Chapitre III

UN THEOREME DE TRANSVERSALITE-ISOTOPIE POUR DES STRATIFICATIONS REGULIERES

Resume. Dans ce chapitre nous prouvons un théorème de mise en position générale pour des sous-espaces stratifiés d'un espace stratifié $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$.

Nous prouvons d'abord un théorème d'extension d'homéomorphismes stratifiés et appliquons ensuite ce résultat pour démontrer le théorème de transversalité stratifiée. La démonstration, donnée au départ pour des ensembles stratifiés abstraits est assez générale et s'adapte bien à toutes les stratifications régulières plongées dans $\mathbb{R}^m$ vérifiant des conditions de régularité du type (b), (c), (w) et lipschitzien.

En appliquant les résultats des chapitres précédents, nous étudions le cas où l'isotopie finale transversalisante dans A préserve le type de régularité du sous-espace après la déformation dans A et nous donnons quelques conditions suffisantes pour chaque type de régularité.

On note en particulier que la préservation de la (a) et (c)-régularité des sous-espaces stratifiés de A est subordonnée à la semidifférentiabilité des flots des champs de vecteurs dependent du temps relevés sur A.

§**1. Introduction.** Un objet (ou sous-espace) sous-stratifié (O.S.S.) d'un espace stratifié (E.S.) $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ est la donnée d'un espace stratifié $\mathcal{V} = (V, \Sigma_V)$ dont chaque strate est contenue dans une unique strate de la stratification Σ de $\mathcal{X}$.

Dans ce chapitre nous considérons le problème de la mise en position transversale d'un O.S.S. W d'un E.S. $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ par rapport à un autre O.S.S. V de $\mathcal{X}$ et plus généralement par rapport à une application stratifiée $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$.

Dans un contexte stratifié, ce sujet a été précédemment considéré par C. McCrory, **[McC]**$_1$ (thèse, 1972) et **[McC]**$_2$, mais seulement pour des complexes simpliciaux.

Par la suite une nouvelle formulation apparaissait dans le contexte des stratifications (b)-régulières introduite par M. Goresky, une première fois dans sa thèse **[Go]**$_1$ (1976) et cinq ans plus tard **[Go]**$_2$ (*Transversality Lemma 5.3*), de manière complètement reformulée.

Le *Transversality Lemma* de Goresky (voir §3.3) fut démontré pour tous les sous-espaces stratifiés W de A vérifiant la *condition de π-fibre* par rapport à un système de données de contrôle $\mathcal{F} = \{(\pi_S, \rho_S) : T_S \to S \times [0, \infty[\}_{S \in \Sigma}$ fixé et pour toute application stratifiée contrôlée $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$. La condition de π-fibre pour l'O.S.S. W de $\mathcal{X}$ signifie, par définition, que W est localement en tout point x la réunion de fibres (stratifiées) de la projection $\pi_S : T_S \to S$ (S strate de A contenant x) et la condition de contrôle sur la morphisme stratifié f éxprime la même propriété au niveau des fibres de f. Ces conditions servaient à Goresky pour préserver la transversalité de (une déformation W' de) W à f en montant les squelettes de $\mathcal{X}$ dans certaines étapes de récurrence.

L'importance d'un tel théorème a déjà été vérifiée dans certaines applications (voir **[Go]**$_2$ et **[Mu]**$_{1,2}$); mais les hypothèses de π-fibre sur W et de contrôle sur f sont trop restrictives pour des applications plus générales.

Dans ce chapitre nous prouverons plus généralement, un théorème de mise en position transversale pour deux applications stratifiées. En particulier en considérant le cas où une de telles applications soit l'inclusion stratifiée $i : W \hookrightarrow \mathcal{X}$ d'un O.S.S. W de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$, on retrouve comme corollaire un analogue du théorème de Goresky valable pour une application stratifiée arbitraire $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ (non nécessairement contrôlée).

Le contenu de ce chapitre est donc le suivant.

Dans le §2 à la section 2.1., en éclaircissant une remarque faite par Milnor **[Mi]** nous étendons un théorème connu pour les variétés compactes : *"L'image $Exp(S)$ de l'application exponentielle engendre comme groupe de difféomorphismes la composante connexe entière $Diff_0(S,S)$ de l'identité dans $Diff(S,S)$"*. Nous généralisons ce théorème aux variétés non compactes, difféomorphes à l'intérieur d'une variété compacte à bord non vide. Il s'agit d'un résultat indépendant de la suite grâce auquel on obtient comme corollaire un *théorème d'extension stratifiée faible* dans un voisinage tubulaire T_S de tout difféomorphisme $f : S \to S$ tel que $f \in Diff_0(S,S)$ avec $S = \mathcal{X}_k - \mathcal{X}_{k-1}$.

Un tel théorème ne suffisant pas pour les buts que nous poursuivons (sauf si on généralise certains résultats de McDuff **[McD]**), par d'autres méthodes nous démontrons alors à la section 2.2 un *théorème d'extension forte* permettant de construire, pour tout difféomorphisme $f : S \to S$ dans un voisinage suffisamment petit de 1_S dans $Diff_0(S,S)$, un homéomorphisme stratifié (difféomorphisme sur les strates) prolongeant f sur la stratification A toute intière. Ce théorème d'extension jouera un rôle important dans la démonstration du théorème de transversalité.

Dans le §3, nous démontrons le théorème de transversalité. Nous en donnons une première version (théorème 1, section 3.1) valable pour des E.S.A., catégorie qui contient celle des stratifications (c) **[Be]**$_1$ et (b)-régulières **[Ma]**$_1$, et en considérant la transversalité de deux O.S.S. V et W de $\mathcal{X}$.

Ensuite, en remarquant que notre méthode de démonstration reste valable dans un cadre plus général, nous étendons le théorème au cas des stratifications (w)-régulières et lipschitziennes (théorème 2, section 3.2).

Le paragraphe se conclut à la section 3 où nous améliorons les théorèmes 1 et 2 en montrant que pour tout couple d'applications stratifiées $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ et $h : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ il existe une *déformation par isotopie* h' de h dans $\mathcal{X}$ qui est transverse à g.

Notre méthode de démonstration, par récurrence sur la dimension k du squelette A_k de A ($A_n = A$, où $n = \dim A$), s'adapte de façon convenable à tout type de stratification régulière pour laquelle un théorème d'extension de champs de vecteurs est valable. C'est donc le cas des E.S.A. et des équisingularités de type (b)-régulier **[Ma]**$_1$, (c)-régulier **[Be]**$_1$,**[Be]**$_2$, (w)-régulier **[Ve]** et lipschitzien **[Pa]**.

Dans le cas où $h = i : W \hookrightarrow \mathcal{X}$ est un'inclusion stratifiée, notre construction s'interprete de la manière suivante.

Si $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ est une application stratifiée (resp. V un O.S.S. fixé de $\mathcal{X}$) et W est l'O.S.S. à déformer, on veut déterminer un nouveau sous-espace W' qui soit isotope à W et transverse à g (resp. à V). La déformation "transversalisante" $\Phi_1 : A \to A$, telle que $W' = \Phi_1(W)$, sera obtenue comme la "section au temps $t = 1$" d' un flot contrôlé $\Phi : A \times \mathbb{R} \to A$ d'un champ de vecteurs dépendant du temps défini sur A toute entière et obtenu par la méthode du relèvement continu contrôlé à partir d'un champ défini sur la (k)-squelette A_k,

Dans le §4, nous concentrons notre attention sur le cas où la stratification A est plongée dans $\mathbb{R}^n$ et considérons le problème de la préservation du type de régularité du sous-espace sujet à la déformation.

Il est bien connu qu'un flôt contrôlé sur une stratification régulière A n'est pas en général une application C^1, même dans le cas d'un champ de vecteurs ne dépendant pas du temps (exemple de la famille des quatre droites). Alors on n'a aucune raison, a priori, pour affirmer qu'une certaine régularité de W implique la même régularité pour $W' = \Phi_1(W)$. C'est précisément là l'obstruction principale qui "contraint" Goresky à introduire la condition de π-fibre et limite à ces sous-espaces très particuliers la démonstration du *Transversality Lemma* [**Go**]$_2$.

Dans la section 4.1 nous utiliserons alors les résultats des chapitres précédents, pour démontrer que si la stratification A est au moins (c)-régulière, et si les flots des champs relevés dépendant du temps, ont la propriété de semidifférentiabilité introduite au chapitre II, alors le sous-espace déformé $W' = \Phi_1(W)$ possède encore la (a)- ou la (c)-régularité, si W la possède.

D'autres conditions suffisantes similaires, sont données à la section 4.2 à propos de la préservation de la régularité des O.S.S. (w)-réguliers et lipschitzien.

Quand A est une stratification de Whitney, i.e. (b)-régulière, le théorème d'extension de champs est encore valable, mais *il n'est pas encore clair* si la semidifférentiabilité de l'isotopie Φ_A suffit pour assurer la préservation de la condition (b) de Whitney pour le sous-espace W'.

Une version (b)-régulière du lemme de transversalité présenterait aussi un intérêt pour des applications particulières à l' *"Homologie de Whitney"* [**Mu**]$_1$ à propos de la conjecture de Goresky selon laquelle "toute classe d'homologie singulière d'une stratification de Whitney $\mathcal{X}$ peut être réprésentée (et bijectivement !) par un cycle de Whitney de $\mathcal{X}$", ou plus précisément : *"La fonction $R : WH_k(\mathcal{X}) \to H_k(\mathcal{X})$ est une bijection pour toute stratification de Whitney $\mathcal{X}$"* [**Go**]$_{1,2}$.

Cette remarque constitue aussi l'une des motivations originelles de ce chapitre. Nous ne l'utiliserons pas pour des stratifications de Whitney, mais plutôt pour des ensembles stratifiés abstraits et pour des stratifications (c)-régulières.

En fait, dans le chapitre IV nous reprenons la théorie de Goresky et la développons à nouveau pour des E.S.A. et des stratification (c)-régulières. De façon similaire à ce que nous avons fait dans [**Mu**]$_{1,2}$ nous utiliserons le théorème de transversalité ici établi pour montrer que l'opération de somme dans *l'homologie stratifiée* s'interprète géométriquement par l'*union transversale* de deux sous-espaces (deux k-cycles et/ou deux k-cocycles) stratifiés abstraits de $\mathcal{X}$.

Donc, dans les théories d'homologie stratifiée $\{AH_*, AH^*\}$ et $\{BH_*, BH^*\}$ notre théorème de transversalité jouera le même rôle que le *"Moving Lemma"* dans la théorie des anneaux de Chow $CH_*(\ )$ pour les cycles algébriques d'une variété algébrique [**Fu**]. Il permettra lieu aussi bien à d'autres intérprétations géométriques importantes des opérations cohomologiques : le produit cup s'obtient comme l'intersection transverse de deux cocycles, le produit cap comme l'intersection transverse d'un cycle et d'un cocycle, et les homomorphismes induits $f^* : AH^k(\mathcal{X}) \to AH^k(\mathcal{Y})$, représentables comme la préimage transverse $W \mapsto f^{-1}(W)$ d'un cocycle par rapport à une fonction contrôlée f.

§2. Image de l'application exponentielle et extensions d'homéomorphismes stratifiés.

Dans ce paragraphe, à la section 2.1. en éclaircissant une remarque faite par J. Milnor ([**Mi**] pag. 1019), nous généralisons aux variétés difféomorphes à l'intérieur d'une variété compacte à bord un théorème connu pour les variétés compactes sur la simplicité du groupe $Diff_0(S,S)$ des difféomorphismes dans la composante connexe de l'identité 1_S dans $Diff(S,S)$. Il s'agit d'un résultat indépendant de la suite donnant comme corollaire un *théorème d'extension stratifié faible* de chaque difféomorphisme $f \in Diff_0(S,S)$ sur un voisinage U de $S = A_k - A_{k-1}$ dans A

Ensuite à la section 2.2 nous montrerons un *théorème d'extension stratifié forte* sur l'intier A de tout difféomorphisme $f : S \to S$ suffisamment proche de 1_S dans $Diff_0(S,S)$. Un tel théorème jouera un rôle fondamentale dans la suite du chapitre.

2.1 : L'image de l'application exponentielle de l'intérieur S d'une variété compacte à bord engendre $Diff_0^r(S,S)$.

Si S est une variété fermée (i.e. compacte et sans bord) et si $Diff^r(S,S)$ désigne le groupe des difféomorphismes de classe C^r de S ($r = 0,\ldots,\infty$), il est bien connu que sa composante connexe $Diff_0^r(S,S)$ contenant l'identité $1_S : S \to S$ est un groupe simple (sauf éventuellement pour le cas $r = \dim S + 1$) [**Ep**]$_{1,2}$, [**La**], [**Ma**]$_{2,3,4,5}$, [**Thu**].
Ce théorème implique que l'image de l'application exponentielle, i.e. les difféomorphismes contenus dans un groupe à un paramètre, engendrent $Diff_0^r(S,S)$.

Dans cette section nous montrerons que le même résultat reste encore valable pour toute variété difféomorphe à l'intérieur $intM$ d'une variété M compacte à bord non vide.

Soit alors $S = intM$ une telle variété.
Comme S est non-compacte la *"simplicité de $Diff_0^r(S,S)$"* n'est plus valable [**McD**]. En revanche, comme $S = intM = M - \partial M$ avec M compacte, les sous-groupes distingués de $Diff_0^r(S,S)$ ont été complètement classifiés par D. McDuff ([**McD**] 1978) et ils sont en correspondance bijective avec le treillis des sous-ensembles de $\{1,\ldots,k\}$ où k est le nombre des composantes connexes du bord ∂M de M.

En utilisant les résultats de McDuff (Theorem 1 et Corollary 1.3), nous vérifions à nouveau que pour de telles variétés S, les difféomorphismes images de l'application exponentielle forment des générateurs de $Diff_0^r(S,S)$.

Notons Exp^r l'application exponentielle de S

$$Exp^r : \Gamma_0^r(S) \to Diff_0^r(S,S) \qquad , \qquad Exp^r(\zeta) = \phi_1$$

définie sur l'ensemble $\Gamma_0^r(S)$ de tous les C^r-champs de vecteurs ζ de S ayant un flot global $\phi : S \times \mathbb{R} \to S$ (noté aussi $\phi = \{\phi_t : S \to S\}_{t\in\mathbb{R}}$) et qui associe à chaque ζ le difféomorphisme $\phi_1 : S \to S$ au temps $t = 1$.

Il est clair que chaque image $\phi_1 = Exp^r(\zeta) \in Diff_0^r(S,S)$, i.e. appartient à la même composante connexe de 1_S et de plus que pour tout (autre) $t \in \mathbb{R}$, $\phi_t \in Diff_0^r(S,S)$ car $\phi_t = \psi_1 = Exp^r(\eta)$ est l'exponentielle du champ $\eta = t \cdot \zeta$.

