes des champs w_i pour $i = 1, \ldots, l$.

Proposition 1. *Les champs w_i vérifient les propriétés suivantes :*

1) Le flot de chaque champ $w_i(y)$ est l'application $\psi_i : \mathbb{R} \times \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \to \pi_X^{-1}(U_{x_0})$, dont l'image de tout point (t, y) avec $y = H(t_1, \ldots, t_l, y_0)$ est donnée par

$$\psi_i(t, y) = \phi_l(t_l, \ldots, \phi_i(t + t_i, y_{i-1}))..) = \phi_l(t_l, \ldots, \phi_i(t, y_i))..)$$

2) La trivialisation topologique locale H en U_{x_0} de la projection $\pi_X : T_X \to X$ peut être réécrite en remplaçant les flots ϕ_i (des champs v_i) par les flots ψ_i (des champs $w_i(y)$):

$$H(t_1, \ldots, t_l, y_0) := \phi_l(t_l, \ldots, \phi_1(t_1, y_0))..) = \psi_l(t_l, \ldots, \psi_1(t_1, y_0))..).$$

Preuve 1). Il est évident que chaque application $\psi_i(t, y)$ vérifie $\psi_i(0, y) = 0$ (et il n'est pas difficile de vérifier que c'est un groupe à un paramètre).

D'autre part, pour tout point (τ, y) avec $y = \phi_l(t_l, \ldots, \phi_1(t_1, y_0))..)$ on a :

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=\tau} \psi_i(t, y) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=\tau} \phi_l(t_l, \ldots, \phi_i(t_i + t, \ldots, \phi_1(t_1, y_0)..)..) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=\tau} \phi_l^{t_l} \circ \cdots \circ \phi_{i+1}^{t_{i+1}} \Big(\phi_i(t_i + t, y_{i-1})\Big)$$

ce qui, en notant $z = \phi_l(t_l, \ldots, \phi_i(t_i + \tau, \ldots, \phi_1(t_1, y_0)..)..) = z_l$, est aussi égal à

$$= \phi_l^{t_l}{}_{*z_{l-1}} \circ \cdots \circ \phi_{i+1}^{t_{i+1}}{}_{*z_i} \left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=\tau} \phi_i(t_i + t, y_{i-1})\right) =$$

et comme ϕ est le flot de v_i, cela vaut encore

$$= \phi_l^{t_l}{}_{*z_{l-1}} \circ \cdots \circ \phi_{i+1}^{t_{i+1}}{}_{*z_i} \Big(v_i\big(\phi_i(t_i + \tau, y_{i-1})\big)\Big) =$$

ce qui est égal d'après la proposition 1 à:

$$w_i\Big(\phi_l(t_l, \ldots, \phi_i(t_i + \tau, \ldots, \phi_1(t_1, y_0)..)..)\Big) = w_i\big(\psi(\tau, y)\big).$$

La propriété $\frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=\tau}\psi_i(t, y) = w_i(\psi_i(\tau, y))$ étant vérifiée pour tout $y \in Y$, il s'en suit que $\psi(t, y)$ est précisément le flot du champ $w_i(y)$.

Preuve 2). Fixons une strate $Y > X$.

Comme, d'après le corollaire 1, les deux champs de vecteurs tangents $v_{i|S_Y^i} = w_{i|S_Y^i}$ coïncident sur tous les points du type $y_i = \phi_i(t_i, \ldots, \phi_1(t_1, y_0))..)$ appartenant à la sous-variété S_Y^i, leurs flots (restrictions) $\phi_{i|\mathbb{R}\times S_Y^i} = \psi_{i|\mathbb{R}\times S_Y^i}$ coïncident alors également.

En particulier, $\forall\, i = 1, \ldots, l$ et pour tout point du type $y_{i-1} \in S_Y^{i-1} \subseteq S_Y^i$, on a

$$\phi_i(t_i, y_{i-1}) = \psi_i(t_i, y_{i-1}) \qquad , \qquad \forall\, t_i \in \mathbb{R}\,.$$

Alors, par récurrence sur $i = 1, \ldots, l$ croissant, on en déduit que pour tout point $(t_1, \ldots, t_l, y_0) \in \mathbb{R}^l \times \pi_{XY}^{-1}(U_{x_0})$ on a :

$$\begin{cases} \phi_1(t_1, y_0) = \psi_1(t_1, y_0) \\ \phi_2(t_2, \phi_1(t_1, y_0)) = \phi_2(t_2, y_1) = \psi_2(t_2, y_1) = \psi_2(t_2, \psi_1(t_1, y_0)) \\ \\ \ldots \quad \text{et ainsi de suite} \quad \ldots \\ \\ \phi_l(t_l, (\phi_{l-1}(t_{l-1}, \ldots, \phi_1(t_1, y_0)..)) = \phi_l(t_l, y_{l-1}) \\ \qquad\qquad\qquad = \psi_l(t_l, y_{l-1}) = \psi_l(t_l, (\psi_{l-1}(t_{l-1}, \ldots, \psi_1(t_1, y_0)..)) \end{cases}$$

ce qui conclut la preuve. □

Remarque 1. *Les champs de vecteurs différences*

$$u_i(y) := w_i(y) - v_i(y) \quad , \quad \textit{pour tout } i = 1, \ldots, l$$

sont tangents aux fibres de la projection π_{XY} en tout point $y \in T_{XY}$ et $\forall\, Y > X$.

Si $Z > Y$ sont deux strates telles que $Z > Y > X$ et $z \in T_{YZ} \cap T_{XY}$ alors le champ $u_i(z) := w_i(z) - v_i(z)$ n'est pas tangent (en général) aux fibres de la projection π_{YZ}. Une telle propriété est valable si et seulement si la restriction $\mathcal{D}_{XY}$ de $\mathcal{D}_X$ à T_{XY} est involutive.

Preuve. C'est immédiat car comme $\forall Y > X$, $v_i(y)$ et $w_i(y)$ vérifient tous deux la condition de π_X-contrôle, on a :

$$\begin{cases} \pi_{XY*y}(v_i(y)) = E_i \quad \text{pour tout } i \ , \\ \quad \text{et} \\ \pi_{XY*y}(w_i(y)) = E_i \quad \text{pour tout } i \end{cases}$$

et donc pour tout $y \in Y$:

$$\pi_{XY*y}(u_i(y)) = \pi_{XY*y}(w_i(y) - v_i(y)) = \pi_{XY*y}(w_i(y)) - \pi_{XY*y}(v_i(y)) = 0\,,$$

i.e. $u_i(y) \in \ker \pi_{XY*y}$.

D'autre part, pour justifier la deuxième affirmation il suffit de remarquer que, si $z \in T_{YZ} \cap T_{XY}$ et $y = \pi_{YZ}(z)$, alors :

$$\pi_{YZ*z}(w_i(z) - v_i(z)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{YZ*z}(w_i(z)) = \pi_{YZ*z}(v_i(z)) \quad \Leftrightarrow \quad w_i(y) = v_i(y)\,. \quad \square$$

Les énoncés de la remarque 2 et du théorème 1 qui la suit sont valables à condition que les normes des vecteurs et les flots des champs qui apparaissent soient considérés après avoir linéarisé l'ouvert U_{x_0} via une carte transformant de plus la projection π_X dans la projection canonique $pr_{\mathbb{R}^l \times 0^{n-l}}$. Un énoncé plus général était possible en considérant un S.D.C. dont les fibres $\pi_X^{-1}(x)$ de π_X rencontrent orthogonalement X (Chap. I §..).

Remarque 2. *Pour tout $i = 1,\dots,l$ on a :*

$$1 \leq ||E_i|| \leq \ min\, \{||v_i(y)||\,,\, ||w_i(y)||\} \quad pour\ tout \quad i = 1,\dots,l \quad et\, \forall\, y \in Y\,.$$

Preuve. C'est évident car comme v_i et w_i vérifient les conditions de π_X-contrôle $\pi_{X*x}(v_i(y)) = E_i = \pi_{X*x}(w_i(y))$ et comme $\pi_X = pr_{\mathbb{R}^l \times 0^{n-l}}$, on a tout de suite

$$pr_{\mathbb{R}^l \times 0^{n-l}}(v_i(y)) = E_i = pr_{\mathbb{R}^l \times 0^{n-l}}(w_i(y))\,. \quad \square$$

La proposition 3 et les remarques précédentes nous suggèrent la propriété suivante (que l'on verra mieux au §6) qui est en réalité une caractérisation de la (a)-régularité sur X du feuilletage horizontal $\mathcal{H}$ et qui peut être très utile dans le cas où les strates sont analytiques et que l'on sait contrôler la courbure sectionelle des feuilles $H(\mathbb{R}^l \times y_0)$ de $\mathcal{H}$ (voir [**Wi**]).

Proposition 2. *Si les normes des restrictions aux feuilles de $\mathcal{H}$ des différentielles de $\psi_i^{t_i}$ tendent vers 1 quand $y \to x \in \mathbb{R}^l \times 0$, i.e.*

$$\lim_{y \to x} ||\ \psi^{t_i}_{i*y_i|_{T_{y_i}M_{y_i}}}\ || = 1\ ,$$

alors le feuilletage horizontal $\mathcal{H}$ est (a)-régulier sur $\mathbb{R}^l \times 0$.

Preuve. Fixons une strate $Y > \mathbb{R}^l \times 0$. Comme pour tout point $y \in Y$, l'espace tangent au feuilletage $\mathcal{H}$,

$$T_y\mathcal{H} = T_y M_y = [w_1(y), \ldots, w_l(y)]$$

est engendré par les vecteurs $\{w_i(y)\}_{i \leq l}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^l \times 0$, on a évidemment $T_x\mathbb{R}^l \times 0 = \mathbb{R}^l \times 0$, il nous suffit alors de montrer que

$$\lim_{y \to x} w_i(y) = E_i \quad , \quad \forall\, i = 1, \ldots, l \, .$$

Si $i = l$, le corollaire 1 donne tout de suite l'égalité $w_l(y) = v_l(y)$ pour tout point y et donc

$$\lim_{y \to x} w_l(y) = \lim_{y \to x} v_l(y) = E_l$$

car $v_l(y)$ est un relevé continu de E_l.

Si $i \leq l-1$, alors, grâce à la proposition 1, on a $w_i(y) = \psi_{l\ *y_{l-1}}^{t_l} \circ \cdots \circ \psi_{i+1\ *y_i}^{t_{i+1}}(v_i(y_i))$ et d'autre part la remarque 2 donne aussi :

$$1 \leq ||E_i|| \leq ||w_i(y)|| \leq$$

$$\leq \Big|\Big|\, \psi^{t_l}_{l*y_{l-1}|_{T_{y_{l-1}}M_{y_{l-1}}}} \Big|\Big| \cdot \quad \cdots \quad \cdot \Big|\Big|\, \psi^{t_{i+1}}_{i+1*y_i|_{T_{y_i}M_{y_i}}} \Big|\Big| \cdot \Big|\Big|\, v_i(y_i) \,\Big|\Big|.$$

Donc d'après l'hypothèse :

$$\lim_{y \to x} \Big|\Big|\, \psi^{tj+1}_{j+1*y_{j+1}|_{T_{y_j}M_{y_j}}} \Big|\Big| \;=\; 1 \qquad , \qquad \forall\, j = l, \ldots, i+1$$

et grâce à la continuité du relèvement v_i

$$\lim_{y \to x} v_i(y_i) = E_i,$$

on peut déduire que

$$\lim_{y \to x} ||\, w_i(y) \,|| \;=\; 1 \, .$$

Comme l'hypothèse de contrôle nous assure que le vecteur E_i doit être, pour tout y, précisément la composante sur $\mathbb{R}^l \times 0^{n-l}$ du vecteur $w_i(y)$, on en conclut que

$$\lim_{y \to x} w_i(y) \;=\; E_i \, . \quad \Box$$

5.3 : Sur une certaine rigidité du feuilletage $\mathcal{H}$.

Afin de montrer une proposition d'unicité des vecteurs w_i, faisons quelques observations.

La relation choisie pour ordonner les flots ϕ_i des champs relevés v_i sur $\mathcal{D}_X$ dans la formule définissant la trivialisation topologique H locale en U_{x_0} est déterminante pour le feuilletage horizontal $\mathcal{H}$ de $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$.

En réalité, l'involutivité de la distribution canonique $\mathcal{D}_X$ (fausse en général) est une condition nécessaire et suffisante pour que le feuilletage $\mathcal{H}$ ne dépende pas de l'ordre choisi pour composer les flots ϕ_i.

Une fois fixé le choix $\phi_l,\dots,\phi_1$ de l'ordre des index $1,\dots,l$, pour composer les flots $\{\phi\}_i$ dans la formule qui définit la trivialisation H on obtient que le champ w_l relevé sur le feuilletage coïncide avec v_l sur $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$ tout entier. Par contre, pour tout $i=1,\dots,l-1$ le champ w_i (ne vérifiant pas a priori $w_i(y)=v_i(y)$, $\forall y$) reste univoquement déterminé par les conditions $[w_i,w_j]=0$, $\forall\, j=i+1,\dots,l$, et par la condition demandant que ses valeurs coïncident avec celles de $v_{i|S^i_Y}$ sur la sous-variété S^i_Y, $\forall\, Y>X$. En fait, on a :

Proposition 5. *Pour tout $i=1,\dots,l$ le champ de vecteurs*

$$w_i(y)=\phi^{t_l}_{l\ *y_{l-1}}\circ\cdots\circ\phi^{t_{i+1}}_{i+1\ *y_i}\big(v_i(y_i)\big)$$

est l'unique champ de vecteurs complet w sur $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$ vérifiant pour tout $Y>X$ les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (1)_i: \quad [w,w_j](y)=0 \qquad \forall\, y\in Y \quad et \quad \forall\, j=i+1,\dots,l \\[2ex] (2)_i: \quad w_{|S^i_Y}=v_{i|S^i_Y} \qquad \forall\, y\in S^i_Y\ . \end{cases}$$

Preuve. D'après le corollaire 1, il est clair que le champ w_i défini par la formule $w_i(y)=\phi^{t_l}_{l\ *y_{l-1}}\circ\cdots\circ\phi^{t_{i+1}}_{i+1\ *y_i}\big(v_i(y_i)\big)$ vérifie les conditions $(1)_i$ et $(2)_i$ ci-dessus.

Il reste à prouver alors que les conditions $(1)_i$ et $(2)_i$ déterminent univoquement w_i.

Soit alors w un champ de vecteurs sur $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$ vérifiant les conditions $(1)_i$ et $(2)_i$ et notons $\psi=\{\psi_Y:Y\times\mathbb{R}\to Y\}_{Y\geq X}$ son flot.