D'autre part, si nous notons $Exp^r(S) := < Exp^r\big(\Gamma_0^r(S)\big) >$ le sous-groupe de $Diff_0^r(S,S)$ engendré par l'image de l'application exponentielle, il est immédiat de vérifier que :

Remarque 1. *$Exp^r(S)$ est un sous-groupe distingué de $Diff_0^r(S,S)$.*

Preuve. $Exp^r(S)$ étant l'ensemble de toutes les compositions finies possibles

$$Exp^r(S) = \Big\{ f = \phi_1^1 \circ \cdots \circ \phi_1^s \quad | \quad s \in \mathbb{N} \Big\}$$

avec chaque $\{\phi_t^i\}_t$ flot global d'un certain champ ζ^i, il suffit juste de remarquer que $\forall f \in Exp^r(S)$ et $\forall g \in Diff_0^r(S,S)$ on peut écrire

$$g^{-1} \circ f \circ g = g^{-1} \circ \Big(\phi_1^1 \circ \cdots \circ \phi_1^s\Big) \circ g =$$

$$= (g^{-1} \circ \phi_1^1 \circ g) \circ \cdots \circ (g^{-1} \circ \phi_1^s \circ g) = \psi_1^1 \circ \cdots \circ \psi_1^s$$

où chaque ψ_1^i est défini par $\psi_1^i := g^{-1} \circ \phi_1^i \circ g = Exp^r(g_*^{-1}(\zeta^i(g)))$ et est donc l'exponentiel du champ $g_*^{-1}(\zeta^i(g))$. $\square$

Theoreme. *Si $S = intM$ est une variété (difféomorphe à) l'intérieur d'une variété compacte M à bord alors :*

$$Exp^r(S) = Diff_0^r(S,S).$$

Preuve. Notons $S = M - \partial M$ avec M variété à bord compacte. Alors le bord ∂M de M est lui aussi compact et a un nombre fini de composantes connexes que nous notons $N_1, \ldots, N_k$ i.e. $\partial M = \sqcup_{j=1}^k N_j$ (où $\sqcup :=$ réunion disjointe).

Avec les mêmes notations de **[McD]** soit $K = \{1, \ldots, k\}$, pour tout $j \in K$

$$G_j := \Big\{ g \in Diff_0^r(S,S) \mid g = id \text{ dans un voisinage de } N_j \Big\}$$

et pour tout sous-ensemble $J \subseteq K$ (éventuellement vide)

$$G_J := \Big\{ g \in Diff_0^r(S,S) \;\Big|\; g = id \text{ dans un voisinage de } \bigcup_{j \in J} N_j \Big\} = \bigcap_{j \in J} G_j.$$

Il est immédiat de vérifier que tout G_J est un sous-groupe distingué de $Diff_0^r(S,S)$ et que $\forall I, J \subseteq K$ on a de plus: $I \subseteq J \Longleftrightarrow G_J \subseteq G_I$.

On obtient alors un treillis de sous-groupes distingués $\big(\{G_J\}_{J \subseteq K}, \supseteq\big)$, correspondant au treillis $\big(\{J\}_{J \subseteq K}, \subseteq\big)$ des sous-ensembles de K, lequel admet le sous-groupe G_K des difféomorphismes à support compact dans S comme élément minimum et le sous-groupe $G_\emptyset = Diff_0^r(S,S)$ comme élément maximum.

McDuff prouve (Theorem 1) que *"E est un sous-groupe distingué de $Diff_0^r(S,S)$ si et seulement s'il existe un unique $J \subseteq K$ tel que $G_J \supseteq E \supseteq [G_J, G_J]$* (où [,] note le sous-groupe des commutateurs)".

En considérant alors dans notre cas $Exp^r(S)$, qui est distingué par la remarque 1, on déduit qu'il existe un unique sous-ensemble J_0 de K tel que

$$G_{J_0} \supseteq Exp^r(S) \supseteq [G_{J_0}, G_{J_0}].$$

D'autre part, il est immédiat de vérifier que pour chaque $i \in K$ on a $G_i \not\supseteq Exp^r(S)$.

En fait, il suffit de considérer un champ complet de vecteurs $\zeta_{N_i} \neq 0$ sur N_i et de le relever le long d'un collier $C \cong N_i \times [0,1]$ en un champ complet ζ sur S; une méthode similaire et plus sophistiquée sera utilisée au *théorème d'extension stratifiée forte*, (§2.2 "étape 3", figures 1 et 2). On trouve donc un difféomorphisme $\phi_1^i = Exp^r(\zeta^i)$ qui par définition appartient à $Exp^r(S)$; mais d'autre part comme $\zeta_{N_i} \neq 0$ alors $\phi^i_{1|N_i} \neq 1_{N_i}$ et donc $\phi_1^i \notin G_i$.

Alors nécessairement $J_0 = \emptyset$, $G_{J_0} = G_\emptyset = Diff_0^r(S,S)$ et

$$Diff_0^r(S,S) \supseteq Exp^r(S) \supseteq [Diff_0^r(S,S), Diff_0^r(S,S)],$$

ce qui termine la preuve de la proposition car $Diff_0^r(S,S)$ est un groupe parfait (**[McD]**, Corollary 1.3). $\square$

Corollaire (Theoreme d'extension stratifiee faible). *Soit $\mathcal{X} = (A,\Sigma)$ un E.S.A. compact, A_k un squelette de A et $S = A_k - A_{k-1}$ la partie de dimension k de A.*

Tout homéomorphisme $\overline{f} : A_k \to A_k$, difféomorphisme sur chaque strate de A_k tel que $\overline{f}_{|A_{k-1}} = 1_{A_{k-1}}$ et $\overline{f}_{|S} \in Diff_0(S,S)$ se prolonge en un homéomorphisme stratifié $\tilde{f} : U \cup \partial S \to V \cup \partial S$, difféomorphisme sur les strates avec U et V deux voisinages de S dans A.

Preuve. Notons $f = \overline{f}_S$ la restriction de $\overline{f}$ à S.

Etant donnée A compacte par hypothèse, alors soit la réunion de k-strates S est compacte soit elle est difféomorphe à l'intérieur d'une variété compacte à bord. En tout cas, grâce au théorème au §2.1, nous avons

$$Diff_0(S,S) \;=\; < Exp(S) >$$

(où ici $Exp = Exp^\infty$) et donc on peut réécrire f de la forme

$$f = \phi_1^1 \circ \cdots \circ \phi_1^s \quad \text{avec} \quad \phi_1^i = Exp(\zeta^i)\ ,$$

et où $\forall\ i = 1, \ldots, s$, ζ^i est un champ de vecteurs sur S de flot global $\phi^i : S \times \mathbb{R} \to S$.

Nous voulons prolonger $f : S \to S$ (et $\overline{f}$) en relevant chacun des flots ϕ_t^i, ce qui sera possible en considérant un relèvement contrôlé de chacun des champs ζ^i.

Notons $f = \overline{f}_S$ la restriction de $\overline{f}$ à S. On a alors par hypothèse que $f \to 1_{\partial S}$ quand $x \to \partial S$.

Pour tout $i = 1, \ldots s$ et pour toute composante connexe X de S, i.e. $\forall$ k-strate X de A, notons ζ_X^i la restriction de ζ^i à X et $\zeta^i_{T_X} = \{\zeta^i_{T_{XY}}\}_{Y \geq X}$ (avec $T_{XY} = T_X \cap Y$) un relèvement stratifié contrôlé de ζ_X^i sur un voisinage tubulaire stratifié $T_X = \cup_{Y \geq X} T_{XY}$ d'un S.D.C. $\mathcal{F} = \{(\pi_Y, \rho_Y) : T_Y \to Y \times [0,\infty[\,\}_{Y\in\Sigma}$, fixé de A.

Comme chaque champ ζ_X^i a un flot global ϕ_X^i (restriction de ϕ^i), alors grâce aux hypothèses de contrôle la même proprieté est préservée par le relèvement $\zeta^i_{T_X}$ de telle manière que son flot $\Phi^i_{T_X} : T_X \times \mathbb{R} \to T_X$ soit une isotopie stratifiée prolongeant continûment ϕ_X^i **[Gi]**.

En notant alors $\Phi^i_{T_S} := \cup_{\dim X = k} \Phi^i_{T_X} : T_S \to T_S$ on obtient que sa section au temps $t = 1$, i.e. l'application composée

$$h \;:=\; [\Phi^i_{T_S}]_1 \;:=\; \Phi^1_1 \circ \cdots \circ \Phi^s_1 \quad : \quad T_S \longrightarrow T_S$$

est un homéomorphisme stratifié du voisinage tubulaire T_S, difféomorphisme sur les strates de T_S et prolongeant $f : S \to S$.

La preuve se conclut alors en appliquant à h et h^{-1} le lemme ci-dessous de démonstration élémentaire. $\square$

LEMME. *Soit $T_S \subseteq A$ un voisinage tubulaire stratifié d'une strate S et $h_{T_S} : T_S \to T_S$ une application continue dont la restriction $h_S : S \to S$ à S se prolonge continûment sur $\partial S := \overline{S} - S$ par une application continue $h_{\partial S} : \partial S \to \partial S$.*

Il existe alors un voisinage U de S dans A tel que l'application $h_U \cup h_{\partial S} := h_{T_S|U} \cup h_{\partial S} : U \cup \partial S \to T_S \cup \partial S$ soit continue. $\square$

REMARQUE. Avec les mêmes notations que dans la preuve du théorème d'extension faible, on n'a pas de raison, a priori, pour affirmer que l'hypothèse $\lim_{x \to \partial S} f = 1_{\partial S}$ avec $f = \phi^1_1 \circ \cdots \circ \phi^s_1$, implique que pour tout $i = 1, \ldots, s$ le champ de vitesse ζ^i de ϕ^i_t se prolonge par 0 sur A_{k-1}. Cependant, il me semblerait raisonnable de penser que, dans le cas où le difféomorphisme $f \in Diff_0(S, S)$ est pris dans un voisinage suffisamment petit de 1_S, on puisse obtenir $\lim_{x \to \partial S} \zeta^i(x) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, s$.

Dans ce cas, le *théorème d'extension faible* pourrait alors être amélioré pour en déduire un théorème d'extension à la stratification A toute entière et en continuant avec la même méthode de démonstration (*étape 2* etc..) on pourrait établir alors un *théorème d'extension forte* qui sera effectivement obtenu par des techniques différentes dans la prochaine section.

D'autre part, il faut remarquer aussi que la possibilité d'obtenir que $\lim_{x \to \partial S} \zeta^i(x) = 0$ est subordonnée à une extension apparemment non triviale des résultats de McDuff (théorème 1 et corollaire 1.3) [**McD**].

2.2 : Un théorème d'extension forte d'homéomorphismes stratifiés

Les théorèmes 1 et 2 d'extension de la présente section constituent des ingrédients indispensables respectivement pour les démonstrations des théorèmes de transversalité 1 et 2 que nous donnerons au §3 pour le cas des E.S.A. et celui des stratifications rugueuses et lipschitziennes.

Soit $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un espace stratifié et $S = A_k - A_{k-1}$ la réunion des k-strates de A.

Le théorème 1 (guide de base également pour la preuve du théorème 2) nous permet d'obtenir un prolongement "suffisamment régulier" sur la stratification A de tout difféomorphisme $f : S \to S$, appartenant à un voisinage assez petit de 1_S dans $Diff_0(S, S)$. Ce théorème représentera une étape cruciale des preuves des théorèmes de transversalité que nous donnerons au §3; en particulier, il corrige une imprécision dans la preuve du *Transversality Lemma* de Goresky [**Go**]$_2$.

Il convient d'abord de faire quelques rappels sur le fibré $(\pi^*_S TS, \Pi_{S \times I}, S \times I)$ pullback sur $S \times I$ du fibré tangent TS et sur la notion de champ de vecteurs dépendant du temps.

Considérons alors, avec les notations de [**Ma**]$_6$ (page 286) et/ou [**DW**] (page 61), la projection $\pi_S = pr_1 : S \times I \to S$ sur S.

Rappelons que le fibré pullback $(\pi_S^* TS, \Pi_{S\times I}, S\times I)$ sur $S\times I$ se définit comme ayant pour espace total l'ensemble :

$$\pi_S^* TS := \Big\{ \big((x,t),(y,v)\big) \in (S\times I)\times TS \quad | \quad x = y \Big\}$$

et donc en identifiant tout élément $((x,t),(x,v)) \in \pi_S^* TS$ avec (x,t,v), on peut réécrire

$$\pi_S^* TS \;=\; \bigcup_{(x,t)\in S\times I} \{(x,t)\}\times T_x S \;=\; TS\times I\,.$$

D'autre part, la fibre via $\Pi_{S\times I}$ dans $\pi_S^* TS$ de chaque point $(x,t)\in S\times I$ est bien l'espace $\Pi_{S\times I}^{-1}(x,t) = T_x S$ et donc on en déduit alors que l'espace des sections $\Gamma^\infty(\pi_S^* TS)$ est constitué précisement par les champs de vecteurs $\zeta = \{\zeta_t\}_{t\in I}$ sur $S\times I$ préservant chaque niveau $t\in I$.

Definition 1. Un *champ de vecteurs dépendant du temps sur la variété* S est la donnée d'un élément $\zeta \in \Gamma^\infty(\pi_S^* TS)$ de l'espace des champs de vecteurs préservant les niveaux de $S\times I$. Nous noterons aussi $\zeta = \{\zeta_t\}_{t\in I}$ en l'interprètant comme une famille de champs de vecteurs de S paramétrée en $t\in I$.

Etant donné un champ de vecteurs dépendant du temps $\zeta = \{\zeta_t\}_{t\in I}$, on peut considérer sur la variété S l'équation différentielle définie par

$$E(\zeta) \quad : \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\beta(x,t) = \zeta_t(\beta(x,t)) \\[2ex] \beta(x,0) = x \;\;,\;\; \forall\, x\in S\,. \end{cases}$$

Nous appelerons *flot (global) du champ de vecteurs dépendant du temps* $\zeta = \{\zeta_t\}_t$ une application lisse $\phi : S\times I \to S$ qui est solution de l'équation $E(\zeta)$. Notons aussi $\phi := \{\phi_t : S\to S\}_t$.

Mather prouve ([**Ma**]$_6$ lemme 2 page 289, ou bien [**DW**] lemme 3.7.5) que tout champ de vecteurs dépendant du temps $\zeta = \{\zeta_t\}_t$ dans un voisinage suffisamment petit O_S du champ constant zéro $\mathbf{0}$ dans $\Gamma^\infty(\pi_S^* TS)$ admet un tel flot.