Avec les notations introduites en début de paragraphe, d'après le 2) de la proposition 3 en remplaçant les flots ϕ_i par les ψ_i, tout point $y\in Y$ s'écrit comme $y=y_l=\psi_l(t_l,\dots,\psi_i(t_i,\dots,\psi_1(t_1,y_0))..)$ de sorte que l'on puisse écrire :

$$\psi(t,y)=\psi(t,\psi_l(t_l,\dots,\psi_{i+1}(t_{i+1},y_i)..)..)\,.$$

D'autre part, comme w vérifie $(1)_i$, son flot ψ commute avec chacun des flots ψ_j où $j=i+1,\dots,l$, et on a donc aussi :

$$\psi(t,y)=\psi_l(t_l,\dots,\psi_{i+1}(t_{i+1},\psi(t,y_i)..)..).$$

Maintenant, grâce à la condition $(2)_i$ et au corollaire 1, les champs tangents restrictions à la sous-variété S^i_Y vérifient pour tout $Y>X$:

$$w_{|S^i_Y}=v_{i|S^i_Y}=w_{i|S^i_Y}\,.$$

Les restrictions des flots à S^i_Y coïncident donc également

$$\psi_{|\mathbb{R}\times S^i_Y}=\psi_{i|\mathbb{R}\times S^i_Y}\,.$$

D'où $\psi(t,y_i)=\psi_i(t,y_i)$, pour tout $y_i\in S^i_Y$ et l'on trouve

$$\psi(t,y)=\psi_l(t_l,\dots,\psi_{i+1}(t_{i+1},\psi(t,y_i))..)=\psi_l(t_l,\dots,\psi_{i+1}(t_{i+1},\psi_i(t,y_i))..)=$$

qui, par la commutativité des flots ψ_i et la proposition 3., est encore égal à

$$= \psi_i(t_i\psi_l(t_l, \ldots, \psi_{i+1}(t_{i+1}, y_i))..) = \psi_i(t, y).$$

Comme leurs flots $\psi(t, y) = \psi_i(t, y)$ coïncident en tout point $y = y_l \in Y$, les champs de vecteurs $w(y) = w_i(y)$ coïncident alors également. $\square$

§6. Quelques caractérisations de l'involutivité de $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$

Afin de mieux comprendre le phénomène de l'involutivité de la distribution canonique $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y\geq X}$, faisons maintenant quelques observations de caractère général à propos des deux feuilletages, l'un *vertical* $\mathcal{V}$, l'autre *horizontal* $\mathcal{H}$, qui s'obtiennent par la trivialisation H de la projection π_X.

Le domaine du morphisme de trivialisation topologique H de la projection $\pi_X : T_X = \cup_{Y\geq X} T_{XY} \to X$ est l'espace produit $\mathbb{R}^l \times \pi_X^{-1}(x_0)$ dont la projection sur le premier facteur $\mathbb{R}^l$ (*projection verticale*) est le correspondant par H de la projection π_X.

D'autre part, H étant un homéomorphisme, nous déduisons une *projection horizontale* π' qui correspond (via H) à la projection pr_2 sur le deuxième facteur $\pi_X^{-1}(x_0)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^l \times \pi_X^{-1}(x_0) & \xrightarrow{\quad H \quad} & \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \\ pr_2 \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \pi_X^{-1}(x_0) & \xrightarrow{H_{|\pi_X^{-1}(x_0)} = id} & \pi_X^{-1}(x_0)\ . \end{array}$$

Les deux feuilletages triviaux, horizontal et respectivement vertical, qui confèrent au domaine de H sa structure de produit, sont évidemment transverses entre eux et cette transversalité se préserve par le difféomorphisme H sur les feuilletages correspondants dans $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$. Par définition, le feuilletage horizontal induit est celui que nous avons noté $\mathcal{H}$. D'autre part, comme le morphisme H est contrôlé, le feuilletage vertical induit par H coïncide avec le feuilletage ayant pour variétés intégrales les fibres de la projection π_{XY} que nous avions précédemment noté $\mathcal{V}$.

Sur toute strate $Y > X$, les traces de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$ induisent deux feuilletages transverses, $\mathcal{H}_Y$ et $\mathcal{V}_Y$, dont les feuilles $(M_y, {\pi_{XY}}^{-1}(x))$ se coupent en un unique point $\{y_x\} := M_y \cap {\pi_{XY}}^{-1}(x)$. Ce point y_x a pour variété intégrale verticale la fibre de π_{XY} passant par y_x, i.e. précisément ${\pi_{XY}}^{-1}(x)$ et pour variété intégrale horizontale la fibre M_y de π'.

Le diagramme ci-dessus permet de clarifier la situation et de déduire le lemme suivant:

Lemme 1. *Pour toute strate $Y > X$, et pour tout $y \in \pi_{XY}(U_{x_0})$, la projection horizontale π' envoie toute variété intégrale horizontale M_y sur le point où cette dernière rencontre la fibre ${\pi_{XY}}^{-1}(x_0)$,*

$$\pi' : \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \to \pi_X^{-1}(x_0) \quad , \pi'(M_y) = M_y \cap {\pi_{XY}}^{-1}(x_0) = y_0 \quad \textit{où} \quad y = H(t_1, \ldots, t_l, y_0).$$

Donc, les feuilles du feuilletage horizontal $\mathcal{H}$ coïncident avec les fibres de la projection horizontale π' (voir la figure 5 au §5). $\square$

Definition 1. Un champ de vecteurs ζ sur Y est dit *contrôlé par rapport à la projection* π' si pour tout couple de points $y, y' \in Y$ dans la même fibre de π' la condition $\pi'_{*y}(\zeta(y)) = \pi'_{*y_1}(\zeta(y_1))$ est vérifiée. De manière équivalente, on peut dire qu'il existe un champ de vecteurs η tangent à la fibre $\pi_X^{-1}(x_0)$ tel que $\pi'_{*y}(\zeta(y)) = \eta(\pi'(y))$ pour tout $y \in \pi_X^{-1}(U_{x_0})$.

Pour un champ vérifiant une telle condition, nous noterons (par définition) $\eta(y_0) := \pi'_{*y}(\zeta(y))$, y étant un point arbitraire de la fibre $\pi'^{-1}(y_0)$.

L'involutivité de la distribution canonique $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ se caractérise alors de la manière suivante :

Theoreme 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ *est une distribution involutive (autour de* x_0*);*

2) pour tout champ $\zeta = \{\zeta_Y\}_{Y \geq X}$ *relèvement continu,* (π, ρ)*-contrôlé d'un champ de vecteurs* ζ_X *sur* X*, et pour toute* $Y > X$ *la différentielle* ϕ_{Y*y} *préserve la distribution canonique* $\mathcal{D}_X$*, i.e.*

$$\phi_{Y*y}(\mathcal{D}_{XY}(y)) = \mathcal{D}_{XY}(y') \qquad , \qquad \forall\, y, y' = \phi_Y(y)$$

et en particulier se décompose en somme directe $\phi_{Y*y} = \phi^h \oplus \phi^v$ *(voir §3);*

3) pour tout champ ζ_X *sur* X*, le relèvement continu contrôlé* $\zeta = \{\zeta_Y\}_{Y \geq X}$ *du champ* ζ_X *dans* $\mathcal{D}_X$ *est un champ contrôlé par rapport à la projection horizontale* π' *et de plus on a* $\pi'_*(\zeta_Y) = 0$*;*

4) $[v_i, v_j] = 0$ *pour tout* $i, j = 1, \ldots, l$*.*

Preuve. $(1 \Rightarrow 2)$. Cela a été vu dans la démonstration de la proposition 1.

$(2 \Rightarrow 1)$. C'est précisément le théorème 1 du §5, section 5.1.

$(1 = 2 \Rightarrow 3)$. Fixons une strate $Y > X$ supérieure à X.

Par l'hypothèse d'involutivité, pour tout $y = H(t_1, \ldots, t_l, y_0,) \in Y$ on a $\mathcal{D}_{XY}(y) = T_y M_{y_0}$ et comme par définition du relèvement canonique $\zeta_Y(y) \in \mathcal{D}_{XY}(y)$, on a aussi $\zeta_Y(y) \in T_y M_{y_0} = \ker \pi'_{*y}$ et donc $\pi'_{*y}(\zeta_Y(y)) = 0$.

$(3 \Rightarrow 4)$. D'après l'hypothèse 3) appliquée à chacun des relèvements v_i, et comme tous les champs v_i doivent être en outre π'-contrôlés avec $\pi'_{*y_0}(v_i(y_0)) = 0$, nous avons aussi

$$\pi'_{*y}(v_i(y)) = \pi'_{*y_0}(v_i(y_0)) = 0 \qquad , \qquad \text{pour tout } y \in Y \ , \quad \forall\, i = 1, \ldots, l$$

et donc

$$\pi'_{*y}([v_i, v_j]) = [\pi'_{*y}(v_i), \pi'_{*y}(v_j)] = [0, 0] = 0.$$

Nous trouvons que les crochets de Lie $[v_i, v_j](y) \in \ker \pi'_{*y}$ sont des champs tangents au feuilletage horizontal $\ker \pi'_{*y}$.

Les champs de vecteurs $v_i(y)$ relevés des champs canoniques constants E_i $(i = 1, \ldots, l)$ sur X, ont des crochets de Lie qui, grâce à la condition de contrôle par rapport à π_X, vérifient la relation :

$$\pi_{XY*y}([v_i, v_j]) = [\pi_{XY*y}(v_i), \pi_{XY*y}(v_j)] = [E_i, E_j] = 0 \quad , \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, l$$

et donc $[v_i, v_j](y) \in \ker \pi_{XY*y}$ est un champ vertical.

En conclusion

$$[v_i, v_j](y) \in \ker \pi'_{*y} \cap \ker \pi_{XY*y} = 0$$

par transversalité et complémentarité de dimension.

($4 \Rightarrow 1$). C'est évident. □

§7. Le cas général quand $\mathcal{D}_X$ n'est pas nécessairement intégrable. Quelques conclusions.

Dans ce paragraphe, on démontre que si la distribution canonique $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ n'est pas intégrable, la (a)-régularité du feuilletage horizontal $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y \in \pi_X^{-1}(U_{x_0})}$ (condition nécessaire pour l'involutivité) peut alors remplacer l'hypothèse d'involutivité de $\mathcal{D}_X$ en vue d'obtenir des flots relevés et de façon plus générale des morphismes stratifiés horizontalement-C^1 et $\mathcal{H}$-semidifférentiables.

La section 7.1 débute par un théorème donnant plusieurs conditions équivalentes pour que les flots des champs relevés soient horizontalement-C^1 (théorème 1). Nous introduisons ensuite une condition de *"contrôle horizontal"* pour un morphisme stratifié général $f : (A, \Sigma) \to (A', \Sigma')$ dans le but de donner des conditions suffisantes pour que ce morphisme f soit horizontalement-C^1 (théorème 2). Ceci répond partiellement au *problème* posé en conclusion du §4.2. Nous concluons la section 7.1 en présentant une version horizontalement-C^1 du premier théorème d'isotopie de Thom (théorème 3).

Le paragraphe se termine par la section 7.2 dans laquelle nous montrons les analogues des théorèmes 1, 2 et 3 du §7.1 en version $\mathcal{F}$-semidifférentiable.

La distribution canonique $\mathcal{D}_X$, introduite à la définition 1 du §5 (chap. I), était "canonique" dans le sens où elle vérifiait des propriétés importantes obténues dans le théorème 2 (§5 chap. I) mais elle n'était pas univoquement déterminée et dépendait du S.D.C. considéré et de la partition de l'unité particulière fixée pour démontrer ce théorème.

La distribution $\mathcal{D}'_X = \mathcal{D}(\mathcal{H})$ tangent au feuilletage $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y \in W}$, i.e. :

$$\mathcal{D}'_X(y) = T_y\mathcal{H}_y = T_y M_y \quad , \quad \forall\, y \in W = \pi_X^{-1}(U_{x_0})$$

vérifie évidemment toutes les conditions de ce théorème 2, sauf éventuellement la condition de continuité. D'autre part, la (a)-régularité du feuilletage local $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y \in W}$ équivaut précisément à la continuité de $\mathcal{D}'_X$ sur $W = \pi_X^{-1}(U_{x_0})$ et donc, si $\mathcal{H}$ est (a)-régulier, $\mathcal{D}'_X$ peut alors être réinterprétée comme une distribution canonique locale définie dans le voisinage W de x_0 dans la stratification (A, Σ).

La différence essentielle par rapport aux résultats du §4, où $\mathcal{D}_X$ était supposée involutive, est maintenant que nous trouvons des flots de champs relevés qui sont horizontalement-C^1, non plus par rapport à $\mathcal{D}_X$, mais par rapport à $\mathcal{D}'_X$. Cela signifie en particulier que nous devons remplacer les champs $\zeta = \{\zeta_Y\}_{Y \geq X}$ et les flots $\phi = \{\phi_Y\}_{Y \geq X}$ précédents (relevés dans $\mathcal{D}_X$) respectivement par les champs $\xi = \{\xi_Y\}_{Y \geq X}$ et par les flots $\phi = \{\phi_Y\}_{Y \geq X}$ correspondants relevés dans le feuilletage $\mathcal{H}$ (i.e. dans $\mathcal{D}'_X$).

Grâce à la (a)-régularité de $\mathcal{H}$, le relevé ξ sera (de même que ζ) un relèvement continu et contrôlé de ζ_X, i.e. $\lim\limits_{y \to x} \xi_Y(y) = \zeta_X(x)$. D'autre part, ne disposant pas de l'involutivité de $\mathcal{D}_X$ (*), le relevé ξ ne coïncidera alors pas avec le relevé ζ, ni même ψ avec ϕ.

(*) Ce qui assurerait que $\mathcal{D}_X = \mathcal{D}'_X$ comme l'on a vu au §4.

Dans ce paragraphe, $\mathcal{H}$ désignera le feuilletage horizontal $\mathcal{H}_{x_0} = \{M_y\}_{y\in W}$, W notera la préimage $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$ et la distribuiton $\mathcal{D}'_X$ sera notée par $\mathcal{D}_X$.

7.1 : Régularité horizontalement-C^1

Avant d'énoncer les théorèmes de régularité des morphismes stratifiés soumis à l'existence d'un feuilletage $\mathcal{H}$ (a)-régulier, nous précisons la remarque suivante :

Remarque 1. A du Plessis et D. Trotman ont démontré en 1994 que, même dans le cas d'une stratification (b)-régulière, une distribution canonique n'est pas nécessairement involutive tandis que D. Trotman en 1993 a conjecturé que :

Conjecture (Trotman). *Toute stratification (b)-régulière admet localement une distribution canonique involutive (i.e. un feuilletage horizontal (a)-régulier).*

Nous espérons en fait qu'une telle propriété soit également valable pour des stratifications (c)-régulières.