Attention. Le flot $\phi : S\times I \to S$ d'un champ de vecteurs dépendant du temps $\zeta = \{\zeta_t\}_t$ *n'est pas en général un groupe à un paramètre* et donc même en vérifiant la condition initiale $\phi_0 = 1_S$, il ne vérifie en général aucune condition du type $\phi_{t+s} = \phi_t\circ\phi_s$.

Si un tel champ $\zeta = \{\zeta_t\}_t = \zeta(x,t)$ pensé comme élément de $\Gamma^\infty(S\times I)$ admet, dans le sens usuel, un flot global $\psi : (S\times I)\times\mathbb{R} \to S\times I$ qui, (cette fois) est un groupe à un paramètre de $S\times I$, ψ préserve alors tout niveau $t\in I$ et sa restriction à chaque niveau $t\in I$, $\psi_t = \psi_t(x,s)$ est le flot (usuel) du champ de niveau ζ_t qui est encore un groupe à un paramètre de difféomorphismes de S. Cependant, même dans ce cas, il n'y a aucune relation directe entre ψ (ou les ψ_t) et ϕ (ou les ϕ_t).

Dans cette section, nous ne considereron que des flots ϕ solutions d'une équation du type $E(\zeta)$ et qui ne seront pas donc en général des groupes à un paramètre.

Soit $\mathcal{X} = (A,\Sigma)$ un espace stratifié abstrait, muni d'un système de données de contrôle $\mathcal{F} = \{(T_X,\pi_X,\rho_X)\}_{X\in\Sigma}$.

Fixons une strate X de A et un champ de vecteurs dépendant du temps $\zeta_X = \{\zeta_{X\,t}\}_t$. Comme pour tout $t\in I$, $\zeta_{X\,t}$ est un champ de vecteurs de X, on peut alors conidérer un relèvement (π,ρ)-contrôlé $\zeta_{T_X\,t}$ sur le voisinage tubulaire T_X de X de sorte à retrouver un champ de vecteurs $\zeta_{T_X} := \{\zeta_{T_X\,t}\}_t$ dépendant du temps de T_X.

Les propriétés usuelles d'intégrabilité et de continuité des flots relevés contrôlés des champs de vecteurs définis sur une strate sont alors encore valables quand on considère sur X et pour son relevé sur T_X des champs de vecteurs dépendant du temps. En particulier, avec les mêmes notations que ci-dessus, on trouve :

PROPOSITION 1. *Soit $\zeta_{T_X} = \{\zeta_{T_X\,t}\}_t$ un champ de vecteurs dépendant du temps sur T_X obtenu comme relèvement contrôlé d'un champ de vecteurs dépendant du temps $\zeta_X = \{\zeta_{X\,t}\}_t$ défini sur une strate X de A.*

Alors le flot $\phi_{T_X} = \{\phi_{T_X\,t}\}_t$ de ζ_{T_X} vérifie les conditions de (π,ρ)-contrôle et est un prolongement continu du flot $\phi_X = \{\phi_{X\,t}\}_t$ de ζ_X.

Preuve. En remarquant, grâce à la condition de ρ-contrôle de chaque champ $\zeta_{X\,t}$, que $\forall\, z \in T_X$ fixé, la fonction $\rho_X \circ \phi_{T_X}(z,t)$ est une fonction constante de la variable t, on obtient que toute trajectoire $\phi_{T_X}(z,t)$ reste entièrement contenue dans l'hypersurface de niveau de z. La preuve est alors identique à celle donnée pour le cas classique d'un flot relevé d'un champ de vecteurs indépendant du temps. $\square$

Le *théorème d'éxtension stratifiée forte* que nous allons démontrer ci-dessous se révèlera d'une importance cruciale pour la suite. La méthode de démonstration de la première partie, *"étape 1"*, m'a été suggérée par Andrew duPlessis et se base sur les techniques utilisées par Mather pour démontrer que la stabilité infinitésimale d'une application $f \in C^\infty(S,S)$ implique sa stabilité. Elle permet d'obtenir un prolongement sur de l'application $f : S \to S$ sur A toute intière, suffisamment régulier et qui jouera un rôle subtil et essentiel également dans les preuves d'autres théorèmes de régularité que nous verrons au §4.

THEOREME 1 (D'EXTENSION STRATIFIEE FORTE). *Soit $\mathcal{X} = (A,\Sigma)$ une stratification (c)-régulière, A_k un squelette de A et soit $S = A_k - A_{k-1}$ la réunion des strates de dimension k de A.*

Il existe un voisinage B de 1_S dans $Diff_0(S,S)$ tel que tout $f \in B$ se prolonge en un homéomorphisme stratifié $\tilde f : A \to A$, difféomorphisme sur chaque strate de A et tel que $\tilde f_{|\,A_{k-1}} = 1_{A_{k-1}}$.

Preuve. Adoptons ici toutes les notations de **[Ma]**$_6$ et de **[DW]** chapitre 3 en précisant que tous les espaces d'applications que nous considererons seront munis de la C^∞-topologie de Whitney.

Etape 1 : Construction (pour toute f proche de 1_S) d'une isotopie $\gamma_f : 1_S \equiv f$ entre 1_S et f, qui est le flot d'un champ de vecteurs dépendant du temps.

Soit $I = [0,1]$, considérons une *"famille de géodesiques"*, de la variété S, **[Ma]**$_6$ ou bien **[DW]** Proposition 3.3.1, i.e. une application lisse

$$\gamma : N \times I \longrightarrow S \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} \gamma(x,y,0) = x & \forall\,(x,y) \in N \\ \gamma(x,x,t) = x & \forall\,(x,x) \in \Delta(S) \quad \text{et} \quad \forall\, t \in I \\ \gamma(x,y,1) = y & \forall\,(x,y) \in N \end{cases}$$

où N est un voisinage ouvert de la diagonale $\Delta(S)$ dans $S \times S$.

De manière similaire à **[DW]** corollaire 3.4.5, l'ensemble

$$W := \{g \in C^\infty(S,S) \mid (x, g(x)) \in N\}$$

et l'application

$$G : W \longrightarrow C^\infty(S \times I, S \times I)$$

définie $\forall\, g \in W$ par :

$$G(f) : S \times I \to S \times I \qquad , \qquad G(f)(x,t) = \Big(\gamma\big(x, f(x), t\big), t\Big)$$

sont respectivement un voisinage ouvert de 1_S dans $C^\infty(S,S)$ et une application continue d'espaces de difféomorphismes telle que

$$f \in W \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} G(f)_0 = 1_S \\ \text{et} \\ G(f)_1 = f \end{cases} .$$

Pour tout $t \in I$ notons alors

$$\phi_t := G(f)_t : S \longrightarrow S \qquad , \quad \phi_t(x) := \gamma(x, f(x), t)$$

l'application (dépendant de f) de niveau $t \in I$ de $G(f)$.

Nous allons démontrer que si U est un voisinage suffisamment petit de 1_S dans $Diff_0(S,S)$, alors pour tout $f \in U$ la courbe $\gamma_f(t) := \gamma(x, f(x), t)$ définit une isotopie entre 1_S et f, entièrement contenue dans U et qui est le flot d'un champ de vecteurs dépendant du temps.

Considérons maintenant l'espace des applications lisses $C^\infty(S \times I, S \times I)$ et soit U un voisinage ouvert arbitraire de 1_S dans $Diff_0(S,S)$.

Remarquons d'abord que quitte à rétrécir W, i.e. à le remplaçer par $W \cap U$, on peut supposer $W \subseteq U$ (et donc en particulier $W \subseteq Diff_0(S,S)$).

D'autre part, pour tout voisinage ouvert U de 1_S dans $Diff_0(S,S)$, grâce au lemme 3.4.9 [**DW**] il existe un voisinage ouvert V de l'identité $1_{S\times I}$ dans l'espace $C^\infty(S\times I, S\times I)$, tel que tout $F \in V$ préserve chaque niveau $t \in I$, i.e. est de la forme $F(x,t) = (f_t(x), t)$ avec $f_t : S \to S$, vérifiant de plus $f_t \in U$, $\forall\ t \in I$. Comme tout $F \in V$ préserve les niveaux, il conviendra d'utiliser également la notation $F := \{f_t : S \to S\}_{t\in I}$.

Pour clarifier davantage, avec les notations de [**DW**], l'ouvert V est défini par

$$V := \mathfrak{U}_{I\,U} = \Big\{ F \in C^\infty_{lp}(S \times I, S \times I) \quad | \quad \lambda_F(I) \subseteq U \Big\}$$

où l'indice *"lp"* signifie *"level preserving"* et par définition $\lambda_F(t) := f_t\,,\ \ \forall\ t \in\ I.$

Comme $\forall\ F = \{f_t\}_{t\in I} \in V$, on a (par construction de V) $f_t \in U\ \ \forall t \in [0,1]$ et comme (par hypothèse) tout élément de U est un difféomorphisme, on en déduit que tout $F \in V$ est un difféomorphisme de $S \times I$ préservant les niveaux.

Donc V est un voisinage de $1_{S\times I}$ vérifiant :

$$V \subseteq Diff_{lp}(S \times I, S \times I) \qquad \text{et} \qquad \text{“}\ F = \{f_t\}_{t\in I}\ \in V \quad \Longrightarrow \quad f_t \in U\ ,\ \forall\ t \in I\ \text{”}\,.$$

L'application $G : W \to C^\infty(S \times I, S \times I)$ étant continue et V étant un voisinage ouvert de $1_{S\times I}$ dans $C^\infty(S \times I, S \times I)$, l'ensemble $W' := W \cap G^{-1}(V)$ est encore un voisinage ouvert de 1_S dans U et dans $Diff_0(S,S)$ pour lequel on a

$$G(W')\ \subseteq\ V\ \subseteq\ Diff_{lp}(S \times I, S \times I)\,.$$

La restriction de G (notons-la encore G) :

$$G \quad : \quad W' \quad \longrightarrow \quad V \;\subseteq\; Diff_{lp}(S \times I, S \times I)$$

vérifie alors que chaque image $G(f)$ est un difféomorphisme préservant les niveaux de $S \times I$ que nous notons $G(f) = \{G(f)_t\}_{t \in I}$ et dont chaque difféomorphisme de niveau $G(f)_t \in U$.

Cela montre donc, en particulier, que pour tout $f \in W'$ l'application $\phi_t := G(f)_t : S \to S$ est un difféomorphisme, que le chemin $\gamma_f(t) := \phi_t$ est une isotopie de S et que l'image de γ_f est entièrement contenue dans U.

Maintenant, pour tout $f \in W' \subseteq U$ et pour tout temps $t \in I$ fixé, considérons le vecteur défini par la formule :

$$\xi_t(x) := \frac{\partial}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} \phi_{t+\tau}(x) = \frac{\partial}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} \gamma\big(x, f(x), t+\tau\big)\,.$$

Comme un tel vecteur est tangent à la variété S au point $\phi_t(x) = \gamma(x, f(x), t)$ et l'application ϕ_t étant un difféomorphisme (car $f \in W'$) alors, pour tout $t \in I$, l'application composée

$$\begin{array}{lcccccc} \zeta_t := \xi_t \circ \phi_t^{-1} & : & S & \to & S & \to & TS \\ & & x & \mapsto & \phi_t^{-1}(x) & \mapsto & \xi_t(\phi_t^{-1}(x)) \end{array}$$

détermine un champ de vecteurs tangent à S, défini en tout point $x \in S$.

D'autre part, comme $\zeta_t(x) = \xi_t(\phi_t^{-1}(x))$ on déduit immédiatement que

$$\zeta_t(\phi_t(x)) = \xi_t(x) = \frac{\partial}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} \phi_{t+\tau}(x) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(x,t)$$

ce qui montre que l'application $\phi : S \times I \to S$ est le flot du champ de vecteurs dépendant du temps $\zeta = \{\zeta_t\}_{t \times I} \in \Gamma^\infty(\pi_S^* TS)$, où l'on doit seulement rappeler que $\phi(x,0) = \phi_0(x) = 1_S(x) = x$ d'après les propriétés de l'appication γ.

Il est également immédiat de remarquer, que

$$\phi_1(x) = \phi(x,1) = \gamma(x, f(x), 1) = f(x) \quad \text{ i.e. } \quad \phi_1 = f\,,$$

de nouveau grâce aux propriétés de la famille de géodésiques γ.

Précision sur le choix du voisinage U de départ. Afin d'obtenir le voisinage B demandé dans l'énoncé du théorème, il faudra bien préciser le type de choix du voisinage U à considérer au départ. Une telle précision devient nécessaire car, afin de récupérer le plus possible de régularité pour chaque prolongement $f_{T_S} : T_S \to T_S$ de f ("étape 2"), il faut demander le plus possible de régularité aux applications $f \in U$.

Considérons alors une application lisse $\delta : S \to]0,1[$ qui se prolonge de manière lisse par $\delta = 0$ sur $\partial S := \overline{S} - S = \bigcup_{R<S} R$, avec les différentielles de tout ordre égales à 0 sur le bord ∂S de S.

Pour tout $l \geq 0$, le sous-ensemble de $Diff_0(S,S)$

$$B_\delta^l = B_\delta^l(1_S) = \Big\{ g \in Diff_0(S,S) \quad \Big| \quad d_l(j^l g(x), j^l 1_S(x)) < \delta(x)\ ,\ \forall x \in S \Big\}$$

est un voisinage de l'identité dans $C^\infty(S,S)$ (avec la C^l-topologie et donc) avec la C^∞-topologie [**GG**]. Pour ce choix convenable de la fonction δ, $\forall l \geq 0$, tout élément $f \in B_\delta^l$

est prolongeable par 1_S sur ∂S. De plus si $l \geq 1$, (*) une telle extension a sa différentielle prolongeable par l'identité sur ∂S : pour toute suite $\{x_n\}$ dans S telle que les limites suivantes existent, $\lim x_n = x \in X' \subseteq \partial S$ et $\lim_n T_{x_n} S = \tau$ on a aussi

$$\lim_n f_{*x_n} = id_\tau \,.$$

Rappelons que le champ de vecteurs dépendant du temps $\zeta := \{\zeta_t\}_t \in \Gamma^\infty(\pi_S^* TS)$ défini dans l'étape 1, avait été obtenu à partir d'un élément $f \in W'$ arbitraire (f était présent dans la définition de $\phi_t = G(f)_t$); donc ζ dépend de $f \in W'$ et nous le noterons $\zeta(f) = \{\zeta(f)_t\}_t$.

On trouve alors l'application :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = G' : W' \longrightarrow \Gamma^\infty(\pi_S^* TS) \quad , \quad G'(f) := \zeta(f) : S \times I \to \pi_S^* TS = TS \times I$$

continue et définie sur le voisinage W' de 1_S dans U et $Diff_0(S,S)$, **[Ma]**$_6$, **[DW]**.