Theoreme 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) Le relèvement contrôlé $\xi = \{\xi_Y : Y \to Y\}_{Y\geq X}$ tangent à $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y\in W}$ de tout champ de vecteurs ξ_X est continu sur U_{x_0} et a un flot $\psi = \{\psi_Y^t\}_{Y\geq X}$, horizontalement-$C^1$ sur U_{x_0} (par rapport à $\mathcal{D}_X$);

2) Les relèvements contrôlés w_i tangents à $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y\in W}$ des champs de vecteurs E_i sont continus sur U_{x_0} pour tout $i = 1,\dots,l$, et ont des flots $\psi_i = \{\psi_{iY}^t : Y \to Y\}_{Y\geq X}$ horizontalement-C^1 sur U_{x_0} (par rapport à $\mathcal{D}_X$);

3) L'homéomorphisme stratifié de trivialisation topologique autour de x_0 de la projection $\pi_X : T_X \to X$,

$$H : \mathbb{R}^l \times \pi_X^{-1}(x_0) \to \pi_X^{-1}(U_{x_0})$$

est horizontalement-C^1 sur $\mathbb{R}^l \times \{x_0\}$;

4) $$\lim_{(t_1,\dots,t_l,y_0)\to x} H_{*(t_1,\dots,t_l,y_0)}(E_i) = E_i \quad , \quad \forall\, x \in X \equiv U_{x_0} \equiv \mathbb{R}^l \ , \ \forall\, i = 1,\dots,l \ ;$$

5) le feuilletage horizontal $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y\in\pi_X^{-1}(x_0)}$ induit par H est (a)-régulier sur U_{x_0} (i.e. il vérifie la conjecture de Trotman sur U_{x_0}).

Preuve. Il convient de montrer tout d'abord que $(3) \iff (4) \iff (5)$.

Dans ce but, considérons le domaine de l'homéomorphisme H muni de la stratification produit de $\mathbb{R}^l$ et de la stratification naturelle de $\pi_X^{-1}(x_0)$:

$$\mathbb{R}^l \times \pi_X^{-1}(x_0) = \mathbb{R}^l \times \{x_0\} \bigcup \Big[\bigcup_{Y>X} \mathbb{R}^l \times \pi_{XY}^{-1}(x_0) \Big]$$

et de même considérons le S.D.C. induit.

Si on note A la strate la plus petite $A = \mathbb{R}^l \times \{x_0\}$, alors toute strate $B > A$ est du type $B = \mathbb{R}^l \times \pi_{XY}^{-1}(x_0)$ avec $Y > X$, et on peut considérer comme distribution canonique relative à A la distribution $\mathcal{D}_A = \{\mathcal{D}_{AB}\}_{B\geq A}$ définie par

$$\mathcal{D}_{AB}(t_1,\dots,t_l,y_0) = \mathbb{R}^l \times \{y_0\} \qquad , \qquad \forall\, (t_1,\dots,t_l,y_0) \in B \ , \ \forall B > A \, .$$

Alors évidemment

$$\mathcal{D}_{AB}(t_1,\ldots,t_l,y_0) = [E_1,\ldots,E_l]\,,$$

et tout vecteur horizontal tangent à B est, indépendamment du point $(t_1,\ldots,t_l,y_0) \in B$, une combination linéaire des vecteurs $E_1, \ldots, E_l$.

Montrer que H est horizontalement-C^1 par rapport à $\mathcal{D}_A$ équivaut alors à montrer que $\forall x \in A$ on a :

$$(*)\ :\ \lim_{(t_1,\ldots,t_l,y_0)\to x} H_{B*(t_1,\ldots,t_l,y_0)}(E_i) = H_{A*x}(E_i) \qquad , \qquad \forall i = 1,\ldots,l\,.$$

$(3 \iff 4)$. Rappelons que la restriction H_A de H à la strate $A = \mathbb{R}^l \times \{x_0\}$ coïncide, (après l'identification $U_{x_0} \equiv \mathbb{R}^l \times 0^{n-l}$), avec l'application identique de A, alors $H_{A*x}(E_i) = E_i$ et l'équivalence s'obtient immédiatement grâce à l'observation $(*)$ ci-dessus.

$(4 \iff 5)$. D'après ce qu'on a vu au §5 les champs, de vecteurs images

$$H_{B*(t_1,\ldots,t_l,y_0)}(E_i) = w_i(y) \qquad \text{où} \qquad y = H(t_1,\ldots,t_l,y_0)\ ,\ \forall\, i = 1,\ldots,l$$

coïncident avec les champs $w_i(y)$ relevés sur le feuilletage $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y\in W}$ dont les feuilles $M_y = H(\mathbb{R}^l \times y_0)$ ont pour espaces tangents

$$T_y\mathcal{H}_y = T_yM_y = H_{*(t_1,\ldots,t_l,y_0)}(\mathbb{R}^l \times 0) = \left[\left\{H_{*(t_1,\ldots,t_l,y_0)}(E_i)\right\}_{i\le l}\right] = [\{w_i(y)\}_{i\le l}]\,.$$

On en déduit alors que la condition *4)* est vŕifiée si et seulement pour tout $x \in A$

$$\lim_{(t_1,\ldots,t_l,y_0)\to x} H_{*(t_1,\ldots,t_l,y_0)}(E_i) = E_i \quad (\forall\, i) \quad \iff \quad \lim_{y\to x} w_i(y) = E_i \quad (\forall\, i)$$

$$\iff \quad \lim_{y\to x} T_y\mathcal{H}_y = \mathbb{R}^l \times 0\,,$$

i.e. si et seulement si $\mathcal{H}$ est (a)-régulier sur $X \equiv U_{x_0} \equiv \mathbb{R}^l \times 0$.

$(4 = 5 \Rightarrow 1)$. Soit $\mathcal{D}_X = \mathcal{D}(\mathcal{H})$ la distribution des plans tangents au feuilletage horizontal $\mathcal{H}$.

Comme $\mathcal{H}$ est (a)-régulier sur U_{x_0}, $\mathcal{D}_X$ est alors continue sur $X \equiv U_{x_0}$ et peut être considérée comme une distribution canonique relative à la strate X.

D'autre part, $\mathcal{D}_X$ est une distribution intégrable (en admettant comme feuilletage $\mathcal{H}$) et donc grâce à la proposition 2 du §5, les champs relevés des champs canoniques E_i dans $\mathcal{D}'_X$ sont précisément les champs w_i continus sur X.

Pour tout champ de vecteurs ξ_X défini sur X, son relevé $\xi = \{\xi_Y\}_{Y\geq X}$ tangent aux feuilletage $\mathcal{H}$, de nouveau grâce à la proposition 2 du §5, coïncide avec le relevé canonique de ξ_X dans $\mathcal{D}'_X$ qui est continu sur X.

Grâce alors aux théorème 2 du §4.1, on conclut que son flot (à tout instant $t \in \mathbb{R}$) $\psi = \{\psi^t_Y : Y \to Y\}_{Y\geq X}$ est horizontalement-C^1 sur X.

$(1 \Rightarrow 2)$. C'est évident car pour tout $i = 1,\ldots,l$, le champ $w_i(y)$ est un relèvement particulier obtenu en considérant $\xi_X = E_i$.

$(2 \Rightarrow 4)$. D'après la proposition 2 du §5, les champs de vecteurs $w_1,\ldots,w_l$ coïncident avec les relèvements contrôlés tangents à $\mathcal{H}$,

$$T_y\mathcal{H}_y = T_yM_y = [w_1(y),\,\ldots,\,w_l(y)]\,,$$

et comme ces derniers sont par hypothèse continus sur X i.e. pour tout $x \in X$ on a

$$\lim_{y \to x} w_i(y) = E_i \qquad , \qquad \text{pour tout} \quad i = 1, \ldots, l\,,$$

on en conclut que pour tout $x \in X \equiv \mathbb{R}^l \times 0$:

$$\lim_{y \to x} T_y \mathcal{H}_y = \lim_{y \to x} T_y M_y = \lim_{y \to x} [w_1(y), \ldots, w_l(y)] = [E_1, \ldots, E_l] = T_x X\,. \quad \square$$

La remarque ci-dessous caractérise la (a)-régularité du feuilletage horizontal $\mathcal{H}$ en termes de *condition* (a_f) *de Thom* (définie au chapitre I §4).

Remarque 2. *Le feuilletage $\mathcal{H}$ est (a)-régulier (sur $X \equiv U_{x_0}$) si et seulement si la projection horizontale π'*

$$\pi' : \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \longrightarrow \pi_X^{-1}(x_0) \qquad , \qquad \pi'(M_{y_0}) = y_0$$

vérifie la condition de Thom (sur $X \equiv U_{x_0}$) en tant que morphisme stratifié.

Preuve. C'est élémentaire. $\square$

Nous introduisons maintenant la notion d'application π'-contrôlée afin de résumer les propriétés essentielles qui nous ont permis de démontrer les théorèmes de régularité horizontalement-C^1 et $\mathcal{H}$-semidifférentiabilité des flots des champs relevés du §4.1 et §4.2. Ceci nous permettra d'obtenir des théorèmes analogues pour des morphismes stratifiés plus généraux.

Il est bon de préciser avant que le feuilletage horizontal local $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{x_0}$ n'est pas intrinsèque car il dépend (a priori) du point $x_0 \in X$ choisi comme "centre de la trivialisation" H de la projection $\pi_X : T_X \to X$ et de l'ordre choisi pour composer les flots $\phi_1, \ldots, \phi_l$ dans la formule définissant H (si $\mathcal{D}_X$ est involutive, $\mathcal{H}$ est intrinsèque). Par conséquent, la projection horizontale $\pi' : W = \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \to \pi_X^{-1}(x_0)$ n'est pas intrinsèque non plus.

Definition 1. Soient $f = \{f_Y\}_Y : (A, \Sigma) \to (A', \Sigma')$ un morphisme stratifié, X une strate de Σ, x_0 un point de X, $X' \in \Sigma'$ la strate telle que $f(X) \subseteq X'$, $x'_0 = f_X(x_0)$, $W = \pi_X^{-1}(U_{x_0})$ et $W' = \pi_{X'}^{-1}(U'_{x'_0})$.

Nous dirons que f est π'*-contrôlé (par rapport aux feuilletages horizontaux $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y \in W}$ de A et $\mathcal{H}' = \{M'_y\}_{y' \in W'}$ de A')* s'il préserve les feuilles horizontales de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$; i.e. si pour toute feuille horizontale $M_y \in \mathcal{H}$, on a $f_Y(M_y) \subseteq M_{y'}$ où $y' = f_Y(y)$.

D'après le lemme 1 du §6, $\forall\, Y \geq X$ et $\forall\, y \in Y$ on a $M_y = {\pi'}_{XY}^{-1}(\pi'_{XY}(y))$ et donc de façon équivalente, on peut dire que f est π'-contrôlé s'il vérifie la *condition de contrôle horizontal*

$$f_Y\Big({\pi'}_{XY}^{-1}\big(\pi'_{XY}(y)\big)\Big) \subseteq {\pi'}_{X'Y'}^{-1}\Big(\pi'_{X'Y'}\big(f_Y(y)\big)\Big) \quad , \quad \forall\, y \in Y \text{et} \;\; \forall\, Y \geq X\,.$$

Le théorème qui suit résume alors dans un contexte plus général les résultats du §4.1 et donne une réponse partielle au *problème* présenté en conclusion du §4.2.

Theoreme 2. *Soit $f = \{f_Y\}_{Y \in \Sigma} : (A, \Sigma) \to (A', \Sigma')$ un morphisme stratifié contrôlé entre deux espaces stratifiés (c)-réguliers (A, Σ) et (A', Σ').*

Soient $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y\in W}$ *et* $\mathcal{H}' = \{M_{y'}\}_{y'\in W'}$ *deux feuilletages stratifiés respectivement du voisinage* $W = \pi_X^{-1}(U_{x_0})$ *de* $x_0 \in X$ *dans* A *et du voisinage* $W' = \pi_{X'}^{-1}(U'_{x'_0})$ *de* $x'_0 = f(x_0) \in X'$ *dans* A'.

Si $\mathcal{H}$ *et* $\mathcal{H}'$ *sont* (a)*-réguliers sur* U_{x_0} *et* $U'_{x'_0}$ *et si* f *est* π'*-contrôlé par rapport à* $\mathcal{H}$ *et* $\mathcal{H}'$*, alors* f *est horizontalement-*C^1 *sur* U_{x_0}.

Preuve. Supposons que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ et $A' \subseteq \mathbb{R}^m$ et considérons les deux distributions d'espaces tangents aux feuilletages $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y\in W}$ et $\mathcal{H}' = \{M_{y'}\}_{y'\in W'}$:

$$\mathcal{D}_X := \mathcal{D}(\mathcal{H}) \quad , \quad \mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y\geq X} \quad , \quad \mathcal{D}_{XY}(y) = T_yM_y$$

$$\mathcal{D}_{X'} := \mathcal{D}(\mathcal{H}') \quad , \quad \mathcal{D}_{X'} = \{\mathcal{D}_{X'Y'}\}_{Y'\geq X'} \quad , \quad \mathcal{D}_{X'Y'}(y') = T_{y'}M_{y'}$$

définies localement sur W et W'.

Comme $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont deux feuilletages stratifiés de dimensions $\dim \mathcal{H} = \dim X$ et $\dim \mathcal{H}' = \dim X'$, comme les feuilles $M_y \in \mathcal{H}$ et $M_{y'} \in \mathcal{H}'$ sont transverses aux projections π_X et $\pi_{X'}$, et contenues dans les fibres des fonctions distances ρ_X et $\rho_{X'}$ et comme $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont (a)-réguliers sur U_{x_0} et sur $U'_{x'_0}$, alors $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_{X'}$ définissent deux distributions canoniques locales relatives respectivement aux strates U_{x_0} et $U'_{x'_0}$ de W et W'.

Fixons une strate $Y \geq X$ de Σ, considérons la strate $Y' \geq X'$ de Σ' contenant $f_Y(Y)$, et pour tout $y \in Y$ notons $y' = f(y) \in Y'$.

Comme $f = \cup_{Z\in\Sigma} f_Z$ est π'-contrôlée (par rapport aux feuilletages $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$) nous avons $f_Y(M_y) \subseteq M_{y'}$ et donc pour tout $y \in Y$ l'application $f_{Y*y} : T_yY \to T_{y'}Y'$ vérifie

$$f_{Y*y}(\mathcal{D}_{XY}(y)) = f_{Y*y}(T_yM_y) \subseteq T_{y'}M_{y'} = \mathcal{D}_{X'Y'}(y')\,.$$

D'autre part, f étant π-contrôlée on a aussi $f_Y(\ker \pi_{XY*y}) \subseteq \ker \pi_{X'Y'*y'}$ et donc f_{Y*y} se décompose en une somme directe

$$f_{Y*y} = f_y^h \oplus f_y^v \;:\; \mathcal{D}_{XY}(y) \oplus \ker \pi_{XY*y} \xrightarrow{\;f_y^h\oplus f_y^v\;} \mathcal{D}_{X'Y'}(y') \oplus \ker \pi_{X'Y'*y'}\,.$$

Soit $p \in U_{x_0}$ et $p' = f(p)$. Afin de montrer que f est horizontalement-C^1 en p, U_{x_0} et $U'_{x'_0}$ étant tous deux des domaines des systèmes de coordonnées locales de X et X', on peut identifier $U_{x_0} \equiv \mathbb{R}^l \times 0^{n-l}$ et $U'_{x'_0} \equiv \mathbb{R}^{l'} \times 0^{m-l'}$.