D'autre part, Mather prouve (**[Ma]**$_6$ lemme 2 page 289, ou bien **[DW]** lemme 3.7.5) qu'il existe un voisinage O_S du champ constant zéro $\mathbf{0}$ dans $\Gamma^\infty(\pi_S^* TS)$ tel que tout champ dépendant du temps $\zeta \in O_S$ admette un flot $\beta = \beta(\zeta)$ définit pour tout temps $t \in I$:

$$\beta = \beta(\zeta) : S \times I \to S \qquad \text{tel que} \qquad \begin{cases} \beta(\zeta)_0 = 1_S \\ \text{et} \\ \beta(\zeta)_t \in Diff(S,S) \ , \ \forall\, t \in I \end{cases}$$

et de sorte que l'application

$$\theta_S : \Gamma^\infty(\pi_S^* TS) \to C^\infty(S \times I, S) \quad , \quad \theta_S(\zeta) := \beta(\zeta) \ : \ S \times I \longrightarrow S$$

soit continue.

Considérons maintenant un voisinage $B_\delta^l(\mathbf{0})$ du champ $\mathbf{0}$ dans $\Gamma^\infty(S)$ (du même type que $B_\delta^l(1_S)$ dans $Diff_0(S,S)$) et considérons un voisinage $\tilde{B}_\delta^l(\mathbf{0})$ de $\mathbf{0}$ dans $\Gamma^\infty(\pi_S^* TS)$ tel que $\forall\, \zeta = \{\zeta_t\}_{t \in I} \in \tilde{B}_\delta^l(\mathbf{0})$ on ait $\zeta_t \in B_\delta^l(\mathbf{0})$ pour tout $t \in I$ (lemme 3.4.9 **[DW]**).

Définissons alors le voisinage B demandé dans l'énoncé comme l'ensemble W'' obtenu à partir de $U = B_\delta^l(1_S)$ par

$$B := W''(U) := W''(B_\delta^l(1_S)) = {G'}^{-1}\big(O_S \cap \tilde{B}_\delta^l(\mathbf{0})\big).$$

Grâce à la continuité de $G' : W' \to \Gamma^\infty(\pi_S^* TS)$ et comme $G'(1_S) = \mathbf{0}$, alors d'après les propriétés de la famille de géodésiques γ, on obtient immédiatement que $B := {G'}^{-1}\big(O_S \cap \tilde{B}_\delta^l(\mathbf{0})\big)$ est un voisinage ouvert de 1_S dans $Diff_0(S,S)$ qui vérifie de plus $B \subseteq W' \subseteq B_\delta^l(1_S) =: U$.

En résumant, avec cette définition de B, on obtient alors, pour tout $f \in B$, les propriétés suivantes :

i) Comme $f \in B \subseteq B_\delta^l(1_S)$, f est alors prolongeable par 1_S sur ∂S et de plus une telle extension a sa différentielle prolongeable par l'identité sur ∂S : pour toute suite $\{x_n\}$

(*) Quand on considerera des stratifications (w)-régulières ou lipschitziennes il faudra prendre $l \geq 2$.

dans S telle que les limites suivantes existent, $\lim x_n = x \in X' \subseteq \partial S$ et $\lim_n T_{x_n} S = \tau$ on a aussi

$$\lim_n f_{*x_n} = id_\tau \, .$$

ii) Comme $f \in {G'}^{-1}\big(\tilde{B}^l_\delta(\mathbf{0})\big)$, le champ de vecteurs dépendant du temps $G'(f) = \zeta(f) = \{\zeta(f)_t\}_{t\in I}$ est alors tel que chaque champ de niveau $\zeta(f)_t : S \to TS$ se prolonge continuement par $\mathbf{0}$ sur ∂S ainsi que ses dérivées.

iii) Comme $f \in O_S$, le champ de vecteurs dépendant du temps $G'(f) = \zeta(f) = \{\zeta(f)_t\}_{t\in I}$ admet alors un flot $\beta(\zeta(f)) : S \times I \to S$ défini pour tout temps $t \in I$.

iv) Comme $f \in W'$, en notant $\beta(\zeta(f)) = \{\beta(\zeta(f))_t\}_t$ et $\phi_t := \beta(\zeta(f))_t$, on a alors $\phi_0 = 1_S$ et $\phi_1 = f$ (par construction, voir aussi [**Ma**]$_6$ lemme 1 page 289).

Etape 2 : Détermination d'une extension f_{T_S} de f aux strates de dimension $\geq k$ dans un voisinage tubulaire $T_S := \cup_{\dim X = k} T_X$ de S et extension "identique" sur ∂S.

Pour toute k-strate X de A, i.e. pour toute composante connexe X de S, considérons un voisinage tubulaire $T_X = T_X(1)$ de X dans A ; il est clair que les T_X peuvent être considérés deux à deux disjoints [**Ma**]$_1$.

Pour toute k-strate X notons alors $f_X : X \to X$ la restriction de f à X.

Comme $f \in B$ et $B \subseteq Diff_0(S,S)$, f préserve alors chaque composante connexe X de S, i.e. $f(X) = X$, et on peut donc écrire :

$$f \;=\; \bigcup_{\dim X = k} f_X \quad : \quad S = \bigcup_{\dim X = k} X \quad \longrightarrow \quad S = \bigcup_{\dim X = k} X$$

avec $f_X \in Diff(X,X)$ pour toute k-strate X de A.

Afin de prolonger $f : S \to S$ en un homéomorphisme stratifié $f_{T_S} : T_S \to T_S$, qui soit un difféomorphisme sur les strates de $T_S := \cup_{\dim X = k} T_X$, il suffira donc de définir un prolongement $f_{T_X} : T_X \to T_X$ de chaque f_X et ensuite de reconsidérer la réunion (disjointe) $f_{T_S} = \cup_X f_{T_X}$.

Considérons alors la famille de champ de vecteurs dépendant du temps

$$\frac{\partial G}{\partial t}(f) = G'(f) = \zeta(f) = \big\{\zeta(f)_t\big\}_{t\in I} \in \Gamma^\infty(\pi_S^* TS)$$

et remarquons que de même que $f = \cup_X f_X$, tout champ de vecteurs $\zeta(f)_t$ de S s'écrit comme une réunion disjointe du type $\zeta(f)_t = \cup_X \zeta(f)_{t\,X}$.

Soit $\zeta(f)_{T_S} := \{\zeta(f)_{t\,T_S}\}_{t\in I}$ le champ de vecteurs stratifiés dépendant du temps sur le voisinage tubulaire T_S de S obtenu comme relèvement contrôlé sur $T_S = \cup_X T_X$ de chaque champ de vecteurs $\zeta(f)_t$ de niveau $t \in I$ de S.

La stratification $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ étant (c)-régulière, on peut obtenir que chaque $\zeta(f)_{t\,T_S}$ soit de plus un relèvement continu du champ correspondant $\zeta(f)_t$ sur S.

Comme le champ de vecteurs dépendant du temps $\zeta(f)_{T_S}$ est un relèvement contrôlé du champ $\zeta(f)$ et comme $\zeta(f)$ admet un flot $\phi = \beta(\zeta(f)) : S \times I \to S$ défini pour tout $t \in I$ alors grâce à la proposition 1, $\zeta(f)_{T_S}$ admet également un flot défini pour tout $t \in I$, que nous notons $\phi_{T_S} = \beta(\zeta(f))_{T_S} : T_S \times I \to T_S$ et qui est de plus un prolongement continu de ϕ.

Alors pour tout $f \in B$, l'application

$$f_{T_S} := (\beta(\zeta(f))_{T_S})_1 = (\phi_{T_S})_1 : T_S \to T_S$$

prolonge l'application de départ $f : S \to S$.

De plus l'application $f \to f^{-1}$ [**Ma**]$_6$**,** [**DW**] étant continue, on peut supposer que B est tel que "$f \in B \Rightarrow f^{-1} \in B$. En considérant alors le champ de vecteurs dépendant du temps $\zeta(f^{-1})$, on obtient que $(f_{T_S})^{-1} = \beta(\zeta(f^{-1}))_1$ et donc f_{T_S} est un homéomorphisme stratifié, difféomorphisme sur les strates de T_S prolongeant f.

D'autre part, comme $f \in B$ alors on a $\zeta(f)_t \in B^l_\delta(\mathbf{0})$, $\forall\ t \in I$ et donc $\zeta(f)_{t\,T_S}$ se prolonge par $\mathbf{0}$ par continuité sur ∂S. On en déduit alors facilement que :

$$\lim_{z \to x' \in \partial S} f_{T_S}(z) = 1_{\partial S}(x')\,.$$

Etape 3 : Extension de la restriction $f_{T_S(\frac{1}{2})}$ sur l'intière A. Maintenant, dans le but d'obtenir un prolongement du difféomorphisme $f \in B$ sur l'intier A, nous allons déformer l'application $f_{T_S(1)}$ dans la partie $T_S(1) - \overline{T_S(\frac{1}{2})}$ de sorte à pouvoir l'étendre par l'identité dans $A - T_S(1)$ et sans la changer dans $T_S(\frac{1}{2})$.

Comme $f_{T_S(1)}$ est définie par la famille de champs de vecteurs dépendant du temps $\{\beta(\zeta(f))_{t\,T_S}\}_{t\in I}$, modifions chacun des champs relevés contrôlés $\zeta(f)_{t\,T_S}$ de la manière suivante.

Notons $\zeta(f)_{t\,T_S} = \cup_{\dim X = k}\zeta(f)_{t\,T_X}$, considérons g une fonction réelle lisse g :

$$g : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad , \qquad g(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \leq \frac{1}{2}; \\ \\ 0 & \text{si } s \geq \frac{3}{4} \end{cases}$$

et modifions (seulement) le module du champ de vecteurs dépendant du temps $\zeta(f)_{T_S}$ en le réduisant par la fonction g.

De cette manière, on obtient le nouveau champ de vecteurs

$$\widetilde{\zeta(f)}_{T_X}(x) := g(\rho_X(x)) \cdot \zeta(f)_{T_X}(x)$$

qui vérifie

$$\widetilde{\zeta(f)}_{T_X} = \begin{cases} \zeta(f)_{T_X} & \text{si} \quad \rho_X(x) \leq \frac{1}{2}, \\ \\ 0 & \text{si} \quad \rho_X(x) \geq \frac{3}{4} \end{cases}$$

et qui est donc contrôlé, car $\zeta(f)_{T_X}$ l'est dans le voisinage $T_X(\frac{1}{2})$.

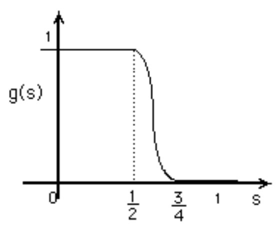

Figure 1

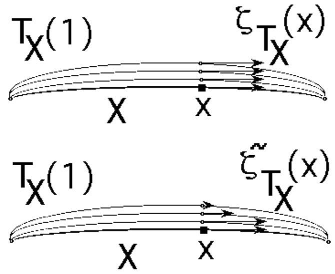

Figure 2

D'autre part, il n'est pas difficile de vérifier que le flot $\tilde{\phi}_{T_X}$ du champ dépendant du temps $\widetilde{\zeta(f)}_{T_X}$ s'obtient à partir du flot ϕ_{T_X} de $\zeta(f)_{T_X}$ par la formule :

$$\tilde{\phi}_{T_X}(z,t) := \phi_{T_X}\big(z, g(\rho_X(z)) \cdot t)\big)$$

d'où l'on déduit que $\tilde{\phi}_{T_X}$ est défini pour tout temps $t \in I$ et qu'il est un homéomorphisme stratifié difféomorphisme sur les strates de $T_S = \cup_X T_X(1)$ pour lequel les propriétés analogues de régularité de ϕ_{T_X} restent valables.

Comme les voisinages de la famille $\{T_X\}_{\dim X=k}$ peuvent alors être supposés deux à deux disjoints $[\mathbf{Ma}]_1$, nous pouvons considérer le champ dépendant du temps global sur la stratification A toute entière défini par :

$$\zeta(f)_A(z) = \begin{cases} \widetilde{\zeta(f)}_{T_X}(z) & \text{si } z \in \displaystyle\bigcup_{\dim X=k} T_X(1) \\ & \\ 0 & \text{si } z \in A - \displaystyle\bigcup_{\dim X=k} T_X(1)\,. \end{cases}$$

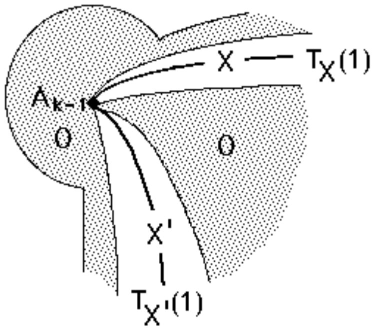

Figure 3

Le champ de vecteurs dépendant du temps $\zeta(f)_A$ a évidemment un flot $\beta(\zeta(f)_A)$: $A \times I \to A$, definit pour tout $t \in I$, qui prolonge le flot $\tilde{\phi}_{T_X}$ de $\widetilde{\zeta(f)}_{T_X}$ par l'identité hors de $T_X(1)$.

Alors l'extension finale $\tilde{f} : A \to A$ de $f : S \to S$, $f \in B$, s'obtient en considérant l'application au temps $t = 1$, $\tilde{f} := \beta(\zeta(f)_A)_1$ et en remarquant que les propriétées de régularité demandées pour $\tilde{f}$ se déduisent immédiatement car elles sont vérifiées pour tout X, par la restriction $\tilde{f}_{|T_X} = \tilde{\phi}_{T_X} : T_X \to T_X$ flot au temps $t = 1$ du champ dépendant du temps $\widetilde{\zeta(f)}_{T_X}$. $\square$

Theoreme 2. *Le théorème d'extension forte est encore valable si au lieu d'une stratification* (c)*-régulière on considére un E.S.A. ou bien des stratifications* (w)*-régulières ou bien lipschtziennes.*

Preuve. Rappelons que dans le théorème 1, pour des stratifications (c)-régulières, l'extension $\tilde{f}$ de f s'obtenait en relevant le champ de vecteurs dépendant du temps $\cup_X \zeta(f)_X$ ($X = k$-strate) en un champ dépendant du temps $\zeta(f)_{T_S} = \cup_X \zeta(f)_{T_X}$ puis en changeant le module de ce dernier pour obtenir un champ $\widetilde{\zeta(f)}_{T_S} := \cup_X \widetilde{\zeta(f)}_{T_X}$ qui se prolongeait par 0 en le champ final $\zeta(f)_A$ sur A.

Dans ce cas là, chaque T_X était un tube d'un S.D.C. et chaque $\zeta(f)_{T_X}$ un relèvement continu contrôlé, de sorte que la condition de contrôle sur le champ relevé assurait la continuité du flot relevé.