Notons alors $\sigma = (E_1, \ldots, E_l)$ le champ de repères constants coordonnées de U_{x_0} et $\sigma_y := (v_1(y), \ldots, v_l(y))$ les champs de repères relevés continus contrôlés dans $\mathcal{D}_X$. De même considérons les champs de repères $\sigma' := (E'_1, \ldots, E'_{l'})$ et $\sigma_{y'} := (v'_1(y'), \ldots, v'_{l'}(y'))$ et pour tout $y \in W$ notons $x = \pi_{XY}(y)$.

Comme f est π-contrôlée, on a l'égalité :

$$\pi_{X'Y'*y'} f_{Y*y} = f_{X*x}\pi_{XY*y} \quad , \quad \forall\, y \in Y \text{ et } \forall\, Y > X$$

grâce à laquelle il est facile de vérifier que la matrice $A(y)$ qui représente la restriction $f_y^h : \mathcal{D}_{XY}(y) \to \mathcal{D}_{X'Y'}(y')$ par rapport aux bases $\sigma_y = \{v_i(y)\}_{i=1}^l$ et $\sigma_{y'} = \{v'_j(y')\}_{j=1}^{l'}$ coïncide avec la matrice $A = A(x) = \left(A_j^i\right)_{\substack{i\leq l \\ j\leq l'}}$ qui représente l'application linéaire f_{X*x} : $T_xX \to T_{x'}X'$ par rapport aux bases canoniques $\sigma = (E_1, \ldots, E_l)$ et $\sigma' = (E'_1, \ldots, E'_{l'})$.

Celà s'obtient, comme pour le théorème 1 §4.1, en observant que $\forall\ i = 1, \ldots, l$ les deux vecteurs $f_{Y*y}(v_i(y))$ et $\sum_{j=0}^{l'} A^i_j v'_j(y')$ appartiennent tous deux à $\mathcal{D}_{X'Y'}(y')$, qu'ils ont la même image via la restriction de la projection $\pi_{X'Y'*y'|} : \mathcal{D}_{X'Y'}(y') \to T_{x'}X'$ et que cette dernière est un isomorphisme car $\mathcal{D}_{X'}$ est une distribution canonique.

A ce stade, la preuve du théorème découle d'une repétition formelle des arguments du théorème 2 du §4.1 où l'on doit seulement utiliser la continuité en $p' = f(p)$ des relèvements canoniques $(v'_1, \ldots, v'_{l'})$ dans $\mathcal{D}_{X'}$. $\square$

On a vu au §2 que, si les projections d'un S.D.C. d'une stratification (A, Σ) sont des applications C^1, alors une application contrôlée $f : (A, \Sigma) \to M$ à valeurs dans une variété M est toujours semidifférentiable. Si de plus l'application est une submersion propre, le *premier Théorème d'isotopie de Thom* dit alors que l'application f est une fibration topologiquement localement triviale (voir par exemple [**Ma**]).

Considérons alors, $\forall\, \epsilon > 0$ le sous-ensemble ouvert de U_{x_0} suivant :

$$U^\epsilon_{x_0} := \{x \in U_{x_0} \mid d(x, X - U_{x_0}) > \epsilon\}$$

qui vérifie $U^\epsilon_{x_0} \subseteq \overline{U_{x_0}}$ et qui (pour ϵ suffisamment petit) est encore un voisinage de x_0 dans la strate $X \in \Sigma$ et un domaine d'un système de coordonnées locales autour de x_0.

Nous concluons la section 7.1 en montrant que, pour toute stratification (c)-régulière vérifiant autour d'un point x_0 la conjecture de Trotman (pour des stratifications (c)-régulières) on peut déterminer un isomorphisme de trivialisation topologique (globale) de f qui est localment horizontalement-C^1.

Theoreme 3 (premier theoreme d'Isotopie de Thom horizontalement-C^1).
Soit (A, Σ) un espace stratifié (c)-régulier A, X une strate de Σ et $x_0 \in X$ un point admettant un feuilletage $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y \in W}$, (a)-régulier sur U_{x_0} du voisinage $W = \pi_X^{-1}(U_{x_0})$ de x_0 dans A.

Soit $f : (A, \Sigma) \to M$ une submersion stratifiée propre à valeurs dans une variété lisse M. Pour tout point m_0 dans M, pour tout domaine d'un système de coordonnées locales U_{m_0} de m_0 dans M et pour tout $U^\epsilon_{x_0} \subseteq U_{x_0}$, il existe alors un homéomorphisme stratifié (trivialisation topologique de f)

$$H \quad : \quad U_{m_0} \times f^{-1}(m_0) \quad \longrightarrow \quad f^{-1}(U_{m_0})$$

qui est horizontalement-C^1 sur $U_{m_0} \times \left[f^{-1}(m_0) \cap U^\epsilon_{x_0}\right]$, et dont l'homéomorphisme stratifié réciproque

$$G = H^{-1} \quad : \quad f^{-1}(U_{m_0}) \quad \longrightarrow \quad U_{m_0} \times f^{-1}(m_0)$$

est horizontalement-C^1 sur $f^{-1}(U_{m_0}) \cap U^\epsilon_{x_0}$.

Preuve. Fixons un point $m_0 \in M$ et considérons un voisinage U_{m_0} domaine d'un système de coordonnées locales de M en m_0. Par une analyse locale on peut identifier $U_{m_0} \equiv \mathbb{R}^m$ (où $m = \dim M$) et les coordonnées locales de U_{m_0} avec les coordonnées standards $E_1, \ldots, E_m$.

Comme f est une submersion stratifiée, il existe un S.D.C. $\mathcal{T} = \{(T_X, \pi_X, \rho_X)\}_{X \in \Sigma}$ pour (A, Σ) [**Ma**] pour lequel f est une application contrôlée. De plus (A, Σ) étant une stratification (c)-régulière, on peut obtenir $\mathcal{T}$ de sorte que chaque fonction distance $\rho_X : T_X \to [0, \infty[$ soit une application de Thom [**Be**]$_{1,2}$.

Fixons alors un tel système de données de contrôle $\mathcal{T}$ de (A, Σ).

Comme f est une submersion stratifiée, la préimage $f^{-1}(m_0)$ reste munie de la stratification induite $f^{-1}(m_0) = \cup_{X\in\Sigma} f_X^{-1}(m_0)$ et il est convenable d'utiliser les notations suivantes :

$$A_0 = f^{-1}(m_0) \qquad , \qquad X_0 := X \cap f^{-1}(m_0) = f_X^{-1}(m_0)$$

$$W_0 = W \cap f^{-1}(m_0) \qquad , \qquad U_0 := U_{x_0} \cap f^{-1}(m_0) = f^{-1}_{X|U_{x_0}}(m_0)$$

pour représenter les traces que $f^{-1}(m_0)$ laisse sur A, X, W, U_{x_0}. Ainsi la stratification induite sur la fibre considérée $A_0 = f^{-1}(m_0)$ peut être notée de façon naturelle par $\Sigma_0 := \{X_0\}_{X\in\Sigma}$.

Rappelons [**Ma**] que comme f étant contrôlée par rapport à $\mathcal{T} = \{(T_X, \pi_X, \rho_X)\}_{X\in\Sigma}$, en considérant les restrictions :

$$T_{X_0} := T_X \cap A_0 \quad \pi_{X_0} := \pi_{X|T_{X_0}} : T_{X_0} \to X_0 \quad \rho_{X_0} := \rho_{X|T_{X_0}} : T_{X_0} \to [0, \infty[$$

on obtient alors un S.D.C. $\mathcal{T}_0 := \{(T_{X_0}, \pi_{X_0}, \rho_{X_0})\}_{X_0\in\Sigma_0}$ induit par $\mathcal{T}$ sur (A_0, Σ_0).

Le produit $\mathbb{R}^m \times A_0$ reste alors muni évidemment d'une stratification et d'un S.D.C. avec lesquels il est (c)-régulier.

D'autre part, la même propriété reste automatiquement valable pour l'ensemble préimage $f^{-1}(U_{m_0})$ avec la stratification Σ_U et le S.D.C. $\mathcal{T}_{|f^{-1}(U_{m_0})}$ définis en posant (avec des notations analogues aux précédentes) :

$$A_U := f^{-1}(U_{m_0}) = \bigcup_{X\in\Sigma} f_X^{-1}(U_{m_0}) , \quad X_U := X \cap f^{-1}(U_{m_0}) = f_X^{-1}(U_{m_0})$$

$$\Sigma_U := \{X_U = f_X^{-1}(U_{m_0})\}_{X\in\Sigma} \ , \ \mathcal{T}_U := \mathcal{T}_{|f^{-1}(U_{m_0})} := \Big\{ \big(T_{X_U}, \pi_{X|T_{X_U}}, \rho_{X|T_{X_U}}\big) \Big\}_{X_U\in\Sigma_U}$$

où $T_{X_U} := T_X \cap A_U$, $\forall\, X_U \in \Sigma_U$ (et où U désigne $U = U_{m_0}$).

Il faut maintenant quelques rappels de la méthode classique de démonstration [**Ma**], [**Be**]$_{1,2}$ du premier théorème d'Isotopie de Thom.

Dans le cas classique, la trivialisation topologique H de f et sa fonction réciproque sont obtenues par les formules :

$$H : U_{m_0} \times f^{-1}(m_0) \to f^{-1}(U_{m_0}) \quad , \quad H(t_1, \ldots, t_m, a_0) = \phi_m(t_m, \ldots \phi_1(t_1, a_0))..)$$

$$G : f^{-1}(U_{m_0}) \to U_{m_0} \times f^{-1}(m_0) \quad , \quad G(a) = \Big(f(a), \phi_1(-t_1, \ldots \phi_m(-t_m, a) \ldots) \Big)$$

où $(t_1, \ldots, t_m) := f(a)$ et les applications $\phi_1, \ldots, \phi_m$ sont les flots de certains champs de vecteurs contrôlés $v_1, \ldots, v_m$ sur $f^{-1}(U_{m_0})$ tels que $f_*(v_i) = E_i$ pour tout $i = 1, \ldots, m$.

La construction des champs $v_1, \ldots, v_l$ s'obtient en recollant par une partition de l'unité des champs contrôlés localement définis sur chaque strate X et par relèvement aux strates supérieures $Y \geq X$ de manière (π_X, ρ_X)-contrôlée. Comme $f_{X*}(v_i) = E_i$ et f est contrôlée, i.e. $f_Y \circ \pi_{XY} = f_X$, $\forall\, Y \geq X$ en notant $x = \pi_X(y)$ on a

$$f_{Y*y}(v_i(y)) = f_{X*x}\pi_{XY*y}(v_i(y)) = f_{X*x}(v_i(x)) = E_i$$

et donc la condition $f_{Y*}(v_i) = E_i$ reste valable, après relèvement contrôlé sur les strates $Y \geq X$.

L'affirmation (dans l'énoncé) concernant la régularité horizontalement-C^1 de H et de sa fonction réciproque est non vide de sens uniquement quand l'ensemble $W_0 := W \cap f^{-1}(m_0) \neq \emptyset$. Dans ce cas, il ne sera pas restrictif de supposer que $x_0 \in W_0$ et donc on peut poursuivre le reste de la preuve en supposant $f(x_0) = m_0$.

Nous apportons alors à la construction classique la modification suivante.

Fixons la strate X contenant le point x_0 autour duquel le feuilletage $\mathcal{H}$ (a)-régulier sur U_{x_0} existe.

Dans le voisinage ouvert $W = \pi_X^{-1}(U_{x_0})$, relevons les champs $v_1, \ldots, v_l$ de manière continue et contrôlés sur la distributions canonique $\mathcal{D}_X = \mathcal{D}(\mathcal{H})$ tangente aux feuilletage $\mathcal{H}$. Prolongeons ensuite les champs $v_1, \ldots, v_l$ par partitions de l'unité au reste de la stratification $A_U = f^{-1}(U_{m_0})$ sans les modifiér dans l'ouvert $W^\epsilon := \pi_X^{-1}(U_{x_0}^\epsilon)$.

A partir de maintenant, pour simplifier les notations (avec un léger abus), nous confondérons $U_{x_0}^\epsilon$ avec U_{x_0} et $W^\epsilon = \pi_X^{-1}(U_{x_0}^\epsilon)$ avec $W = \pi_X^{-1}(U_{x_0})$.

Remarquons aussi que le voisinage W de x_0 étant ouvert dans A, la trivialisation H est horizontalement-C^1 sur $\mathbb{R}^m \times [U_{x_0} \cap f^{-1}(m_0)]$ si et seulement si sa restriction

$$\begin{array}{cccc} H_| & : & \mathbb{R}^m \times [f^{-1}(m_0) \cap W] & \longrightarrow & [f^{-1}(U_{m_0}) \cap W] \\ & & (t_1, \ldots, t_m, a_0) & \longmapsto & \phi_m(t_m, \ldots \phi_1(t_1, a_0))..) \end{array}$$

est horizontalement-C^1 sur $\mathbb{R}^m \times [U_{x_0} \cap f^{-1}(m_0)]$. La propriété correspondante est alors valable pour sa fonction réciproque G.

Considérons maintenant la trace que le feuilletage $\mathcal{H}$ de $W = \pi_X^{-1}(U_{x_0})$ laisse sur la préimage $W_0 = W \cap f^{-1}(m_0)$.

Comme $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y \in W}$ est un feuilletage stratifié, chaque feuille $M_y \in \mathcal{H}$ est alors entièrement contenue dans la strate Y qui contient y, donc

$$M_y \cap f^{-1}(m_0) = M_y \cap f_Y^{-1}(m_0) \qquad , \qquad \forall\, Y \geq X \quad \text{et} \quad \forall\, y \in W\,.$$

Considérons alors un point $y \in W$ pour lequel une telle intersection est non vide, fixons un point $y_1 \in M_y \cap f_Y^{-1}(m_0)$ et montrons que toute la π_{XY}-fibre contenant y_1 est initièrement contenue dans $f_Y^{-1}(m_0)$: i.e.

$$\pi_{XY}^{-1}(\pi_{XY}(y_1)) \subseteq f_Y^{-1}(m_0).$$

En fait, si $y_2 \in \pi_{XY}^{-1}(\pi_{XY}(y_1))$ alors $\pi_{XY}(y_2) = \pi_{XY}(y_1)$ et comme f est π-contrôlée d'après l'égalité $f_Y = f_X \circ \pi_{XY}$ on obtient :

$$f_Y(y_2) = f_X(\pi_{XY}(y_2)) = f_X(\pi_{XY}(y_1)) = f_Y(y_1) = m_0$$

car $y_1 \in f_Y^{-1}(m_0)$ par hypothèse.

D'autre part, par nature du feuilletage $\mathcal{H}$, comme chaque feuille M_y est transverse à $\pi_{XY}^{-1}(\pi_{XY}(y_1))$ dans Y, on en déduit que M_y est transverse à $f_Y^{-1}(m_0)$ et donc que $M_y \cap f_Y^{-1}(m_0)$ est une variété.

Ces observations montrent que le feuilletage $\mathcal{H}$ de W coupe transversalement $W_0 = f^{-1}(m_0)$, induisant un feuilletage intersection

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{|f^{-1}(m_0)} := \Big\{ M_y \cap f^{-1}(m_0) \Big\}_{y \in W_0} = \Big\{ M_y \cap f_Y^{-1}(m_0) \Big\}_{\substack{y \in Y \\ Y \in \Sigma}}$$

dont les variétés ont toutes la dimension

$$\dim\Big[M_y \cap f_Y^{-1}(m_0)\Big] = \dim M_y + \Big(\dim f_Y^{-1}(m_0) - \dim Y\Big) =$$

$$= \dim M_y - rang(f_Y) = \dim M_y - rang(f_X) = l - m =$$

$$= \dim U_{x_0} + (\dim f_X^{-1}(m_0) - \dim X) = \dim\Big[U_{x_0} \cap f_X^{-1}(m_0)\Big]$$

égale à la dimension de la plus petite strate $U_{x_0} \cap f_X^{-1}(m_0) = f_{X|U_{x_0}}^{-1}(m_0)$ de W_0.

Automatiquement, on a alors un feuilletage produit

$$\mathbb{R}^m \times \mathcal{H}_0 := \Big\{\mathbb{R}^m \times \Big[M_y \cap f_Y^{-1}(m_0)\Big]\Big\}_{y\in W_0}$$

sur $\mathbb{R}^m \times W_0$, et il est également clair que, $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y\in W}$ étant par hypothèse (a)-régulier sur U_{x_0}, les deux feuilletages

$$\mathcal{H}_0 = \{M_y \cap f^{-1}(0)\}_{y\in W_0} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{R}^m \times \mathcal{H}_0$$

sont alors (a)-réguliers sur

$$U_{x_0} \cap f_X^{-1}(m_0) = f_{X|U_{x_0}}^{-1}(m_0) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{R}^m \times f_{X|U_{x_0}}^{-1}(m_0)\,.$$

Il est nécessaire de rappeler maintenant que les champs de vecteurs $v_1, \ldots, v_m$ avaient était relevés tangents à $\mathcal{H}$. Ceci comporte que $\forall\, a \in W$, si $a \in M_y$ l'orbite $\phi_i(a \times \mathbb{R})$ reste entièrement contenue dans M_y; par conséquent,

$$\forall\, a_0 \in W_0 \quad \text{et} \quad \forall\, (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m \quad \text{on a} \quad H(t_1, \ldots, t_m, a_0) \in M_{a_0}$$

et donc on trouve que

$$H\Big(\mathbb{R}^m \times \big[M_{a_0} \cap f^{-1}(m_0)\big]\Big) \subseteq M_{a_0}\,.$$

Les homéomorphismes stratifiés H et G étant alors réciproques l'un de l'autre **[Ma]**, on en déduit que tous deux envoient chaque feuille du feuilletage horizontal $\mathbb{R}^m \times \mathcal{H}_0$ dans une unique feuille du feuilletage horizontal $\mathcal{H}$.

En conclusion, comme H et G sont contrôlés par rapport aux S.D.C. $\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_U$, comme ces deux feuilletages sont (a)-réguliers respectivement sur $\mathbb{R}^m \times f_{X|U_{x_0}}^{-1}(m_0)$ et sur U_{x_0}, le théorème 2 permet alors de conclure que H et G sont horizontalement-C^1 sur $\mathbb{R}^m \times f_{X|U_{x_0}}^{-1}(m_0)$ et sur $f_{X|U_{x_0}}^{-1}(U_{m_0})$. $\square$

Remarque 3. Dans le théorème précédent, nous n'avons pas eu besoin de demander au morphisme stratifié f la condition de contrôle horizontal mais seulement la condition de contrôle (vertical) par rapport à la projection verticale $\pi_X : T_X \to X$. Ceci est dû, dans le même esprit qu'à la proposition 1 §2 au fait que l'ensemble des valeurs de f est une variété lisse; ce qui comporte une simplification remarquable de la condition de contrôle sur f : "$f_Y = f_X \circ \pi_{XY}$" au lieu de la condition moins simple "$\pi_{X'Y'} \circ f_Y = f_X \circ \pi_{XY}$".

D'autre part, toute tentative de démonstration d'un théorème analogue pour la trivialisation topologique d'une submersion stratifiée $f : (A, \Sigma) \to (A', \Sigma')$ à valeurs dans une stratification ayant plusieurs strates (et de rang constant) nécessiterait l'hypothèse de π'-contrôle pour l'application f. $\square$

7.2 : $\mathcal{H}$-semidifférentiabilité.

Dans les théorèmes 1, 2 et 3 de la section précédente, nous avons vu que l'existence d'un feuilletage local $\mathcal{H} = \{M_z\}_{z\in W}$ de $W = \pi_X^{-1}(U_{x_0})$, (a)-régulier sur U_{x_0} comporte la régularité horizontalement-C^1 pour les flots des champs relevés et pour d'autres morphismes stratifiés plus généraux.

Dans cette section, nous précisons que si la (a)-régularité de $\mathcal{H}$ est valable sur le voisinage W tout entier, les théorèmes analogues à la section §7.1 deviennent valables en déduisant de plus maintenant la propriété de $\mathcal{H}$-semidifférentiabilité.

A ce propos, rappelons que la $\mathcal{H}$-semidifférentiabilité contient en plus de la régularité horizontalement-C^1, un contrôle des limites des restrictions

$$\lim_{z\to y'} f_{Z*z|T_zM_z} = f_{Y*y'|T_{y'}M_{y'}}$$

quand z tend vers un point y' appartenant à une strate Y supérieure à X (voir le §2.4 pour la définition et le §4.2 pour quelques théorèmes).

Nous avons alors :

Theoreme 4. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) Le relèvement contrôlé $\xi = \{\xi_Y : Y \to Y\}_{Y\geq X}$ tangent à $\mathcal{H} = \{M_z\}_{z\in W}$ de tout champ de vecteurs ξ_X est continu sur W et a un flot $\psi = \{\psi_Y^t\}_{Y\geq X}$ qui est $\mathcal{H}$-semidifférentiable.

2) Les relèvements contrôlés w_i tangents à $\mathcal{H} = \{M_z\}_{z\in W}$ des champs de vecteurs E_i sont continus sur W pour tout $i = 1, \ldots, l$, et ont des flots $\psi_i = \{\psi_{iY}^t : Y \to Y\}_{Y\geq X}$ qui sont $\mathcal{H}$-semidifférentiables.

3) L'homéomorphisme stratifié de trivialisation topologique de π_X autour de x_0,

$$H : \mathbb{R}^l \times \pi_X^{-1}(x_0) \to \pi_X^{-1}(U_{x_0})$$

est $\mathcal{F}$-semidifférentiable par rapport au feuilletage trivial $\mathcal{F} = \{\mathbb{R}^l \times y_0\}_{y_0\in\pi_X^{-1}(x_0)}$ de $\mathbb{R}^l \times \pi_X^{-1}(x_0)$;

4) $\lim_{(t_1,\ldots,t_l,z_0)\to y'} H_{*(t_1,\ldots,t_l,z_0)}(E_i) = w_i(y') \quad , \quad \forall\, i = 1, \ldots, l\ ,\ \forall\, y' \in Y$ *et* $\forall\, Y \geq X$;

5) le feuilletage horizontal $\mathcal{H} = \{M_z\}_{z\in W}$ induit par H est (a)-régulier (sur W).

Preuve. La démonstration s'obtient de manière complètement analogue à celle du théorème 1 au §7.1 en utilisant maintenant que la (a)-régularité du feuilletage $\mathcal{H}$ sur W tout entier équivaut à ce que les champs $w_i(z)$ tangents à $\mathcal{H}$ soient $\forall\, i = 1, \ldots, l$ continus sur toutes les strates de W.

Nous soulignons seulement que la conclusion de la preuve de l'implication $(4 = 5 \Rightarrow 1)$ s'obtient en rappelant le théorème 4 du §4. 2 au lieu du théorème 2 du §4.1. $\square$

Pour un morphisme stratifié de type plus général on obtient :

THEOREME 5. *Soit* $f = \{f_Y\}_{Y\in\Sigma} : (A,\Sigma) \to (A',\Sigma')$ *un morphisme stratifié contrôlé entre deux espaces stratifiés* (c)*-réguliers* (A,Σ) *et* (A',Σ').

Soient $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y\in W}$ *et* $\mathcal{H}' = \{M_{y'}\}_{y'\in W'}$ *deux feuilletages stratifiés respectivement du voisinage* $W = \pi_X^{-1}(U_{x_0})$ *de* $x_0 \in X$ *dans* A *et du voisinage* $W' = \pi_{X'}^{-1}(U'_{x'_0})$ *de* $x'_0 = f(x_0) \in X'$ *dans* A'.

Si $\mathcal{H}$ *et* $\mathcal{H}'$ *sont* (a)*-réguliers et si* f *est* π'*-contrôlé par rapport à* $\mathcal{H}$ *et* $\mathcal{H}'$*, alors* f *est* $\mathcal{H}$*-semidifférentiable.*

Preuve. On remarque (par rapport à la preuve du théorème 2 §7.1) que les deux feuilletages $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ étant maintenant (a)-réguliers sur W et W', les deux distributions canoniques $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_{X'}$ induites sont alors continues sur toutes les strates de W et W'.

Si on fixe alors des strates $Z > Y \geq X$, de même qu'au théorème 2 du §7.1 on trouve que pour tout $z \in Z$, il existe une restriction de la différentielle $f_{Z*z|\mathcal{D}_{XZ}(z)} : \mathcal{D}_{XZ}(z) \to \mathcal{D}_{X'Z'}(z')$ permettant, en utilisant la condition de contrôle

$$\pi_{Y'Z'*z'} f_{Z*z} = f_{Y*y}\pi_{YZ*z} \qquad , \qquad \forall\, z \in Z \ \text{ et } \forall Z > Y$$

et le fait que la projection $\pi_{Y'Z'} : T_{YZ} \to Y'$ induise un isomorphisme de restriction

$$\pi_{Y'Z'*z'|} : \mathcal{D}_{X'Z'}(z') \to \mathcal{D}_{X'Y'}(y')$$

de conclure de la même manière qu'aux théorème 2 du §7.1 et théorème 4 du §4.2. □

THEOREME 6 [PREMIER THEOREME D'ISOTOPIE DE THOM $\mathcal{F}$-SEMIDIFFERENTIABLE]

Soit (A,Σ) *un espace stratifié* (c)*-régulier,* X *une strate de* Σ *et* $x_0 \in X$ *un point admettant un feuilletage* $\mathcal{H} = \{M_y\}_{y\in W}$*,* (a)*-régulier du voisinage* $W = \pi_X^{-1}(U_{x_0})$ *de* x_0 *dans* A.

Soit $f : (A,\Sigma) \to M$ *une submersion stratifiée propre à valeurs dans une variété lisse* M*. Pour tout point* m_0 *dans* M*, pour tout domaine* U_{m_0} *d'un système de coordonnées locales de* m_0 *dans* M *et pour tout* $U^\epsilon_{x_0} \subseteq U_{x_0}$*, il existe alors un homéomorphisme stratifié (trivialisation topologique de* f*)*

$$H : U_{m_0} \times f^{-1}(m_0) \to f^{-1}(U_{m_0})$$

qui est $\mathcal{F}$*-semidifférentiable par rapport au feuilletage* $\mathcal{F} = U_{m_0} \times \mathcal{H}\,\big|_{f^{-1}(m_0)\cap\pi_X^{-1}(U^\epsilon_{x_0})}$ *et dont l'homéomorphisme réciproque*

$$G = H^{-1} :\ f^{-1}(U_{m_0}) \to U_{m_0} \times f^{-1}(m_0)$$

est $\mathcal{H}\,\big|_{f^{-1}(U_{m_0})\cap\pi_X^{-1}(U^\epsilon_{x_0})}$*-semidifférentiable.*

Preuve. La démonstration est totalement analogue à la démonstration de la version horizontalement-C^1, la conclusion du théorème s'obtenant maintenant en appliquant le théorème 5 précédent à la place du théorème 2. □

§8. Feuilletages stratifiés et “rétractions adaptées”.

Dans leur livre récent *“The Geometry of Topological Stability”* Andrew du Plessis et Terry Wall introduisent et étudient **[DW]** (partie III, chapitre 9.3) différentes notions de régularité pour des rétractions $r : M \to N$ entre deux variétés lisses M et N : les rétractions *adaptées, vraiment adaptées et extrèmement adaptées.*

Dans le but initial de montrer que *“la multitransversalité par rapport à une partition donnée en sous-variétés d'un espace de jet est une condition suffisante pour la C^0-stabilité forte*”, A. du Plessis et T. Wall rencontrent le besoin d'étudier ces notions de régularité des rétractions et montrent comme-ça que les rétractions *extrèmement adaptées* se caractérisent par le fait que le feuilletage, défini par leurs fibres est de classe $C^{0,1}$.

Dans un contexte stratifié et selon les définitions données au §2 2.4., un feuilletage $C^{0,1}$ équivaut à un feuilletage stratifié (a)-régulier.

Dans ce paragraphe, nous rappelons donc quelques éléments de la théorie des *rétractions adaptées* de du Plessis-Wall et remarquons comment ces notions s'appliquent convenablement au cas de la projection horizontale locale autour de x_0 :

$$\pi' : \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \to \pi_X^{-1}(x_0) \qquad , \qquad \pi'(z) = z_0 \quad \text{où} \quad z = \phi_l(t_l, \ldots, \phi_1(t_1, z_0) \ldots)$$

(voir §6) par la caractérisation suivante :

“Le feuilletage horizontal $\mathcal{H}_{x_0} = \{M_{y_0} = H(\mathbb{R}^l \times y_0)\}_{y_0 \in \pi_X^{-1}(x_0)}$ est (a)-régulier ssi la rétraction π' est extrèmement adaptée”.

D'autre part, même la condition plus faible *“rétraction adaptée”* n'est pas nécessairement vérifiée par la projection horizontale $\pi' : \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \to \pi_X^{-1}(x_0)$. Nous présenterons alors de manière détaillée les éléments fondamentaux de cette théorie car les nombreux exemples et contrexemples explicites donnés dans **[DW]** éclaircissent sensiblement les difficultés qui se présentent pour obtenir un feuilletage (a)-régulier autour d'un (ou de chaque) point d'une stratification considérée.

Definition 1. Soit $i : X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques X et Y. Une *rétraction (pour i)* est une application continue $r : Y \to X$ qui est inverse à gauche de $i : X \to Y$ i.e. : $r \circ i = 1_X$.

En particulier, on a alors immédiatement que les deux restrictions

$$i_| : X \to i(X) \qquad \text{et} \qquad r_| : i(X) \to X$$

doivent être des isomomorphismes réciproques l'un de l'autre. Donc $i : X \to Y$ doit être une injection.