Si $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ est un E.S.A. il suffit alors de considérer un plongement (b)-régulièr de $\mathcal{X}$ dans un espace Euclidien $\mathbb{R}^m$ **[Te]** et de remarquer que la (b)-régularité d'une stratification implique la (c)-régularité.

D'autre part, si A est (w)-régulier (resp. lipschitzien) alors A n'admet pas nécessairement (*a priori*) une structure d'E.S.A.; nous ne disposons pas alors d'un S.D.C. et la condition de contrôle n'a plus de sens.

Cependant, si A est (w)-régulier (resp. lipschitzien), il existe un relèvement stratifié $\cup_X \zeta(f)_{T_X}$ du champ $\zeta(f) = \cup_X \zeta(f)_X$ qui est rugueux **[Ve]** (resp. lipschitzien **[Pa]**) et avec lequel on trouve à nouveau la continuité du flot relevé qu'on obtient de plus rugueux (resp. lipschitzien). La seule différence par rapport au théorème 1 est que, cette fois, chaque T_X constitue un voisinage de la strate X dans A au lieu d'un voisinage tubulaire d'un S.D.C..

La détermination du champ de vecteurs $\cup_X \widetilde{\zeta(f)}_{T_X}$ à partir de $\cup_X \zeta(f)_{T_X}$ et l'extension finale $\zeta(f)_A$ sur A s'obtiennent alors de la même manière que dans le théorème précédent, en considérant cette fois des fonctions distance ρ_X lisses arbitraires et des voisinages T_X dans A des strates X (de dimension k), deux à deux disjoints. $\square$

Remarque. A partir du théorème d'extension on peut de plus déduire que si A est plongé dans une variété ambiante M l'extension s'obtient alors sur M toute entière.

§3. Le Théorème de Transversalité.

Rappelons qu'une *stratification* d'un espace A est la donnée d'une partition localement finie Σ en variétés lisses (au moins C^1) connexes (les strates), à laquelle on demande habituellement (mais pas nécessairement) de vérifier la *condition de frontière.* Nous appelons alors le couple $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un *espace stratifié.*

D'autres conditions de régularité : être un *ensemble stratifié abstrait (E.S.A.)* (cas non nécessairement plongé), ou vérifier les *conditions* (a) ou (b) *e Whitney*, (c) *de Bekka*, (w) *de Verdier* ou *lipschitzienne de Mostowski* (dans le cas plongé), peuvent être démandées à la stratification Σ selon les nécessités et les buts poursuivis.

Par analogie avec la définition des *objets sous-stratifiés de Whitney de* $\mathcal{X}$, donnée par Goresky **[Go]**$_2$ dans le cas où $\mathcal{V}$ et $\mathcal{X}$ sont des stratifications (b)-régulières, nous donnons, pour un espace stratifié arbitraire $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ (abstrait ou non) la définition suivante, où *"(E)-régulier"* désignera une condition quelconque de régularité citée au dessus.

Definition 1. Soit $V \subseteq A$ un sous-ensemble fermé de A. Un *objet sous-stratifié (O.S.S.) de* $\mathcal{X}$ *((E)-régulier)*, est la donnée d'un espace stratifié $\mathcal{V} = (V, \Sigma_{\mathcal{V}})$ dont la stratification $\Sigma_{\mathcal{V}}$ ((E)-régulière) est compatible avec la stratification Σ de $\mathcal{X}$, i.e. : $V \subseteq A$ et de plus chaque strate R de $\mathcal{V}$ est contenue dans une unique strate $S = S_R$ de $\mathcal{X}$.

Si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{V}$ sont tous les deux des E.S.A. alors on peut dire aussi que $\mathcal{V}$ est un *sous-ensemble stratifié abstrait (sous-E.S.A.)* de $\mathcal{X}$.

Remarquons que si $\mathcal{V}$ est un O.S.S. de $\mathcal{X}$, l'application d'inclusion $I : \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{X}$ est une application stratifiée, et que pour toute strate S de $\mathcal{X}$, le sous-ensemble $V \cap S$ est un fermé de S muni de la stratification induite $\mathcal{V}_S := \{R \in \mathcal{V} \mid R \subseteq S\}$, que nous appellerons *la restriction de* $\mathcal{V}$ *à la strate* S *de* $\mathcal{X}$.

A partir de maintenant, et dans toute la suite, toutes les fois qu'il n'y aura pas d'ambiguité, nous sous-entendrons les stratifications des O.S.S. de $\mathcal{X}$ que nous considèrerons. En particulier, pour dire que $\mathcal{V}$ est O.S.S. de $\mathcal{X}$ nous dirons plus simplement que V est un O.S.S. de $\mathcal{X}$ (ou de A) en sous-entendant que V est donné avec une stratification $\mathcal{V}$ et dans le cas des E.S.A. donné avec un système de données de contrôle (S.D.C.) [**Ma**]$_1$ fixé. De même nous noterons par A_k et V_k les squelettes $\mathcal{X}_k$ et $\mathcal{V}_k$ de dimension k de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{V}$ (avec la stratification induite).

Definition 2. Soit $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un espace stratifié (abstrait ou non). Une *isotopie stratifiée* de $\mathcal{X}$ (ou de A) est la donnée d'une application

$$\Phi : A \times \mathbb{R} \to A \qquad \text{notée aussi} \qquad \{\, \Phi_t : A \to A \,\}_{t \in \mathbb{R}}$$

telle que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, l'application *au temps* t, $\Phi_t : A \to A$ est un homéomorphisme stratifié de A dont la restriction à toute strate S de A est un difféomorphisme $\Phi_{t\,S} : S \to S$ de S. Evidemment si $\{\Phi_t\}_t$ et $\{\Psi_t\}_t$ sont des isotopies stratifiées de $\mathcal{X}$ alors l'application composée $\{\Psi_t \circ \Phi_t\}_t$ l'est aussi.

Definition 3. Soient W et W' deux O.S.S. d'un espace stratifié $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$. Nous dirons que *$W'$ est une déformation par isotopie de W dans A*, s'il existe une isotopie stratifiée $\Phi : A \times \mathbb{R} \to A$ telle que $\Phi_0 = 1_A$ et W' coïncide avec le sous-ensemble de A *déformé au temps* $t = 1$ de W, i.e. $W' = \Phi_1(W)$. Nous notons alors $W \overset{\Phi_t}{\equiv} W'$ ou de façon équivalente $\Phi_t : W \equiv W'$.

Remarque 1. *La relation de "déformation par isotopie" est une équivalence dans l'ensemble des O.S.S. de $\mathcal{X}$.*

Preuve. En fait, on a immédiatement :

i) $W \overset{1_A t}{\equiv} W$;

ii) $W \overset{\Phi_t}{\equiv} W' \iff W' \overset{\Phi_t^{-1}}{\equiv} W$;

iii) $W \overset{\Phi_t}{\equiv} W'$ et $W' \overset{\Psi_t}{\equiv} W'' \quad \Longrightarrow \quad W \overset{\Psi_t \Phi_t}{\equiv} W''$. □

Proposition 1. *Si $\Phi : A \times \mathbb{R} \to A$ est une isotopie stratifiée de $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ et W est un O.S.S. de $\mathcal{X}$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'ensemble image $W' := \Phi_t(W)$ avec la stratification induite par Φ_t l'est également et est une déformation par isotopie de W.*

Preuve. C'est élémentaire. Nous remarquons juste que dans le cas des E.S.A., si

$$\mathcal{F}_W = \{(T_{W_\alpha}, \pi_{W_\alpha}, \rho_{W_\alpha})\}_{W_\alpha \in \Sigma_{\mathcal{W}}} \qquad , \qquad \begin{cases} \pi_{W_\alpha} : T_{W_\alpha} \to W_\alpha \\ \\ \rho_{W_\alpha} : T_{W_\alpha} \to \mathbb{R} \end{cases}$$

est un S.D.C. pour l'E.S.A. $W = \cup_\alpha W_\alpha$ alors

$$\Phi_{t*}(\mathcal{F}) := \Big\{ \big(\Phi_t(T_{W_\alpha}), \Phi_t\, \pi_{W_\alpha} \Phi_t^{-1}\,,\ \rho_{W_\alpha} \Phi_t^{-1}\big) \Big\}_{\Phi_t(W_\alpha) \subseteq W'}$$

est un S.D.C. pour $W' = \cup_\alpha \Phi_t(W_\alpha)$ car toutes les propriétés topologiques $(A_1), \ldots, (A_7)$ et (A_9) [**Ma**]$_1$ se préservent via l'homéomorphisme $\Phi_t : A \to A$ et la propriété de submersivité (A_8) se préserve via les difféomorphismes $\{\Phi_t : S \to S\}_S$ (S strate de A).

Donc si W est un sous-E.S.A. de $\mathcal{X}$ alors $W' = \Phi_1(W)$ l'est aussi. □

Definition 4. Pour tout $k \leq \dim X$ considérons le k-squelette A_k de A. Deux O.S.S. V et W de A sont dits *transversaux dans* A_k si pour toute strate S de A_k les restrictions $\mathcal{V}_S$ et $\mathcal{W}_S$ sont transversales dans la variété lisse S.

Soulignons clairement qu'il n' y a aucune raison *a priori* pour qu'une isotopie stratifiée de A puisse préserver l'une des conditions de (E) régularité pour les O.S.S. de $\mathcal{X}$ sinon celle d' "être un sous-E.S.A. de $\mathcal{X}$". Nous nous occuperons de ce problème délicat au §4.

Lemme. *Soient P, Q deux sous-variétés lisses d'une variété S et f un difféomorphisme de S. Si le graphe Γf de f est transverse à $P \times Q$ dans $S \times S$ alors la restriction $f_P : P \to S$ est transverse à Q.*

Preuve. L'espace tangent à Γf est justement le graphe de l'application linéaire tangente $f_* : TS \to TS$, donc pour tout $p \in P$ tel que le point image $q = f(p) \in Q$ on a

$$T_{(p,q)}\,\Gamma f = Graphe(f_{*p})$$

et d'autre part, comme par hypothèse Γf est transverse à $P \times Q$ on a aussi

$$T_pP \times T_qQ \quad + \quad \Big\{ \big(v, f_{*p}(v)\big) \quad | \quad v \in T_pS \Big\} \;\supseteq\; T_pS \times T_{f(p)}S\,.$$

Donc, si $u \in T_qS$ est un vecteur arbitraire, le vecteur $(0,u) \in T_pS \times T_qS$ est alors de la forme

$$(0,u) = (a,b) + (v, f_{*p}(v)) = (a+v, b+f_{*p}(v))$$

avec $a \in T_pP$, $b \in T_qQ$ et $v \in T_pS$.

En particulier on trouve que $v = -a$ et donc

$$u = b + f_{*p}(v) \;\in\; T_{f(p)}Q \;+\; f_{*p}(T_pP).$$

Comme $u \in T_qS$ était un vecteur arbitraire, cela veut dire que la fonction restriction $f_P : P \to S$ est transverse à Q. $\square$

3.1 : Le théorème de transversalité. Cas des ensembles stratifiés abstraits.

Le théorème 1 ci-dessous est l'analogue du théorème de transversalité de Goresky (*Transversality Lemma 5.3.* $[\mathbf{Go}]_2$) donné pour un O.S.S. W de $\mathcal{X}$ en considérant une inclusion stratifiée $i : V \to \mathcal{X}$.

Dans cette section nous le démontrons sous l'hypothèse que l'espace stratifié ambiant $\mathcal{X}$ soit un E.S.A. en rappelant, d'autre part, qu'une telle catégorie contient les stratifications (b) et (c) régulières (resp. $[\mathbf{Ma}]_1$ et $[\mathbf{Be}]_1$). Ensuite, à la section 3.2 nous considèrerons le cas où $\mathcal{X}$ a une régularité du type (w) de Verdier ou bien lipschitzienne.

Enfin, une vérsion plus (générale et) donnant la transversalité de W par rapport à une application stratifiée, sera démontrée en conclusion du paragraphe à la section §3.3.

A propos du théorème 1 qui suit, c'est le cas de souligner que les O.S.S. de $\mathcal{X}$ considérés sont complètement généraux : nous ne faisons aucune hypothèse sur leur type de régularité, car nous étudierons ce problème au §4.

Theoreme 1 (de Transversalite-Isotopie). *Soit $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un E.S.A. et V un O.S.S. de A. Alors pour tout O.S.S. W de A, on peut construire une déformation par isotopie W' de W transverse à V (dans A).*

De plus, pour tout voisinage ouvert U de W dans A on peut obtenir $W' \subseteq U$.

Preuve. Prouvons par récurrence sur la dimension $k \leq n$ du squelette A_k de A qu'il est possible de construire une chaîne de n déformations par isotopie des O.S.S. de A

$$W(0) \overset{\Psi^1}{\equiv} W(1) \overset{\Psi^2}{\equiv} \cdots \overset{\Psi^n}{\equiv} W(n)$$

telles que chaque $W(k)$ soit transverse à V dans A_k pour $k = 0, \ldots, n$.

Pour $k = 0$, on choisit $W(0) = W$. Soit donc $k > 0$ et supposons construite la chaîne de déformations par isotopie $W(0) \overset{\Psi^1}{\equiv} W(1) \overset{\Psi^2}{\equiv} \cdots \overset{\Psi^{k-1}}{\equiv} W(k-1)$.

Par hypothèse de récurrence, $W(k-1)$ est transverse à V dans A_{k-1}, donc on peut définir la partie de $W(k)$ contenue dans A_{k-1} précisément par

$$W(k) \cap A_{k-1} := W(k-1) \cap A_{k-1}.$$

Nous complèterons la construction de $W(k)$ en deux étapes:

Etape 1. Construction de $W(k) \cap [A_k - A_{k-1}]$. Soit $S = A_k - A_{k-1}$, la variété lisse de dimension k réunion de toutes les k-strates de A. Nous allons déterminer un difféomorphisme $f : S \to S$ qui déforme les strates de $W(k-1) \cap S$ en les mettant en position transverse à $V \cap S$.

Notons $\{W_\alpha\}$ et $\{V_\beta\}$ les familles des strates des restrictions $W(k-1) \cap S$ et $V \cap S$.

Considérons l'espace $C^\infty(S, S)$ des applications lisses muni de la topologie fine de Whitney, qui est un espace de Baire, et pour lequel nous adopterons les notations et les définitions de [**GG**]. Alors pour tous α, β l'ensemble

$$T_{W_\alpha \times V_\beta} = \left\{ f \in C^\infty(S,S) \;\middle|\; j^0 f \text{ est transverse à } W_\alpha \times V_\beta \right\} =$$

$$\left\{ f \in C^\infty(S,S) \;\middle|\; \Gamma f \text{ est transverse à } W_\alpha \times V_\beta \text{ dans } S \times S \right\},$$

où $\Gamma f = \text{Graphe} f$, est une intersection dénombrable d'ensembles ouverts et denses dans $C^\infty(S, S)$ ([**GG**], page 54 théorème 4.9).