A partir de maintenant et avec les mêmes notations que celles de du Plessis-Wall, nous considèrerons pour X et Y deux variétés lisses M^m et N^n, et pour toute la suite $i : M \hookrightarrow N$ notera un plongement et $r : M \to N$ une rétraction pour i.

Les notions de *rétractions adaptées* introduites par duPlessis-Wall sont présentées dans **[DW]** en fixant la catégorie des applications de classe C^k (avec $k \geq 1$) et en considérant des voisinages dans l'espace d'applications $C^k(M, N)$ avec la topologie forte de Whitney. Cependant, comme pour l'analyse que nous envisageons, ceci ne comportera aucune restriction, nous nous limiterons à reconsidérer ces définitions dans le cas où $k = 1$.

Definition 2. L'application continue $r : N \to M$ est dite une *rétraction adaptée (pour $i : M \to N$)* si r est une rétraction pour $i : N \to M$ et il existe un voisinage U de i

dans $C^1(M,N)$ tel que pour tout $\phi \in U$, l'application composée $r \circ \phi : M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{r} M$ est un homéomorphisme.

Un germe de rétraction $r_y : (N,y) \to (M,x)$ pour un germe de plongement $i_x : (M,x) \to (N,y)$ est dit *adapté (pour i_x)* s'il existe deux représentants $i : U_x \to V_y$ et $r : V_y \to U_x$ respectivement de i_x et r_y tels que r soit adapté pour i.

En rappelant que $Diff^1(M,M)$ est un ouvert de $C^1(M,M)$ et que dans le cas où $r : N \to M$ est de classe C^1, l'application induite $r_* : C^1(M,N) \to C^1(M,M)$, $r_*(\phi) = r \circ \phi$ est continue, on voit immédiatement que :

Remarque 1. *Si $r : N \to M$ est une rétraction de classe C^1 pour $i : M \to N$ alors r est une rétraction adaptée.* $\square$

A. du Plessis et T. Wall caractérisent la notion de rétraction adaptée par les suites de points $\{y_l\}_l$ et $\{z_l\}_l$ de la variété N convergentes vers un même point $x \in N$ telles que pour tout $l \in \mathbb{N}$ (ou pour l assez grand) on ait $r(z_l) = r(y_l)$ et $z_l \neq y_l$. Pour de telles suites, ils utilisent l'expression *"la limite $\lambda = \lim_l [y_l - z_l]$ est définie"* pour signifier que pour (une et de façon équivalente pour) toute carte $g : U \to \mathbb{R}^n$ de N en x la limite suivante :

$$\lim_{l \to \infty} \frac{g(y_l) - g(z_l)}{||g(y_l) - g(z_l)||} = \tau$$

existe dans $\mathbb{R}^n$ et $\lambda = g_{*x}^{-1}(\tau)$ et en particulier il en découle que $\lambda \in T_x N$.

Comme celà nous semble plus familier du langage naturel de la théorie des stratifications régulières, nous rappelons une telle caractérisation de façon équivalente, en entendant par *" $\lambda = \lim_l [y_l - z_l]$ "* que $\lambda \in \mathbb{G}_1^h$ est la droite limite dans la grassmannienne $\mathbb{G}_1^h$ ($N^n \subseteq \mathbb{R}^h$), de la suite des droites $[y_l - z_l] = \{\alpha(y_l - z_l) | \alpha \in \mathbb{R}\} \in \mathbb{G}_1^h$ et sécantes à la variété N^n.

Proposition 1. *Soient $i : M \to N$ un plongement C^1 et $r : N \to M$ une rétraction pour i. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) r est adaptée pour i;

ii) il existe un voisinage U dans $C^1(M,M)$ tel que $\forall\, \phi \in U$ $r \circ \phi$ est injective;

iii) pour tout couple de suites $\{y_l\}_l$ et $\{z_l\}_l$ dans N telles que $\lim_l y_l = \lim_l z_l = x$, $r(y_l) = r(z_l)$ $\forall\, l \in \mathbb{N}$, et $\exists \lim_l [y_l - z_l] = \lambda$ on a $\lambda \not\subseteq T_y i(M)$ où $y = i(x)$.

Preuve. **[DW]** proposition 9.3.3. $\square$

Definition 3. Soient $i_x : (M,x) \to (N,y)$ un germe de plongement, $r_y : (N,y) \to (M,x)$ un germe de rétraction et S un sous-espace vectoriel de $T_y N$ complémentaire de $T_y i_x(M)$. On dit que r_y *est vraiment adapté pour i par rapport à S* si et seulement si pour tout C^1-germe $\phi_x : (M,x) \to (N,y)$ tel que $(\phi_x)_{*x}$ soit transverse à S on a :

i) $r_y \circ \phi_x$ est un germe d'homéomorphisme;

ii) le germe de rétraction induite $(r_\phi)_x := (r_y \circ \phi_x)^{-1} \circ r_y$ est adapté pour i_x.

Les germes de rétractions *vraiment adaptées* déterminent complètement le sous-espace de $T_y N$ dans lequel les limites des sécantes $\lambda = \lim_l [y_l - z_l]$ peuvent être contenues. On a en fait :

Proposition 2. *Soient $i_x : (M,x) \to (N,y)$ un germe de plongement, $r_y : (N,y) \to (M,x)$ un germe de rétraction et soit S un sous-espace vectoriel de $T_y N$ complémentaire de $T_y i_x(M)$.*

Le germe de rétraction r_y est vraiment adapté pour le germe i_x par rapport à S si et seulement si pour tous représentants $i : M \to N$ et $r : N \to M$ de i_x et r_y et pour tout *couple de suites* $\{y_l\}_l$ *et* $\{z_l\}_l$ *dans* N *telles que* $\lim_l y_l = \lim_l z_l = x$, $r(y_l) = r(z_l)$ $\forall\, l \in \mathbb{N}$, *et* $\exists \lim_l [y_l - z_l] = \lambda$ *on a* $\lambda \in S$.

De plus quand l'une de ces conditions se vérifie, alors le germe de fibre $r_y^{-1}(x) \subseteq N$ *est une variété de classe* C^0 *admettant un espace tangent en* y*, précisément* S*.*

Preuve. [**DW**] proposition 9.3.6. et *addendum* 9.3.7. □

La proposition précédente affirme en particulier aussi que :

Remarque 2. *Si* $r_y : (N, y) \to (M, x)$ *est un germe de rétraction vraiment adapté par rapport à un sous-espace* S *alors* S *est univoquement déterminé et* $S = T_y r_y^{-1}(x)$. □

D'autre part, l'existence d'un espace tangent $T_y r_y^{-1}(x)$ à $r_y^{-1}(x)$ en y, complémentaire de $T_y i_x(M)$, même dans le cas où il dépend continuement de x ne suffit pas pour qu'un germe $r_y : (N, y) \to (M, x)$ soit vraiment adapté par rapport à un tel sous-espace $S := T_y r_y^{-1}(x)$ ([**DW**] exemples 9.3.8 et 9.3.9).

Definition 4. Une rétraction $r : N \to M$ pour le plongement C^1 $i : M \to N$, est dite *vraiment adaptée* si pour tout $y = i(x) \in i(M)$, le germe $r_y : (N, y) \to (M, x)$ est vraiment adapté pour le germe $i_x : (M, x) \to (N, y)$.

Un germe de rétraction $r_y : (N, y) \to (M, x)$ vraiment adaptée n'admet pas nécessairement un representant vraiment adapté ([**DW**], exemple 9.3.10) et de plus on a:

Remarque 3. *La condition "vraiment adaptée" n'est pas ouverte : i.e. si* $r : N \to M$ *est une rétraction vraiment adaptée pour le plongement* $i : M \to N$*, l'ensemble des rétractions induites* $\{r_\phi := (r \circ \phi)^{-1} \circ r \mid \phi \in C^1(M, N)\}$ *n'est pas (en général) un voisinage de* i *dans* $C^1(M, N)$*.*

Preuve. [**DW**] exemple 9.3.10. □

La remarque ci-dessus porte à considérer la nouvelle notion qui est évidemment une condition ouverte dans $C^1(M, N)$:

Definition 4. Une rétraction $r : N \to M$ pour un plongement de classe C^1 $i : M \to N$ est dite *extrèmement adaptée* (où encore E*-tame* s'il existe un voisinage U de i dans $C^1(M, N)$ tel que pour tout $\phi \in U$ on ait :

i) $r \circ \phi$ est un homéomorphisme;
ii) la rétraction induite $r_\phi := (r \circ \phi)^{-1} \circ r$ est vraiment adaptée pour i.

Comme dit en début de paragraphe, la condition E-tame se caractérise en termes de feuilletage $C^{0,1}$. On a en fait :

Proposition 3. *Une rétraction* $r : N \to M$ *pour un plongement de classe* C^1 $i : M \to N$ *est* E*-tame si et seulement s'il existe un voisinage ouvert* V *de* $i(M)$ *dans* N *tel que la famille des fibres* $\mathcal{F}_r = \{F_y := r^{-1}(y)\}_{y \in V}$ *de la restriction* $r_V : V \to M$ *soit un feuilletage de classe* $C^{0,1}$ *de* V *et tel que chaque feuille* F_y *de* $\mathcal{F}_r$ *soit transverse à* $i(M)$*.*

Preuve. [**DW**] proposition 9.3.11. □

8.1 : Rétractions "extrèmement adaptées" et feuilletages stratifiés (a)-réguliers

Soit $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ une stratification (c)-régulière d'une variété $P^p \subseteq \mathbb{R}^h$ munie d'un système fixé de données de contrôle $\mathcal{T} = \{(\pi_X, \rho_X) : T_X \to [0, \infty[\}_{X \in \Sigma}$. Considérons une strate X de $\mathcal{X}$ de dimension $l < \dim P = p$, x_0 un point de X, $H = H_{x_0}$ la trivialisation topologique locale de la projection π_X autour de x_0

$$H : \mathbb{R}^l \times \pi_X^{-1}(x_0) \to \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \equiv T_X \quad , \quad H((t_1, \ldots, t_l), z_0) = \phi_l(t_l, \ldots, \phi_1(t_1, z_0)..) = z$$

et soit enfin $\mathcal{H}_{x_0} = \{M_{z_0} := H(\mathbb{R}^l \times z_0)\}_{z_0 \in \pi_X^{-1}(x_0)}$ le feuilletage horizontal local autour de x_0 induit par H.

On a alors :

Proposition 4. *Le feuilletage horizontal local $\mathcal{H}_{x_0}$ est (a)-régulier sur un voisinage V de x_0 dans $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$ si et seulement si la projection horizontale locale $\pi' = \pi'_{x_0}$ autour de x_0,*

$$\pi' : \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \to \pi_X^{-1}(x_0) \quad , \quad \pi'(z) = z_0 \quad \textit{où} \quad z = \phi_l(t_l, \ldots, \phi_1(t_1, z_0) \ldots)$$

est une rétraction extrèmement adaptée pour l'inclusion $i : \pi_X^{-1}(x_0) \to \pi_X^{-1}(U_{x_0})$.

Preuve. En considérant les applications

$$\pi' \ : \ \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \ \to \ \pi_X^{-1}(x_0) \qquad \text{et} \qquad i \ : \ \pi_X^{-1}(x_0) \ \to \ \pi_X^{-1}(U_{x_0})$$

entre variétés lisses $M = \pi_X^{-1}(x_0)$ et $N = \pi_X^{-1}(U_{x_0})$, on voit immédiatement que π' une rétraction pour l'inclusion i.

D'autre part, nous avons vu au lemme 1 §6 que les fibres de la *projection horizontale* locale $\pi' = \pi'_{x_0}$ coïncident avec les feuilles

$${\pi'}^{-1}(z_0) = M_{z_0} = H(\mathbb{R}^l \times z_0) = M_z$$

du feuilletage horizontal $\mathcal{H}_{x_0} = \{M_{z_0} = M_z\}_{z_0 \in \pi_X^{-1}(x_0)}$.

La preuve s'obtient alors immediatement à partir de la proposition 9.3.11. de **[DW]** (proposition 3 précédente) après avoir rappelé, comme vu au début du §6, que chaque feuille $M_{z_0} = M_z$ est transverse à la variété $\pi_X^{-1}(x_0)$ dans la variété $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$. □

A partir des exemples 9.3.13 et 9.3.14 de du Plessis on peut se rendre comte qu'en général notre projection horizontale π' ne vérifie pas nécessairement les conditions "adaptée" ou "vraiment adaptée" ou "extremement adaptée" et dans les lemmes 9.3.12 et 9.3.15 on trouve les conctructions principales de rétractions extrèmement adaptées. Même si nous ne rappelons pas ici ces deux lemmes, nous supposerons connus leurs énoncés pour montrer ci-dessous de quelle manière ils peuvent être réinterprétés dans un contexte d'espaces stratifiés.

Interprétations des lemmes 9.3.12 et 9.3.15 de **[DW]** *dans un contexte stratifié.* La proposition 9.3.11 à l'aide du lemme 9.3.15 dans **[DW]** permettent de retrouver, dans un contexte stratifié, quelques unes des propriétés de base que nous avions obtenues au §4.1.

Fixons un point x_0 d'une strate X de $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ et un voisinage U_{x_0} de x_0 dans X suffisamment petit, et considérons les variétés

$$M = \pi_X^{-1}(x_0) \qquad \text{et} \qquad N = \pi_X^{-1}(U_{x_0})\,.$$

L'inclusion $i : \pi_X^{-1}(x_0) = M \hookrightarrow N = \pi_X^{-1}(U_{x_0})$ est alors un plongement C^1 de codimension $q = \dim X = l$ et en identifiant

$$U_{x_0} \equiv \mathbb{R}^l \quad , \quad x_0 \equiv 0 \in \mathbb{R}^l \qquad \text{et} \qquad \pi_X \ \equiv \ pr_{\mathbb{R}^l} \ : \ \pi_X^{-1}(U_{x_0}) \to U_{x_0} \equiv \mathbb{R}^l$$

on a également que $z = \pi_X$ est une submersion telle que

$$z^{-1}(0) = \pi_X^{-1}(x_0) = M = i(M).$$

D'autre part, l'hypothèse que les champs $\xi_1, \dots, \xi_q$ soient des relèvements *sur* $z = \pi_X$ des champs canoniques $\frac{\partial}{\partial t_1} = E_1, \dots, \frac{\partial}{\partial t_l} = E_l$, signifie que pour tout $i = 1, \dots, l$:

$$z_*(\xi_i) = \frac{\partial}{\partial t_i} \qquad \text{i.e.} \qquad \pi_{X*}(\xi_i) = E_i$$

ce qui est donc la condition de π_X-contrôle. Comme les champs $\xi_1, \dots, \xi_l$ sont de plus continus sur $\pi_X^{-1}(U_{x_0})$, on peut donc considerer la distribution $\mathcal{D}_X(y) := [\xi_1(y), \dots, \xi_l(y)]$ comme une distribution canonique locale relative à la strate X.

Comme les flots

$$\Psi_1, \dots, \Psi_l \quad \text{de } [\mathbf{DW}] \quad \text{correspondent à nos flots} \qquad \phi_1, \dots, \phi_l$$

alors en notant

$$\pi_X(y) := (t_1, \dots, t_l) \quad \text{ et } \quad y = H(t_1, \dots, t_l, y_0) = \phi_l(t_l, \dots, \phi_1(t_1, y_0))$$

on a que

$$z(y) = \pi_X(y) = (t_1, \dots, t_l) \qquad \text{et donc} \qquad z_i(x) = t_i \quad \forall\, i = 1, \dots, l\,.$$

Soit alors $r : N \to M$ la rétraction construite dans [**DW**] au lemme 9.3.15 et définie (en notant $\Psi(t, x)$ au lieu de $\Psi(x, t)$) par

$$r(y) = i^{-1}\Big(\Psi_q(-z_q(y), \Psi_{q-1}(-z_{q-1}(y), \dots, \Psi_1(-z_1(y), y)..)\Big)\,.$$

Comme i est l'inclusion et comme $\Psi_i = \phi_i \ \ \forall\ i$ et $y = \phi_l(t_l, \dots, \phi_1(t_1, y_0)..)$ on obtient:

$$r(y) = \phi_l(-t_l, \phi_{l-1}(-t_{l-1}, \dots \phi_1(-t_1, y) \dots) = y_0 = \pi'(y).$$

La rétraction r coïncide donc avec la projection horizontale $\pi' = \pi'_{x_0} : \pi^{-1}(U_{x_0}) \to \pi^{-1}(x_0)$ que nous avions introduite au §6.

En conclusion, l'affirmation du lemme 9.3.15 [**DW**] selon laquelle sous l'hypothèse d'intégrabilité du champ de plans $[\xi_1, \dots, \xi_l]$ l'application $r : \pi^{-1}(U_{x_0}) \to \pi^{-1}(x_0)$ est une rétraction extrèmement adaptée, combinée avec la proposition 9.3.11 affirmant que les fibres de r constituent alors un feuilletage $C^{0,1}$ nous permet de retrouver que *"l'involutivité d'une distribution canonique locale $\mathcal{D}_X$ autour de x_0 est une condition suffisante pour la (a)-régularité du feuilletage horizontal $\mathcal{H}_{x_0} = \{H(\mathbb{R}^l \times y_0)\}_{y_0 \in \pi_X^{-1}(x_0)}$* (cf. lemme 1 et corollaire §4.1).

Dans le même esprit, on pourrait utiliser le lemme 9.3.12 (cas particulier où $q = 1$ du lemme 9.3.15) pour retrouver que si la strate X est de dimension $q = l = 1$ et donc $U_{x_0} \equiv \mathbb{R}$ alors la continuité du relèvement d'un champ équivaut à la (a)-régularité du feuilletage $\mathcal{H}_{x_0}$.

Nous concluons ce paragraphe, en rappelant qu'à la section *"Constructing global tame retractions from local ones"* (9.5 [**DW**]) du Plessis et Wall déterminent des méthodes de construction globale de rétractions adaptées à partir de germes de rétractions adaptées. Une étude minutieuse de ces méthodes pourrait alors se révéler d'importante utilité en vue de construire des feuilletages stratifiés (a)-réguliers à partir des germes de feuilletages: d'autre part, cela rappelle une idée de David Trotman (1994).

§9. La conjecture de fibration de Whitney.

On a vu au §7 que l'existence d'un feuilletage horizontal local $\mathcal{H}$ de même dimension que X et (a)-régulier sur X est la condition essentielle pour obtenir une bonne théorie de morphismes stratifiés horizontalment-C^1 sur X.

Dans ce paragraphe, nous précisons que une propriété (très similaire et) comportant l'existence d'un tel feuilletage, (a)-régulier sur une strate X fixée et induit par un morphisme de trivialisation locale, avait été déterminée par H. Whitney en 1965 et conjecturée en termes de *"Whitney fibering conjecture"* ($[\mathbf{Wh}]_1$, §9 page 230) dans le contexte des stratifications (b)-régulières (et analytiques) des variétés analytiques.

Précisons que l'auteur, bien que conscient de la grande utilité (voir remarque 1) d'une telle propriété, ne l'utilise pas en vue d'obtenir de la régularité pour des morphismes stratifiés.

D'autre part, Whitney résoud sa conjecture seulement pour le cas très particulier d'une strate X de dimension $n-2$ d'une hypersurface analytique stratifiée de $\mathbb{C}^n$ ($[\mathbf{Wh}]_1$, §12), et dans un cadre général le problème reste ouvert.

En fait, nous ne connaissons aucun travail à ce propos, avec l'unique exception de l'article de R. Hardt et D. Sullivan **[HS]** dans lequel les auteurs résolvent la "Whitney fibering conjecture" dans le contexte des stratifications d'une variété algébrique complexe contenue dans un espace projectif complexe $\mathbb{CP}^n$. La technique de Hardt et Sullivan est d'introduire une "métrique de plombage" (selon une idée suggérée par W. Thurston); cependant le théorème final obtenu *nous semble* plus faible que la propriété conjecturée par Whitney, et en particulier pas suffisant à definir un feuilletage qui soit (a)-regulier sur X.

Enfin, on trouve des remarques sur cette conjecture aussi dans le travail $[\mathbf{Ha}]_2$ (où l'auteur reenvoie à $[\mathbf{Ha}]_1$ pour une solution possible du problème), dans le contexte des variétés analytiques réelles. Mais dans ce cas aussi, *il ne m'est pas claire* si les précisions de l'auteur sont suffisantes pour en déduire la (a)-regularité du feuilletage en question.

La suit de ce paragraphe présente un bref résumé du travail de Whitney concernant la conjecture de fibration et des autres résultats qui (à notre connaissance) l'ont suivi.

La "Whitney fibering conjecture".

Dans son célèbre article *Local Properties of Analytic Varieties* $[\mathbf{Wh}]_1$, après avoir introduit les conditions de régularité (a) et (b) et montré que *toute varieté analytique (réelle ou complexe) admet une stratification* (b)*-régulière*, H. Whitney donna la définition suivante:

DEFINITION 1. Soit V une variété analytique et Σ une stratification de V. Alors Σ peut être considérée comme une *"bonne stratification"* si et seulement si tout point $p_0 \in V$ a un voisinage U_0 dans V qui admet un feuilletage $\mathcal{H}_{p_0} = \{F(q)\}_q$ obtenu de la manière suivante :

Soit M la strate de Σ qui contient le point p_0,

$$M_0 := M \cap U_0 \quad \text{et} \quad N_0 := (T_{p_0}M)^{\perp} \cap U_0$$

(où $\perp$ représente le complément orthogonal dans l'espace ambiant), alors U_0 est homéomorphe à $M_0 \times N_0$ par une application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & M_0 \times N_0 & \longrightarrow & U_0 \\ & (p,q) & \longmapsto & \phi(p,q) \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

i) ϕ est analytique par rapport à $p \in M_0$ et continue par rapport à $q \in N_0$;

ii) $\mathcal{H}_{p_0} = \{F(q)\}_q$ est précisement le feuilletage $\{M_q := \phi(M_0 \times q)\}_{q \in N_0}$ induit par l'homéomorphisme ϕ;

iii) la restriction $\phi_{|M_0 \times q} : M_0 \times q \to F(q)$ à chaque feuille de $\mathcal{H}_{p_0}$ est un biholomorphisme;

iv) $\phi(M_0 \times p_0) = M_0$, $\phi(p_0 \times N_0) = N_0$, et les restrictions $\phi_{|M_0 \times p_0} = id_{M_0}$ et $\phi_{|p_0 \times N_0} = id_{N_0}$ sont les applications identiques.

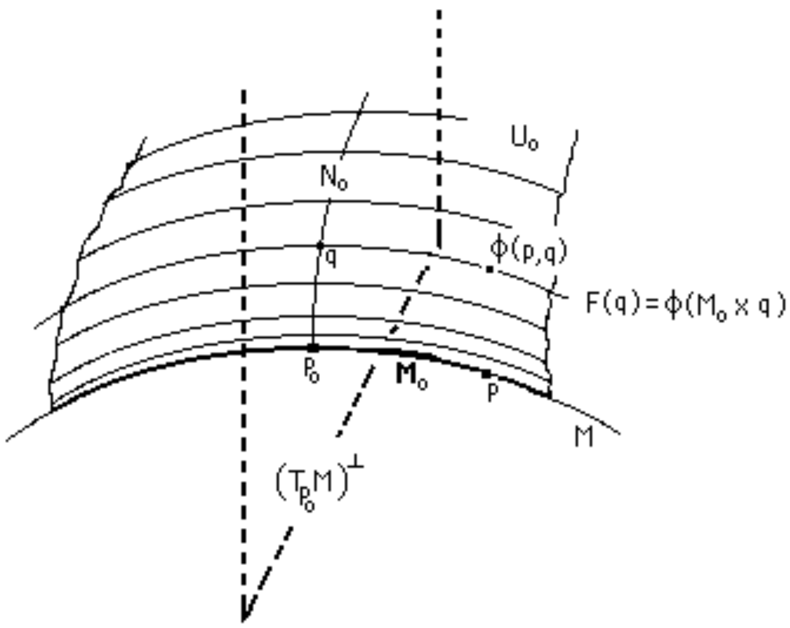

figure 6

Whitney appelle une telle application ϕ une *"fibration semi-analytique (pour Σ) autour de p_0"*. Il souligne qu'une variété analytique V n'a pas (en général) de stratification admettant autour de chaque point une fibration analytique et donne le célébre counterexemple (de *la "famille des quatre droites"*),

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid xy(y-x)(x-\alpha(t)y) = 0\}.$$

Il énonce alors la conjecture suivante :

Conjecture. *"Toute variété analytique V a une stratification qui admet en tout point $p_0 \in V$ une fibration semi-analytique".*

Remarque 1. L'auteur remarque de plus que *"... une stratification satisfaisant la conjecture (éventuellement avec des conditions supplémentaires sur ϕ) pourrait se révéler suffisante pour tout besoin"*.

Remarque 2. Whitney observe explicitement que toute stratification Σ de V vérifiant autour de tout point p_0 une telle conjecture est automatiquement (a)-régulière en tous les points du voisinage $U_0 \cap M$ de p_0 dans M car les propriétés de ϕ impliquent la convergence des plans tangents aux feuilles $F(q)$ du feuilletage $\mathcal{H}_{p_0} = \{F(q)\}_{q \in N_0}$:

$$\lim_{z \to p} T_z F(z) = T_p M.$$

La remarque précédente affirme alors que, dans l'intention de Whitney, le feuilletage local $\mathcal{H}_{p_0}$ obtenu à partir de ϕ, vérifiait la (a)-régularité sur $U_0 \cap M$ (selon notre définition).

Remarque 3. En accord avec la remarque précédente et avec les mêmes notations qu'au §7, en régardant le feuilletage $\mathcal{H}_{x_0}$ (resp. l'homéomorphime de trivialisation topologique local H) comme le correspondant du feuilletage $\mathcal{H}_{p_0}$ (resp. de la *fibration semianalytique locale* ϕ) de Whitney on pourrait réinterpreter la conjecture de Trotman (§7.1) comme une version lisse de conjecture de fibration de Whitney.

Rappelons d'autres résultats concernant la "conjecture de fibration".

Whitney montra au §12 **[Wh]**$_1$ en utilisant une formule d'interpolation (§11) que cette conjecture est vraie pour chaque hypersurface V de $\mathbb{C}^n$ au moins pour tous les points contenus dans le $(n-2)$-squelette de V après restratification de V.

Theoreme (Whitney 1965). *"Chaque hypersurface V de $\mathbb{C}^n$ peut être restratifiée de sorte que la conjecture soit valable pour tous les points $p \in M^{n-2}$ appartenant aux strates $(n-2)$-dimensionelles de V".*

Plus tard, en 1983 Hardt indiqua une solution possible du problème par la méthode de *"stratification via corank 1 projection"* (**[Ha]**$_2$), dans le cas réel analytique (en utilisant également des résultats et techniques de **[Ha]**$_1$).

Plus récemment, en 1988, Hardt-Sullivan **[HS]** considèrent le problème pour des variétés algebriques complexes.

Les auteurs réprirent la formule d'interpolation de Whitney et la méthode de "stratification via corank 1 projection" de Hardt (**[HS]**, §5) et donnèrent leur théorème principal au §6 *"Local triviality and the Whitney conjecture"*.

Nous le rappelons alors ci-dessous :

Theoreme (Hardt-Sullivan, 1988). *Avec les sous-variétés, les projections, et la stratification $\mathcal{S}$ obtenue au théorème 5.5, il existe, pour tout $j \in 1, \ldots, n-1$ et pour tout point $a \in p_j(X_j) - p_j(X_{j-1})$, une boule U relativement ouverte dans P centrée en a et un homéomorphisme*

$$\Phi : U \times p_j^{-1}(a) \to p_j(U)$$

tels que pour tout $u \in U$ et $v \in p_j^{-1}(a)$,

i) $p_j \circ \Phi(u, v) = u$;

ii) $\Phi\Big(U \times \big(S \cap p_j^{-1}(a)\big)\Big) \subseteq S$ *pour S stratum de $\mathcal{S}$;*

iii) $\Phi(U \times v)$ *est un disque holomorphique appliqué biholomorphiquement par p_j sur U;*

iv) $\lim_{v \to w} \Phi(u, v) = w$ *pour $w \in P^{\perp}$.*

Il nous semble que le résultat de Hardt-Sullivan soit moins fort que la conjecture de Whitney originelle, et en particulier *il ne nous semble pas* suffisant pour obtenir la (a)-régularité du feuilletage horizontal $\mathcal{H}_{p_0}$, condition fondamentale (nécessaire et suffisante) pour obtenir la théorie de semidifférentiabilité des morphismes stratifiés que nous avons introduite dans les paragraphes précédents de ce chapitre.

Nous concluons enfin ce paragraphe en rappelant un deuxième problème posé par Whitney (à nouveau au §9 de **[Wh]**$_1$) sur la possibilité d'obtenir une globalisation du feuilletage local $\mathcal{H}_{p_0}$ sur un voisinage entier tubulaire stratifié T_M de la strate M.

Problème (Whitney 1965). *"Peut-on feuilleter un voisinage entier de toute strate?"*

Comme l'existence de tels feuilletages globaux (un pour chaque strate de la stratification considérée) *compatibles* entre eux et vérifiant de plus la condition de (a)-régularité, se révèle pour nous extrèmement importante, nous reconsidèrerons brievement des situations où cette propriété intéressante est valable par hypothèse au prochaîne paragraphe.

§10. Systèmes de données de contrôle feuilletés totalement compatibles.

Dans ce paragraphe, nous considérons des feuilletages globaux de voisinages tubulaires stratifiés du type de ceux "proposés" par Whitney (voir au §9). Nous reprenons les idées développées au §5 du chapitre I quand nous avions introduit la distribution canonique, relative à une strate X, afin de définir un relèvement canonique d'un champ de vecteur. Nous adaptons ces idées au cas où de tels feuilletages stratifiés globaux existent.