Comme $\{W_\alpha \times V_\beta\}$ est au plus dénombrable, l'ensemble

$$T = \bigcap_{\substack{W_\alpha \subseteq W(k-1) \cap S \\ V_\beta \subseteq V \cap S}} T_{W_\alpha \times V_\beta} = \left\{ f \in C^\infty(S,S) \;\middle|\; \Gamma f \text{ transverse à } W(k-1) \times V \text{ dans } S \times S \right\}$$

est encore une intersection dénombrable d'ensembles ouverts denses de $C^\infty(S, S)$ et donc T est dense dans $C^\infty(S, S)$.

Considérons alors un voisinage B de 1_S dans $Diff_0(S, S)$ comme celui obtenu dans le théorème d'extension stratifié (forte).

Alors, par densité de T, l'intersection $B \cap T \neq \emptyset$ est non vide et on peut choisir un difféomorphisme $f^k \in B \cap T$, notons $f^k = f$, de sorte que l'égalité

$$f_{*p}(T_p W_\alpha) = T_{f(p)}\, f(W_\alpha)$$

et le lemme assurent que $f(W_\alpha)$ est transverse à V_β pour tout α, β. I.e.

$$f(W(k-1) \cap S) \quad \text{est transverse à} \quad V \cap S\,,$$

et donc nous concluons l'*étape 1* en définissant

$$W(k) \cap S := f(W(k-1) \cap S).$$

Etape 2. Construction de $W(k) \cap [A - A_k]$. Soulignons que, dans cette étape, par notre stratégie de démonstration, nous n'avons besoin d'obtenir aucune condition de transversalité entre les "continuations" $W(k) \cap [A - A_k]$ et $V \cap [A - A_k]$ de $W(k)$ et V dans $A - A_k$.

Comme $f \in B$, grâce au théorème d'extension stratifée, alors f se prolonge en un homéomorphisme stratifié $\tilde{f} : A \to A$ difféomorphisme sur chaque strate de A, qui est l'identité sur A_{k-1}.

Alors nous pouvons conclure l'*étape 2* en définissant

$$W(k) := \tilde{f}(W(k-1)).$$

Conclusion de la preuve du théorème. Grâce au théorème d'extension stratifiée on a $\tilde{f} := \Phi_1$ où $\Phi : A \times I \to A$ est une isotopie stratifiée (vérifiant de plus que $\Phi_t \in B$, $\forall\, t$). Comme Φ est relative à la k-ème étape de récurrence notons $\Phi = \Phi^k$.

Rappelons que car par construction on a

$$\Phi_1^k = \tilde{f} \qquad , \qquad \Phi_{1|S}^k = f \qquad , \qquad \Phi_{1|A_{k-1}}^k = id_{A_{k-1}}$$

et donc on a aussi :

$$W(k) := W(k-1) \cap A_{k-1} \bigcup f\Big(W(k-1) \cap S\Big) \bigcup \Phi_1^k\Big(W(k-1) \cap (A - A_k)\Big).$$

Alors $W(k)$ est transverse à V dans A_{k-1}, car il coïncide avec $W(k-1)$ et de plus il est transverse à V dans $S = A_k - A_{k-1}$ par le choix du difféomorphisme transversalisant $f : S \to S$ dans l'*étape 1.*

D'un autre coté, comme $W(k) = \Phi_1^k(W(k-1))$, on obtient immédiatement par la proposition précédente que $W(k)$ est un O.S.S. de A et de plus qu'il est une déformation par isotopie, $W(k-1) \overset{\Phi_t^k}{\equiv} W(k)$ de $W(k-1)$.

Alors, la "déformation par isotopie" étant une relation d'équivalence, on conclut la démonstration du théorème en définissant $W' := W(n)$. $\square$

Remarque 1. La déformation par isotopie *finale* $\Phi_t : W \equiv W'$ telle que $\Phi_1(W)$ soit transverse à V dans A, s'obtient de la manière suivante : l'application $\Phi_t : A \to A$ est la composition $\Phi_t := \Phi_t^n \circ \cdots \circ \Phi_t^1$, où pour tout $k = 1, \ldots n$, Φ_t^k est *l'isotopie transversalisante dans* $S = A_k - A_{k-1}$, construite (dans l'étape 2) à la k-ème étape de la récurrence. $\square$

Remarque 2. L'application transversalisante $f : S \to S$, $f = f^k \in B \cap T$ (par dénsité de T), peut être choisie aussi proche de l'identité $1_S = 1_{[A_k - A_{k-1}]}$ que l'on veut, ainsi que toutes ses dérivées. De plus, nous avons fait un choix pour lequel le germe de f tend vers $1_{\partial S}$ ainsi que toutes ses dérivées de tout ordre quand $x \to \partial S$.

En précisant de manière ultérieure le choix du voisinage B (de la fonction $\delta : S \to [0,1[$) dans le théorème d'extension, on peut demander de plus que l'ordre avec lequel toutes les dérivées de f tendent vers 0 soit arbitrairement grand.

On en déduit alors en particulier que *"W' peut être construit dans un voisinage U de W dans A arbitrairement petit"*.

Remarque 3. Le difféomorphisme $f = f^k : S \to S$, *transversalisant* dans $S = A_k - A_{k-1}$, s'obtient comme le flot au temps $t = 1$ d'un champ de vecteurs dépendant du temps.

En général, il n'y a aucune raison pour que f puisse être choisit comme un élément de $Exp(S)$, i.e. comme le flot au temps $t = 1$ d'un champ de vecteurs *qui ne depend pas du temps* [**Fr**].

C'est exactement pour surmonter cette difficulté que nous avons dû écrire le *théorème d'extension* en corrigeant en même temps une imprécision dans la preuve du *Transversality Lemma* de M. Goresky [**Go**]$_2$. Il est clair d'autre part que notre démonstration s'inspire beaucoup du théorème de Goresky.

3.2 : Le théorème de transversalité. Cas (w)-régulier et lipschitzien.

Le théorème 1, de mise en position générale pour des O.S.S., a été démontré sous l'hypothèse que $\mathcal{X}$ soit un E.S.A., qui par définition est muni d'un S.D.C. Le théorème reste donc en particulier valable pour les stratifications (b)-régulières [**Ma**]$_1$ et (c)-régulières [**Be**]$_{1,3}$.

Dans le cas des stratifications (w)-régulières et lipschitziennes, le type de régularité permet d'obtenir de *bonnes* propriétés de régularité de relèvement des champs de vecteurs, lesquelles caractérisent la régularité de la stratification [**BT**] et [**Pa**]. On obtient ainsi d'autres théorèmes importants comme le *premier théorème d'isotopie de Thom* [**Ve**], [**Pa**] et ceci sans utiliser de S.D.C.

Donc, pour ces types de stratifications plongés dans $\mathbb{R}^m$ (ou bien dans une variété au moins C^2), on ne dispose pas en général d'un S.D.C. et l'énoncé du théorème de transversalité précédent ne s'applique pas convenablement. Cependant, notre démonstration est plus générale que son énoncé et s'adapte, avec une petite modification, au cas de ces dernières stratifications qui ne sont pas nécessairement(*) structurées par un S.D.C.

Theoreme 2. *Soit $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un espace stratifié (w)-régulier ou bien lipschitzien et soit V un O.S.S. de A. Alors pour tout O.S.S. W de A, il existe une déformation par isotopie W' de W transverse à V dans A.*

De plus, pour tout voisinage ouvert U de W dans A on peut obtenir $W' \subseteq U$.

Preuve. La preuve est contenue presque entièrement dans le théorème 1. Considérons en fait la même démonstration que celle du théorème précédent jusqu'à l'*étape 2*. A l'*étape 2*, pour définir la continuation $W(k) \cap (A - A_k)$, on doit prolonger le difféomorphisme $f : S \to S$ aux strates supérieures en un homéomorphisme stratifié lisse sur les strates et cela est possible car le théorème d'extension reste valable pour des stratifications (w)-régulières ou bien lipschitziennes (théorème 2, §2.2). $\square$

(*) Par exemple si A est (w)-régulier avec toutes les strates analytiques alors A admet un S.D.C., car dans ce cas il est de plus (b)-régulier [**Tr**], d'après T.C. Kuo [**Kuo**].

Remarque 1. Il est clair que les propriétés citées dans les remarques 1, 2 et 3 de la section précédente restent encore valables pour des stratifications (w)-régulières et lipschitziennes.

Nous concluons cette section en laissant un problème ouvert concernant une possible amélioration du théorème de transversalité stratifiée.

Problème. *"Peut-on déterminer la déformation W' de W de sorte que $W' \cup V$ ait une stratification naturelle ?"*

Nous ne connaissons pas la réponse à cette question. Donc nous nous limitons à souligner ce qui nous semble constituer les principales difficultés :

i) Déterminer la déformation W' de W (transverse à V) de sorte que pour tout couple de strates W'_α, V_β respectivement de W' et V, l'intersection $W'_\alpha \cap V_\beta$ soit localement finie dans $W' \cup V$. Dans ce cas en notant pour tout ensemble H *"c.c.(H) := la famille des composantes connexes de H"* on trouve que la famille réunion

$$\Sigma_{W' \cup V} := \bigcup_{\substack{W'_\alpha \subseteq W' \\ V_\beta \subseteq W}} c.c.(W'_\alpha - V_\beta) \bigcup c.c.(V_\beta - W'_\alpha) \bigcup c.c.(W'_\alpha \cap V_\beta)$$

est une partition localement finie en variétés connexes de $W' \cup V$.

ii) Déterminer un raffinement de la partition $\Sigma_{W' \cup V}$ afin que la condition de frontière soit vérifiée.

Les figures 1 et 2, au §4 chapitre IV, montrent des exemples simples de deux O.S.S. V et W transversaux dans $\mathcal{X}$ pour lesquels les difficultés *i)* et *ii)* ci-dessus précisées se présentent.

3.3 : Le théorème de transversalité. Transversalité d'applications stratifiées.

Dans cette section, nous donnons le résultat de transversalité le plus général du chapitre qui permet comme corollaire d'obtenir un théorème analogue au *Transversality Lemma* de Goresky **[Go]**$_3$.

Rappelons alors le théorème de Goresky qui a inspiré le travail dans ce chapitre:

Transversality lemma. (Goresky 1981). *Soient $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ deux stratifications (b)-régulières contenues respectivement dans les variétés M_1 et M_2. Fixons deux S.D.C., $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ respectivement de $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ et soit $f : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ une application stratifiée. Supposons que l'une des deux hypothèses suivantes (au moins) soit vérifiée :*

i) f est contrôlée par rapport à $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$;

ii) f est la restriction d'une application lisse $\tilde{f} : M_1 \to M_2$.

Alors pour tout O.S.S. W de $\mathcal{X}_2$ vérifiant la condition de π-fibre et (b)-régulier, il existe une déformation par isotopie W' de W, vérifiant la condition de π-fibre, (b)-régulière et telle que W' soit transverse à f. $\square$

Le théorème de transversalité que nous allons démontrer concerne la déformation d'une application stratifiée $h : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ afin de la rendre transverse à une autre application stratifiée $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ fixée au départ.

Nous devons d'abord introduire quelques définitions et remarques et ensuite démontrer les lemmes 1 et 2 qui les suivent.

Definition 1. Pour tout couple d'espaces stratifiés $\mathcal{Y}, \mathcal{X}$ notons

$$\mathcal{MS}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) = \{ h : \mathcal{Y} \to \mathcal{X} \mid h \text{ est stratifiée } \}$$

l'ensemble des applications stratifiées entre $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}$.

Soient $h, h' : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ deux éléments de $\mathcal{MS}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$. Nous dirons que h' *est une déformation par isotopie de* h *dans* $\mathcal{X}$ s'il existe une isotopie stratifiée $\Phi : \mathcal{X} \times \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ telle que $\Phi_0 = 1_{\mathcal{X}}$ et $h' = \Phi_1 \circ h$ soit la *déformée au temps* $t = 1$ de h. On note alors $h \overset{\Phi_t}{\equiv} h'$.

Remarque 1. *La relation de "déformation par isotopie dans* $\mathcal{X}$*" est une équivalence dans* $\mathcal{MS}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$.

Preuve. C'est immédiate car évidemment on a : i) $h \overset{1_{A\,t}}{\equiv} h$; ii) $h \overset{\Phi_t}{\equiv} h' \Leftrightarrow h' \overset{\Phi_t^{-1}}{\equiv} h$ et iii) $(h \overset{\Phi_t}{\equiv} h') + (h' \overset{\Psi_t}{\equiv} h'') \Rightarrow (h \overset{\Psi_t \Phi_t}{\equiv} h'')$. $\square$

Remarque 2. *Si* $\Phi : A \times \mathbb{R} \to A$ *est une isotopie stratifiée de* $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ *et* $h \in \mathcal{MS}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ *alors pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *l'application* $h_t := \Phi_t \circ h \in \mathcal{MS}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ *, et* h_t *est une déformation par isotopie de* h *dans* $\mathcal{X}$.

Preuve. C'est élémentaire. $\square$

Definition 2. Pour toute application $h \in \mathcal{MS}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ et pour toute strate S de $\mathcal{X}$ notons h_S la restriction $h_{|h^{-1}(S)} : h^{-1}(S) \to S$ et adoptons la même notation $h_B := h_{|h^{-1}(B)}$ pour tout sous-ensemble B de $\mathcal{X}$ qui est une réunion de strates de $\mathcal{X}$.

Etant données deux applications $h, g \in \mathcal{MS}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ et un entier $k \leq \dim X$, nous dirons que h *et* g *sont transverses dans le* k*-squelette* $\mathcal{X}_k$ *(ou* A_k*) de* $\mathcal{X}$ ssi pour toute strate S de $\mathcal{X}_k$ les restrictions h_S et g_S sont transverses dans la variété lisse S, i.e. : si pour toute couple de strates P et Q de $\mathcal{Y}$ telles que $h(P) \subseteq S$ et $g(Q) \subseteq S$, les restrictions $h_P : P \to S$ et $g_Q : Q \to S$ sont transverses.

Lemme 1. *Soient* S *une variété lisse,* $f \in C^1(S, S)$ *et* $h : P \to S$ *et* $g : Q \to S$ *deux application* C^1 *définies sur deux variétés* P *et* Q *et à valeurs dans* S.

Si le graphe Γf *de* f *est transverse à* $(h \times g) : P \times Q \to S \times S$ *alors la restriction* $[f \circ h]_P : P \to S$ *est transverse à* $g : Q \to S$.