Definition 1. Soient (A, Σ) un espace stratifié (c)-régulier, $\mathcal{T} = \{(T_X, \pi_X, \rho_X)\}_{X\in\Sigma}$ un S.D.C. de (A, Σ) **[Ma]** et pour toute strate X de Σ, notons $\mathcal{T}_X = (T_X, \pi_X, \rho_X)$.

Nous appelerons *un feuilletage $\mathcal{F}_X$ de $\mathcal{T}_X$* la donnée d'un feuilletage stratifié $\mathcal{F}_X := \{M_y\}_{y\in T_X}$ de T_X vérifiant les conditions suivantes :

1) $\mathcal{F}_X$ est un feuilletage stratifié de T_X par rapport à la stratification $T_X = \cup_{Y\geq X} T_{XY}$ induite de Σ et pour toute strate $Y \geq X$, le feuilletage

$$\mathcal{F}_{XY} := \{M_y \in \mathcal{F}_X \mid M_y \subseteq T_{XY}\}$$

induit de $\mathcal{F}_X$ sur T_{XY} est de classe $C^{0,1}$.

2) toute feuille $M_y \in \mathcal{F}_X$ est une variété lisse, connexe telle que $\dim M_y = \dim X$;

3) tout $\mathcal{F}_{XY}$ est un sous-feuilletage du feuilletage des hypersurfaces de niveaux de la restriction de la fonction distance $\rho_{XY} : T_{XY} \to [0, \infty[$, i.e. :

$$M_y \subseteq \rho_{XY}^{-1}(\rho_{XY}(y)) \qquad , \qquad \forall\, Y \geq X \ \text{ et } \quad \forall y \in T_{XY} \ ;$$

4) toute $\mathcal{F}_{XY}$ est transverse au feuilletage des fibres de $\pi_{XY} : T_{XY} \to [0, \infty[$, i.e.:

$$M_y \ \text{ est transverse à } \ \pi_{XY}^{-1}(\pi_{XY}(y)) \ \text{ dans } \ Y \quad , \quad \forall\, Y \geq X \ \text{ et } \quad \forall y \in T_{XY} \, .$$

Quand de telles conditions sont vérifiées, nous dirons que le quadruplet $(\mathcal{T}_X, \mathcal{F}_X) = (T_X, \pi_X, \rho_X, \mathcal{F}_X)$ est un *un voisinage tubulaire feuilleté de X*.

Il est immédiat de remarquer que les conditions ci-dessus entraînent que le feuilletage $\mathcal{F}_{XX}$ induit sur la strate X se réduit à l'unique feuille $M_x = X$:

$$\mathcal{F}_X = \{X\} \quad \text{et donc} \quad \forall\, x \in X \quad M_x = X \, .$$

La notion de voisinage tubulaire feuilleté résume toutes les propriétés essentielles dont on a besoin pour qu'un champ de vecteurs ξ_X défini sur X puisse être relevé sur T_X de manière (π_X, ρ_X) contrôlée. En fait, si nous notons $\mathcal{D}_X = \{\mathcal{D}_{XY}\}_{Y \geq X}$ la distribution tangente au feuilletage, alors le champ stratifié $\xi = \{\xi_Y\}_{Y \geq X}$ où $\forall\ Y \geq X\ \xi_Y$ est défini par la formule :

$$\xi_Y(y) := \mathcal{D}_{XY}(y) \cap \pi^{-1}_{XY*y}(\xi_X(x)) \quad \forall\ y \in T_{XY} \quad \text{où } x = \pi_{XY}(y)$$

est un relèvement contrôlé (de même qu'au §5 chapitre I).

Soulignons que si $\mathcal{F}_X$ n'est pas (a)-régulier (sur X) alors ($\mathcal{D}_X$ n'est pas une distribution canonique et) ξ n'est pas nécessairement continu.

Definition 2. Soit (A, Σ) un espace stratifié. Un *système de données de contrôle feuilleté de* (A, Σ) est un couple $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ où :

1) $\mathcal{T} = \{(T_X, \pi_X, \rho_X)\}_{X\in\Sigma}$ est un S.D.C. de (A, Σ);

2) $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_X\}_{X\in\Sigma}$ est une famille de feuilletagse telle que pour toute strate $X \in \Sigma$, $(T_X, \pi_X, \rho_X, \mathcal{F}_X)$ est un voisinage tubulaire feuilleté de X.

Quand ces conditions sont vérifiées, alors nous noterons alors $\mathcal{F}_X = \{M^X_z\}_{z\in T_X}$ le feuilletage du voisinage tubulaire $\mathcal{T}_X$.

Definition 3. Un système de données de contrôle feuilleté $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de (A, Σ) est dit *totalement compatible* si et seulement si $\forall\ Z > Y \geq X$ et $\forall\ z \in T_{XZ} \cap T_{YZ}$ on a :

1) $\pi_{YZ}(M^X_z) = M^X_y$ où $y = \pi_{YZ}(z)$;

2) $M^X_z \subseteq M^Y_z$.

La notion de système de données de contrôle feuilleté totalement compatible améliore celle de S.D.C. feuilleté selon le même esprit avec lequel nous avions introduit la condition de multicompatibilité pour une famille de distributions canoniques. En fait la famille de distributions tangentes aux feuilletages

$$\{\mathcal{D}_X\}_{X\in\Sigma} \qquad \text{où} \qquad \mathcal{D}_X := \mathcal{D}(\mathcal{F}_X) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}_X(z) = T_z M^X_z$$

est multicompatible au sens de la définition 2 (§5 chap.I) car d'après la propriété $M^X_z \subseteq M^Y_z$ on a $\forall\ Z > Y > X$ et $\forall\ z \in T_{XZ} \cap T_{YZ}$:

$$\mathcal{D}_{XZ}(z) := T_z M^X_z \subseteq T_z M^Y_z = \mathcal{D}_{YZ}(z)\,.$$

Cette condition est très importante car elle donne un contrôle vraisemblablement très fort sur les champs relevés. En effet, elle assure que le relevé $(\xi_Y)_Z$ de T_{XY} sur T_{YZ} d'un champ ξ_Y déjà obtenu comme relevé de X sur T_{XY} d'un champ ξ_X coïncide avec le "relevé direct" ξ_Z de ξ_X sur T_{XZ}.

D'autre part, les champs étant relevés tangents aux feuilles d'un feuilletage, leurs flots à tout instant $t \in \mathbb{R}$ préservent alors ces feuilles.

Nous concluons en soulignant l'utilité de considérer ces notions de nouveaux en utilisant des feuilletages globaux.

Si on dispose de plus de la (a)-régularité des feuilletages considérés, les théorèmes de semidifférentiabilité locaux obtenus aux paragraphes précédents peuvent alors être globalisés.

On trouve par exemple le premier théorème d'Isotopie de Thom en version "globalement horizontalement-C^1".

THEOREME. *Soit* (A, Σ) *un espace stratifié* (c)*-régulier admettant un système de données de contrôle feuilleté* $(\mathcal{T}, \mathcal{F} = \{\mathcal{F}_X\})$ *totalement compatible et* (a)*-régulier.*

Soit $f : (A, \Sigma) \to M$ *une submersion stratifiée propre à valeurs dans une variété lisse* M*. Pour tout point* m_0 *dans* M *et pour tout domaine d'un système de coordonnées locales* U_{m_0} *de* m_0 *dans* M *il existe un homéomorphisme stratifié*

$$H : U_{m_0} \times f^{-1}(m_0) \to f^{-1}(U_{m_0})$$

qui est horizontalement-C^1 *sur toute strate de* $U_{m_0} \times f^{-1}(m_0)$ *et dont l'homéomorphisme réciproque*

$$G = H^{-1} : \; f^{-1}(U_{m_0}) \to U_{m_0} \times f^{-1}(m_0)$$

est horizontalement-C^1 *sur toute strate de* $f^{-1}(U_{m_0})$.

Preuve. La démonstration est la même que celle de la version locale §7 théorème 3, avec comme seule différence que, maintenant, les champs de vecteurs $v_1, \ldots, v_l$ peuvent être relevés tangents à un bon feuilletage (i.e. (a)-régulier) existant globalement sur toute la stratification de $f^{-1}(U_{m_0})$. $\square$

REMARQUE. Précisons que pour toute strate $X \in \Sigma$, la $\mathcal{H}$-semidifférentiabilité globale de H (avec $\mathcal{H} = U_{m_0} \times \mathcal{F}_{X|f^{-1}(m_0)}$) est également vérifiée, de même qu'au théorème 6 du §7. D'autre part, il est superflu d'insérer cette condition dans l'énoncé du théorème car, comme on le vérifie immédiatement, la condition "horizontalement-C^1 sur toutes les strates" implique (et en réalité équivaut à) la condition "$\mathcal{F}_X$-semidifférentiable sur toutes les strates".

Nous concluons enfin en posant le problème suivant :

Problème. *"Quelles sont le stratifications admettant un S.D.C. totalement feuilleté et* (a)*-régulier ?".*

BIBLIOGRAPHIE

[Be]$_1$ K. Bekka, *(C)-régularité et trivialité topologique*, Singularity theory and its applications, Warwick 1989, (ed. D. Mond, & J. Montaldi) Part I, Lecture Notes in Math. 1462 (Springer, Berlin 1991), pp. 42-62.

[Be]$_2$ K. Bekka, *Isotopy Theorem*, preprint, University of Liverpool (1991).

[Be]$_3$ K. Bekka, *Continuous vector fields and Thom's Isotopy Theorem*, à paraître aux Proceedings of the Conference in honour of C.T.C. Wall's 60th Birthday, 19-24 August 1996, London Math. Soc. Lecture Note Series, Cambridge University Press.

[BH]$_1$ R.A. Bluementhal & J. Hebda, *Complementary distributions which preserve the leaf geometry and applications to totally geodesic foliations*, Quart. J. Math. Oxford, (2), 35, (1984), pp.383-392.

[BH]$_2$ R.A. Bluementhal & J.Hebda, *De Rham decomposition theorem for foliated manifolds*, Ann. Inst. Fourier, 33 (2), (1983), pp. 133-198.

[Bo] H. Boualem, *Feuilletages riemanniens singuliers transversalement intégrables*, Compositio Mathematica, 95 (1995), pp. 101-125.

[Ca] Y. Carrière, *Flots riemanniens*, Asterisque, (1984), Journées de Toulouse, 17-19 Février 1982, pp. 31-38.

[Cai] G. Cairns, *A general description of totally geodesic foliations*, Tôhoku Math. J. 38 (1986), pp. 37-55.

[CS] M. Coste & M. Shiota, *Thom's first isotopy lemma: a semialgebraic version with uniform bound*, Prepublications de l'Université de Rennes, Mars 1993.

[Da] J.N. Damon, *Topological triviality and versality for subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., September 1988, Volume 75, Number 389.

[Du] A.A. du Plessis, *Continuous controlled vector fields*, à paraître aux Proceedings of the Conference in honour of C.T.C. Wall's 60th Birthday, 19-24 August 1996, London Math. Soc. Lecture Note Series, Cambridge University Press.

[DW] A. du Plessis and T. Wall, *The Geometry of Topological Stability*, London Mathematical Society Monographs, New Series 9, Oxford Sciences Publications, (1995).

[Gi] C.G. Gibson, K. Wirthmüller, A.A.Du Plessis, E.J.N. Looijenga, *Topological stability of smooth mappings*, Lecture Notes in Math.552, Springer Verlag, (1976).

[GM] M. Goresky & R. MacPherson, *Stratified Morse Theory*, Ergebnisse der Mathematik undihrer Grenzgebiete, 3. Folge Band 14. Springer Verlag Berlin Heidelberg, (1988).

[Go] C. Godbillon, *Feuilletages*, Birkhäuser, 1992.

[Ha]$_1$ R. Hardt, *Semialgebraic local-triviality in semi-algebraic mappings*, Amer. J. Maths, Vol 102, No 2, (1980), pp. 291-302.

[Ha]$_2$ R. Hardt,*Stratification via corank one projections*, Proc. Symp. in Pure Math., 40, (1983), pp. 559-566.

[HS] R. Hardt & D. Sullivan, *Variation of the Green function on Riemann surfaces and Whitney's holomorphic stratification conjecture*, Publications de l'I.H.E.S. Paris, Vol 68, (1988) pp. 115-138.

[JW] D.L. Johnson & L.B. Whitt, *Totally geodesic foliations*, J. Diff. Geom., 15 (1980), pp. 225-235.

[Kuo] T.C. Kuo, *A natural equivalence relation on singularities*, Banach Center Publ. Vol 20, (1988), pp. 239-243.

[KT] M. Kwiecinski & D. Trotman, *Scribbling continua in $\mathbb{R}^n$ and constructing singularities with prescribed Nash fibre and tangent cone*, Topology and its Applications, 64

(1995) pp.177-189.

[La] H.B. Lawson, *Foliations*, Bull. of the Amer. Math. Soc., vol. 80, n. 3, May 1974, pp. 369-418.

[Ma] J. Mather, *Notes on topological stability*, Mimeographed notes, Harvard University (1970).

[ON]$_1$ B. O'Neill, *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J., 13 (1966), pp. 459-469.

[ON]$_2$ B. O'Neill, *Submersions and geodesics*, Duke Math. J., 34 (1967), pp. 363-373.

[OT], P. Orro & D. Trotman, *On the regular stratifications and conormal structure of subanalytic sets*, Bull. London Math. Soc., 18, (1986), pp. 185-191.

[Pa] A. Parusiński, *Lipschitz stratifications*, Global Analysis in Modern Mathematics (K. Uhlenbeck, ed.), Proceedings of a Symposium in Honor of Richard Palais' Sixtieth Birthday, Publish or Perish, Houston, 1993, pp 73-91.

[Re] B. Reinart, *Foliated manifolds with bundle-like metrics*, Ann. of Maths, Vol 69 n. 1, 59, (1959), 119-132.

[Th] R. Thom, *Ensembles et morphismes stratifiés*, Bull.A.M.S. 75 (1969), pp. 240-284.

[Ve] J.L. Verdier, *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard*, Inventiones Math. 36 (1976), pp. 295-312.

[Wh]$_1$ H. Whitney, *Local properties of analytic varieties*, Différential and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press, (1965), pp. 205-244.

[Wh]$_2$ H. Whitney, *Tangents to an analytic variety*, Ann. of Math. (1965), pp. 497-549.

[Wh]$_3$ *Complex Analytic Varieties*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1972.

[Wi] H.E. Winkelnkemper, *Estimating* $\|d\phi^t\|$ *for unit vector fields whose orbits are geodesics*, J. Differential Geometry, 31 (1990), pp. 847-857.

[Yo] S. Yorozu, *Behavior of geodesics in foliated manifolds with bundle-like metrics*, J. Math. Soc. Japan, Vol 35, No 2, (1983), pp. 251-272.