Preuve. Rappelons que $[f \circ h]_P : P \to S$ est transverse à $g : Q \to S$ ssi pour tout couple de point $(p, q) \in P \times Q$ tel que $[f \circ h](p) = g(q)$ on a :

$$(1) \;:\; f_{*h(p)}\big(h_{*p}(T_p P)\big) + g_{*q}(T_q Q) = T_s S \qquad \text{où} \qquad s := f(h(p)) = g(q)\,.$$

Fixons alors un couple de point $(p, q) \in P \times Q$ tel que $[f \circ h](p) = g(q)$ et notons $s := f(h(p)) = g(q)$. Alors on a tout de suite

$$\begin{cases} \big(h(p), s\big) = \Big(h(p), f\big(h(p)\big)\Big) \in \Gamma f \\ \\ \big(h(p), s\big) = \big(h(p), g(q)\big) \in Imm\,\big(h \times g\big) \end{cases} \qquad \text{et donc :} \quad \big(h(p), s\big) \in \Gamma f \cap Imm\,(i \times g)\,.$$

Comme Γf est par hypothèse transverse à $h \times g : P \times Q \to S \times S$ on trouve alors

$$(h \times g)_{*(p,q)}\big(T_{(p,q)} P \times Q\big) \;+\; T_{(h(p),s)}\,\Gamma f \quad \supseteq \quad T_{(h(p),s)} S \times S$$

et en rappelant que $T_{(h(p),s)}\,\Gamma f = Graphe(f_{*h(p)})$ on obtient ainsi :

$$h_{*p}(T_p P) \times g_{*q}(T_q Q) \quad + \quad \Big\{ \Big(v, f_{*h(p)}(v)\Big) \quad \Big| \quad v \in T_p S \;\Big\} \;\supseteq\; T_p S \times T_s S\,.$$

Fixons alors un vecteur $u \in T_sS$. Le vecteur $(0,u) \in T_pS \times T_sS$ peut donc s'écrire sous la forme

$$(0,u) = (a,b) + \Big(v, f_{*h(p)}(v)\Big) = \Big(a+v, b+f_{*h(p)}(v)\Big)$$

avec $a \in h_{*p}(T_pP)$, $b \in g_{*q}(T_qQ)$ et $v \in T_sS$.

D'autre part de $a+v=0$ on trouve $v=-a \in h_{*p}(T_pP)$ et alors on conclut que

$$u = b + f_{*h(p)}(v) \ \in \ g_{*q}(T_qQ) + f_{*h(p)}h_{*p}(T_pP)\,. \quad \square$$

LEMME 2. *Dans le mêmes hypothèses qu'au lemme 1, si de plus $f \in Diff(S,S)$ est un difféomorphisme et $h : P \hookrightarrow \mathcal{X}$ est une inclusion alors $f(P)$ est transverse à $g : Q \to S$.*

Preuve. C'est immédiat car si $h = i : P \hookrightarrow \mathcal{X}$ est une inclusion et f un difféomorphisme alors $[f \circ h](P) = f(i(P)) = f(P)$ est une sous-variété de S, $T_{f(p)}f(P) = f_{*p}(T_pP)$ et donc pour tout point $p \in P$ tel que $f(p) = g(q) \in Im\ g$ la formule (1) au lemme 1 devient

$$g_{*q}(T_qQ) + T_{f(p)}f(P) = T_sS\,. \quad \square$$

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THEOREME 3 (DE TRANSVERSALITE D'APPLICATIONS STRATIFIEES).

Soit $\mathcal{X}$ une stratification (E)-régulière où (E) désigne l'une des conditions de régularité suivantes : "être un E.S.A.", vérifier la condition (b) de Whitney, ou la condition (c) de Bekka, ou la (w) de Verdier ou bien la lipschitzienne de Mostowski, et soit $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ une application stratifiée définie sur un espace stratifié $\mathcal{Y}$ arbitraire.

Pour toute application $h \in \mathcal{MS}(\mathcal{Z},\mathcal{X})$ il existe une déformation par isotopie h' de h dans $\mathcal{X}$ qui est transverse à g dans $\mathcal{X}$. De plus, pour tout voisinage ouvert U de $h(\mathcal{Z})$ dans $\mathcal{X}$, on peut obtenir que $h'(\mathcal{Z}) \subseteq U$.

Preuve. Nous reconsidérons la démonstration du théorème 1 et l'adaptons au cas de transversalité d'applications stratifiées.

Par récurrence sur la dimension $k \le n$ du squelette A_k de A construisons une chaîne de n déformations par isotopie de h dans $\mathcal{X} = (A,\Sigma)$

$$h^0 \overset{\Psi^1}{\equiv} h^1 \overset{\Psi^2}{\equiv} \ \cdots \ \overset{\Psi^n}{\equiv} h^n$$

telles que chaque h^k soit transverse à g dans A_k pour tout $k = 0,\dots,n$.

Pour $k=0$ choisissons évidemment $h^0 = h$. Fixons alors un $k > 0$ et supposons construite la chaîne de déformations $h^0 \overset{\Psi^1}{\equiv} h^1 \overset{\Psi^2}{\equiv} \ \cdots \ \overset{\Psi^{k-1}}{\equiv} h^{k-1}$.

L'application h^{k-1} étant par hypothèse de récurrence, transverse à g dans A_{k-1}, nous pouvons définir la restriction de h^k à A_{k-1} comme coïncidant avec h^{k-1}, i.e. nous posons:

$$h^k_{|A_{k-1}} := h^{k-1}_{|A_{k-1}}.$$

Complètons la construction de h^k comme dans le théorème 1 en déformant h^{k-1} sans la changer sur A_{k-1} en deux étapes:

Etape 1. "Déformation de $h^{k-1}_{|[A_k - A_{k-1}]}$ *"*. Rappelons qu'avec notre hypothèse simplificative $S = A_k - A_{k-1}$ était l'unique k-strate de $\mathcal{X}$.

Notons $\{W_\alpha\}_\alpha$ la famille des strates de $[h^{k-1}]^{-1}(S)$, et pour tout α, $h_\alpha = h_{W_\alpha} : W_\alpha \to S$ la restriction de h à W_α. Similairement, notons $\{Y_\beta\}_\beta$ la famille des strates de $g^{-1}(S)$ et pour tout β, $g_\beta = g_{Y_\beta} : Y_\beta \to S$ la restriction g à Y_β.

Alors la preuve de l'*étape 1* s'obtient de manière formellement analogue à l'étape 1 du théorème 1, où nous devons remplaçer toutes les restrictions $\mathcal{W}_S$ et $\mathcal{V}_S$ des O.S.S. W et V par les restrictions h_S et g_S des applications h et g.

En fait, de telle manière, on trouve que pour tous α, β l'ensemble

$$T_{W_\alpha \times Y_\beta} = \Big\{ f \in C^\infty(S,S) \quad \Big| \quad j^0 f \text{ est transverse à } (h_\alpha \times g_\beta) : W_\alpha \times Y_\beta \to S \times S \Big\} =$$

$$\Big\{ f \in C^\infty(S,S) \quad \Big| \quad \Gamma f \text{ est transverse à } (h_\alpha \times g_\beta) \Big\},$$

(où Γf = Graphe$f$), est une intersection dénombrable d'ensembles ouverts et denses **[GG]**, **[Hi]**, **[Mic]** dans $C^\infty(S,S)$.

D'autre part, comme la famille de strates $\{W_\alpha \times Y_\beta\}$ est au plus dénombrable (finie si $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$ sont tous deux compacts), alors l'ensemble

$$T = \bigcap_{\substack{h(W_\alpha)\subseteq S \\ g(Y_\beta)\subseteq S}} T_{W_\alpha \times Y_\beta} = \Big\{ f \in C^\infty(S,S) \Big| \, \Gamma f \text{ transverse à } \big(h_S \times g_S\big) \Big\}$$

est encore une intersection dénombrable d'ensembles ouverts denses, et donc T est dense dans $C^\infty(S,S)$.

Avec la même définition du voisinage ouvert B de 1_S dans $Diff(S,S)$ que dans le théorème 1, considérons alors un difféomorphisme $f \in B \cap T$.

Comme $f \in T$ alors pour tout $h_\alpha : W_\alpha \to S$ et $g_\beta : Y_\beta \to S$, on déduit grâce au lemme 1 que $f \circ h^{k-1}_\alpha$ est transverse à g_β; i.e. : $f \circ h^{k-1}_S$ est transverse à g_S.

Nous pouvons donc définir

$$h^k := f \circ h^{k-1}$$

de sorte que h^k_S soit transverse à g_S ($S = A_k - A_{k-1}$).

D'autre part $f \in B$, et donc les applications h^k et h^{k-1} coïncident sur le $(k-1)$-squelette A_{k-1} de A, et alors $f \circ h^k_{A_{k-1}}$ est (par l'hypothèse de récurrence sur h^{k-1}) également transverse à $g_{A_{k-1}}$ dans A_{k-1}.

En conclusion, $f \circ h^k_{A_k}$ est transverse à g_{A_k} sur la réunion $A_k = A_{k-1} \cup S$ et celà nous permet de conclure la preuve de l'*étape 1*.

Etape 2. "Déformation de $h^{k-1}_{[A - A_k]}$ *"*. C'est similaire à la preuve de *l'étape 2* dans le théorème 1 où, avec la même extension $\tilde{f} = \Phi_1 : A \to A$ cette fois on doit définir

$$h^k := \tilde{f} \circ h^{k-1}.$$

Conclusion de la démonstration. Avec la même isotopie stratifiée Φ^k_t qu'au théorème 1 et obtenue par application du théorème d'extension forte du §2, et qui par construction vérifie

$$\Phi^k_1 = \tilde{f} \qquad , \qquad \Phi^k_{1|S} = f \qquad , \qquad \Phi^k_{1|A_{k-1}} = id_{A_{k-1}}$$

nous obtenons la déformation “entière” h^k de h^{k-1} en définissant :

$$h^k := \Phi_1^k \circ h^{k-1}$$

de sorte que par construction on ait

$$h^k := \begin{cases} h^{k-1}_{A_{k-1}} & \text{sur } A_{k-1}; \\ f \circ h^{k-1}_S & \text{sur } S = A_k - A_{k-1}; \\ \Phi_1^k \circ h^{k-1}_{[A-A_k]} & \text{sur } [A - A_k]\,, \end{cases}$$

ce qui nous permet de conclure la récurrence et la démonstration du théorème en considérant $h' = h^n$. $\square$

Remarque 3. Des remarques analogues aux remarques 1, 2 et 3 de la section §3.1 et concernant le théorème 1 restent valable pour le théorème 3 précédent.

Supposons maintenant, comme dans le *Transversality lemma* de Goresky, que W soit un O.S.S. de $\mathcal{X}$ et que l'application $h = i : \mathcal{W} \hookrightarrow \mathcal{X}$ soit l'inclusion stratifiée de W dans $\mathcal{X}$ et considérons l'application $h' := \Phi_1 \circ h$ déformée de h.

Comme la déformation transversalisante Φ_1, est un homéomorphisme stratifié, et donc en particulier un difféomorphisme sur chaque strate, alors grâce au lemme 2, la condition *“$h' = \Psi_1 \circ h$ est transverse à g”*, se réinterprète comme *“$W' = \Phi_1(W)$ est transverse à g”. De plus, pour tout voisinage ouvert U de W dans $\mathcal{X}$, on peut obtenir $W' \subseteq U$.*

On obtient alors le corollaire suivant qui généralise le *Transversality lemma* de Goresky, ou plus précisément sa version qui ne tient pas compte de la condition de π-fibre pour l'O.S.S. W à déformer.

Theoreme 4 (corollaire). *Soit $\mathcal{X}$ une stratification (E)-régulière où (E) désigne l'une des conditions de régularité suivantes : “être un E.S.A.”, vérifier la condition (b) de Whitney, ou la condition (c) de Bekka, ou la (w) de Verdier ou bien la Lipschitzienne de Mostowski, et soit $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ une application stratifiée définie sur un espace stratifié $\mathcal{Y}$ arbitraire.*

Alors pour tout O.S.S. W de $\mathcal{X}$ il existe une déformation par isotopie W' de W qui soit transverse à f.

Preuve. Comme vu ci-dessus c'est une application immédiate du théorème 3 et du lemme 2. $\square$

Il faut souligner maintenant qu'à présent, dans le théorème 4, analogue du *Transversality lemma*, à la différence de Goresky nous ne considérons aucune condition de (E)-régularité pour W sinon celle d'être simplement un O.S.S. de $\mathcal{X}$. Donc le problème de la préservation d'une telle condition pour sa déformation par isotopie W' ne se pose pas non plus (cependant nous dédierons le §4 à ce problème).

D'autre part, même si le théorème 4 ne considère pas (par rapport au *Transversality lemma*) des conditions de régularité sur l'O.S.S. W et pour sa déformation W' (comme pour la condition (b) dans le *Transversality lemma*), nous remarquons qu'en revanche le théorème 4 est valable pour des stratifications et des applications stratifiées bien plus générales que celles du *Transversality lemma*. En fait nous n'exigeons aucune des hypothèses suivantes :

i) g est contrôlée par rapport à $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$;
ii) g est la restriction d'une application lisse $\tilde{g} : M_1 \to M_2$.

L'application stratifiée $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ considérée par nous est donc complètement générale. Dans ce sens alors, on peut dire raisonablement que le théorème 4 ci-dessus est une généralisation éffective du *Transversality lemma* de Goresky.

Enfin, la condition de π-fibre de Goresky (voir §7 chapitre IV définition 1) est une condition tellement forte portant sur la géométrie d'un O.S.S. W dans $\mathcal{X}$ que, avec la même démonstration que Goresky, (corrigée par nous selon la remarque 3, secton 1), il ne serait pas surprenant que d'autres conditions de régularité puissent se préserver en présence de cette condition de π-fibre. Par exemple, cela se vérifie immédiatement pour la (a)-régularité mais me semblerait vrai aussi pour la (w)-régularité et/ou la (c)-régularité.

§4. Sur la préservation de la régularité pour les sous-objets déformés.

Dans ce paragraphe nous considérons le cas où l'espace stratifié $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ est contenu dans un espace euclidien $\mathbb{R}^m$.

On pourra alors considérer pour $\mathcal{X}$ et pour chacun de ses O.S.S. des conditions de régularité supplémentaires comme les conditions (a) de Whitney, (c) de Bekka, (w) de Verdier et la régularité lipschitzienne.

Nous nous intéressons au problème de la préservation de régularité d'un O.S.S. W de A après la déformation transversalisante dans A et donnons des conditions suffisantes différentes selon les différents types de régularité de la stratification ambiante $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$.

Nous devons souligner que, dans le cas où $A \subseteq \mathbb{R}^m$ est (c)-régulier, cela a un sens de considerer la continuité des champs de vecteurs et donc tous les relèvements (contrôlés) effectués dans l'étape 2 du théorème de transversalité sont pris continus (chapitre I).

D'autre part, cette remarque est redondante quand l'espace A est (w)-régulier (resp. lipschitzien) car la rugosité (resp. lipschitzianité) du relèvement implique automatiquement la continuité.

4.1 : Le cas des stratifications (c)-régulières.

Considérons premièrement le cas où A est (au moins) (c)-régulière. Nous montrerons ici que, si tous les flots des champs relevés continus contrôlés, des champs de vecteurs (dépendant du temps : on ne le repetera pas toujours), ont la propriété de semidifférentiabilité introduite au chapitre II, alors l'homéomorphisme stratifié (difféomorphisme sur les strates) final transversalisant $\Phi_1 : A \to A$ préserve la (a) et la (c)-régularité de l'O.S.S. W de A sujet à déformation.

Rappelons le fait suivant bien connu :

Remarque 1. *Les conditions (a) et (b) de Whitney, (c) de Bekka, se préservent par difféomorphisme de classe C^1.*

Preuve. Voir **[Wh]** et $[\mathbf{Be}]_1$. $\square$

La proposition ci dessous constitue le contenu essentiel du théorème 1 sur la préservation de la (a) et de la (c)-régularité des O.S.S. d'une stratification au moins (c)-régulière.

Proposition 1. *Soient $X \cup Y$ une stratification (c)-régulière ayant seulement deux strates et $\phi_X \cup \phi_Y : X \cup Y \to X \cup Y$ un homéomorphisme stratifié, difféomorphisme sur les strates ayant la propriété de semidifférentiabilité.*

Etant données deux sous-variétés lisses R, T, respectivement de X et de Y, avec $R \subseteq \overline{T}$, alors les sous-variétés images $R' = \phi_X(R) \subseteq X$ et $T' = \phi_Y(T) \subseteq Y$ vérifient :

i) $R < T$ *est* (c)*-régulier* $\Rightarrow$ $R' < T'$ *est* (c)*-régulier;*
ii) $R < T$ *est* (a)*-régulier* $\Rightarrow$ $R' < T'$ *est* (a)*-régulier.*

Preuve i). Soit $\rho_R : T_R \to [0, \infty[$ une application distance pour laquelle $R < T$ est (c)-régulier. Considérons alors sur $R' = \Phi_X(R)$ la fonction distance

$$\rho_{R'} = \rho_R \circ (\Phi_X \cup \Phi_Y)^{-1}$$

et $t'_n = \Phi_Y(t_n)$ une suite de points de $T' = \Phi_Y(T)$ telle que les limites suivantes existent:

$$\lim t'_n = r' \in R' \quad , \quad \lim_n \ker \rho_{R'T' * t'_n} = \delta' \; .$$

Montrons alors, pour la fonction distance $\rho_{R'}$, la (c)-régularité de $R' < T'$: $T_{r'}R' \subseteq \delta'$.

Fixons donc un vecteur $v' \in T_{r'}R' = \Phi_{X*r}(T_r R)$ où $r' = \Phi_X(r)$ et notons $v' = \Phi_{X*r}(v)$, avec $v \in T_r R$.

Comme $\Phi_X \cup \Phi_Y : X \cup Y \to X \cup Y$ est un homéomorphisme on a $\lim_n t_n = r$.

D'autre part, par compacité de la Grassmannienne qui contient les espaces vectoriels $\ker \rho_{RT*t_n}$, on peut supposer que la limite $\lim_n \ker \rho_{RT*t_n} = \delta$ existe.

Comme $R < T$ est un couple (c)-régulier, on déduit que $T_r R \subseteq \delta$ et donc qu'il existe une suite $\{u_n\}$ dans $\ker \rho_{RT*t_n}$ avec $\lim_n u_n = v$.

En considérant, alors, la suite $u'_n = \Phi_{Y*t_n}(u_n)$, grâce à la semidifférentiabilité de $\phi_X \cup \phi_Y$ on trouve

$$\lim_n u'_n = \lim_n \Phi_{Y*t_n}(u_n) = \Phi_{X*r}(v) = v'$$

avec

$$u'_n \in \Phi_{Y*t_n}\left(\ker \rho_{RT*t_n}\right) = \ker \rho_{RT*t_n} \Phi_Y^{-1}{}_{*t'_n} = \ker \rho_{R'T'*t'_n} .$$

Alors $v' \in \delta'$ et donc $T_{r'}R' \subseteq \delta'$: i.e. $R' < T'$ est (c)-régulier.

Preuve ii). Le cas (a)-régulier est formellement analogue et on doit juste remplacer

$$\begin{cases} \ker \rho_{RT*t_n} & \text{par} \quad T_{t_n}T; \\ \ker \rho_{R'T'*t'_n} & \text{par} \quad T_{t'_n}T'; \\ \lim_n \ker \rho_{RT*t_n} & \text{par} \quad \lim_n T_{t_n}T; \\ \lim_n \ker \rho_{R'T'*t'_n} & \text{par} \quad \lim_n T_{t'_n}T'. \quad \square \end{cases}$$

Remarque 2. *Pour que les implications réciproques :*

i) $R < T$ *est* (c)*-régulier* $\Leftarrow$ $R' < T'$ *est* (c)*-régulier;*
ii) $R < T$ *est* (a)*-régulier* $\Leftarrow$ $R' < T'$ *est* (a)*-régulier;*

deviennent valables, il suffit que la différentielle de Φ_Y^{-1} soit bornée en norme au voisinage de X.

Preuve. En fait, supposons que $\|\Phi_{Y*y}\|$ soit bornée en norme au voisinage de X et qu'en même temps $\Phi_X \cup \Phi_Y$ soit semidifférentiable, alors, grâce à la proposition 3 §2 chapitre II, on en déduit que le morphisme stratifié $(\Phi_X \cup \Phi_Y)^{-1} = \Phi_X^{-1} \cup \Phi_Y^{-1}$ est également semidifférentiable.

Donc la proposition 2 se réapplique à $\Phi_X^{-1} \cup \Phi_Y^{-1}$ en démontrant les implications réciproques. $\square$

Avec les notations du théorème de transversalité et de la remarque 1 qui le suit on a:

THEOREME 1. *Soit* $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ *une stratification* (c)*-régulière et supposons que pour tout* $k = 1, \ldots, n$ *le difféomorphisme* $f = f^k \in B \cap T$*, transversalisant dans* $S = A_k - A_{k-1}$ *, puisse être choisi de sorte que son extension* $\Phi_1^k : A \to A$ *soit semidifférentiable. Alors, l'O.S.S.* W *de* A *et sa déformation par isotopie* W' *vérifient :*

i) W *est* (c)*-régulier* $\Rightarrow$ W' *est* (c)*-régulier;*
ii) W *est* (a)*-régulier* $\Rightarrow$ W' *est* (a)*-régulier.*

Preuve. Avec la même récurrence que pour le théorème de transversalité, il suffira de montrer que pour tout $k \leq n = \dim\mathcal{X}$, la déformation par isotopie $W(k)$ de $W(k-1)$ est (a) ou (c)-régulier quand W l'est.

Considérons alors deux strates $R' < T'$ de $W(k)$ qui proviennent des strates $R < T$ de $W(k-1)$,

$$R' = \Phi_1(R) \quad \text{et} \quad T' = \Phi_1(T)\,.$$

L'un des cas suivants doit se présenter :

Cas 1 : $R < T$ *sont toutes les deux contenues dans* A_{k-1}*.* Alors $R < T$ sont des strates de $W(k) \cap A_{k-1} = W(k-1) \cap A_{k-1}$ et donc le couple $(R', T') = (R, T)$ est (c) ou (a)-régulier par hypothèse de récurrence.

Cas 2 : (R, T) *sont toutes les deux contenues dans* S*.* Dans ce cas le couple $(R', T') = (\Phi_1(R), \Phi_1(T))$ est (a) ou (c)-régulier car le difféomorphisme ${\Phi^k}_{1\,|S} = f^k : S \to S$ étant de classe C^∞, il préserve la (c) ou (a)-régularité de (R, T) (remarque 1).

Cas 3 : $R \subseteq A_{k-1}$, $T \subseteq S$*.* Comme, pour le choix du voisinage B dans le théorème d'extension, le difféomorphisme $f \in B \subseteq B^l_\delta(1_S)$, est prolongeable de manière C^r, avec $r \geq 1$, sur le bord ∂S par $f(x) = x$, avec f_{*x} qui tend vers l'identité quand $x \to \partial S$. Alors, de nouveau, on conclut par la remarque 1 §4.

Cas 4 : $R \subseteq S$, $T \subseteq A - A_k$*.* Si $X < Y$ désignent respectivement

$$\begin{cases} X = & \text{la composante connexe de } S \text{ qui contient } R \text{ et } R' \\[1em] Y = & \text{la strate de } A - A_k \text{ qui contient } T \text{ et } T'. \end{cases}$$

Considérons alors la restriction $\zeta(f)_X$ du champ de vecteurs dépendant du temps $\zeta(f)_S$ et la restriction $\zeta(f)_Y := \zeta(f)_A|_Y$ du relèvement continu contrôlé $\zeta(f)_A$ de $\zeta(f)$. Comme par hypothèse chaque restriction $\Phi^k_{1|X} \cup \Phi^k_{1|Y}$ de Φ_1 est semidifférentiable, le résultat découle donc de la proposition 1 en rappelant que la semidifférentiabilité se préserve par composition (chapitre II).

Cas 5 : R , $T \subseteq Z$ *sont dans une même strate* Z *de* $A - A_k$*.* Analogue au cas 2.

Cas 6 : R , $T \subseteq A - A_k$ *sont dans deux strates différentes.* C'est complètement similaire au cas 4. □

REMARQUE 3. Avec les notations de la proposition 1, rappelons que l'application $\Phi_X \cup \Phi_Y$ n'étant pas C^1 (en général) sur $X \subseteq \overline{Y}$, alors la fonction distance $\rho_{R'} = \rho_R \circ (\Phi_X \cup \Phi_Y)^{-1}$ ne l'est pas (en général), bien qu'elle soit continue.

Donc les affirmations $i)$ de la proposition 2, de la remarque 1 et du théorème 1, doivent être comprises au sens de la définition de (c)-régularité affaiblie considérée au chapitre I §4 (immédiatement après le théorème 3).

4.2 : Les cas rugueux et lipschitzien.

Definition 1. Soit $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un espace stratifié (w)-régulier (resp. lipschitzien). Un homéomorphisme stratifié $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ difféomorphisme sur les strates, est dit *birugueux* (resp. bilipschitzien) si ϕ et sa réciproque ϕ^{-1} sont toutes deux des applications rugueuses (resp. lipschitziennes).

Rappelons à nouveau deux propriétés bien connues :

Remarque 1. *Les conditions de régularité (w) de Verdier et lipschitzienne de Mostowski se préservent par difféomorphisme de classe C^2.*

Preuve. Voir [**Ve**] et [**Pa**]. □

Remarque 2. *Pour qu'une stratification Σ d'un sous-ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^m$ soit (w)-régulière (resp. lipschitzienne) il faut et il suffit que tout champ de vecteurs ξ_X lisse (resp. lipschitzien) sur une strate X de Σ se relève en un champ de vecteurs stratifié rugueux (resp. lipschitzien) défini sur un voisinage stratifié de $T_X = \cup_{Y \geq X} T_{XY}$ de X dans A.*

Preuve. Dans le cas (w)-régulier voir [**Ve**] pour la condition nécessaire et [**BT**] pour la condition suffisante. Pour la caractérisation dans le cas lipschitzien voir [**Pa**].

La proposition qui suit est l'analogue de la proposition 1 au §4.1 et un raffinement de la remarque 1 précédente.

Proposition 2. *Soit $X = \mathbb{R}^l \times 0^{n-l} < Y$ une stratification (w)-régulière (resp. lipschtzienne).*

Soit $\phi_X \cup \phi_Y : X \cup Y \to X \cup Y$ un homéomorphisme stratifié birugueux (resp. bilipschitzien) dont la "différentielle" $\phi_{X*} \cup \phi_{Y*} : TX \cup TY \to TX \cup TY$ est une application rugueuse (resp. lipschitzienne).

Etant données deux sous-variétés lisses R, T, respectivement de X et de Y, avec $R \subseteq \overline{T}$, alors les sous-variétés images $R' = \phi_X(R) \subseteq X$ et $T' = \phi_Y(T) \subseteq Y$ vérifient :

i) $R < T$ est (w)-régulier $\Rightarrow$ $R' < T'$ est (w)-régulier;
ii) $R < T$ est lipschitzien $\Rightarrow$ $R' < T'$ est lipschitzien.

Preuve. Utilisons la condition suffisante de la remarque 2. Soit $\xi_{R'}$ un champ de vecteurs lisse (resp. lipschitzien) sur R' et montrons qu'il existe un relèvement $\xi_{T'}$ rugueux (resp. lipschitzien) de $\xi_{R'}$ sur T'.

Considérons le champ de vecteurs pullback

$$\xi_R : R \to TR \qquad , \qquad \xi_R(x) := \phi^{-1}_{X*x'}\Big(\xi_{R'}\big(\phi_X(x)\big)\Big) \quad \text{où} \quad x' = \phi_X(x)$$

du champ $\xi_{R'}$ via le difféomorphisme $\phi_{X\,|R} : R \to R'$.

L'application $\phi_X : X \to X$ étant lisse par hypothèse, il s'en suit que ϕ_{X*} et ϕ_X sont rugueuses (resp. lipschitziennes) et donc il en est également ainsi pour le champ ξ_R en tant que composé d'applications rugueuses.

Le couple de strates $R < T$ étant (w)-régulier (resp. lipschitzien), la remarque 2, relativement au champ de vecteurs ξ_R fournit l'existence d'un champ de vecteurs ξ_T rugueux (resp. lipschitzien) tel que le champ stratifié $\xi_R \cup \xi_T$ soit rugueux (resp. lipschitzien) sur $R \cup T$.

En considérant alors le champ image

$$\xi_{T'} : T' \to T(T') \qquad , \qquad \xi_{T'}(y') := \phi_{Y*y}\Big(\xi_T\big(\phi_Y^{-1}(y')\big)\Big) \quad \text{où} \quad y = \phi_Y^{-1}(y')$$

on a immédiatement la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} R' \cup T' & \xrightarrow{\xi_{R'} \cup \xi_{T'}} & T(R' \cup T') \\ \phi_X \cup \phi_Y \downarrow & & \uparrow \phi_{X*} \cup \phi_{Y*} \\ R \cup T & \xrightarrow{\xi_R \cup \xi_T} & T(R \cup T) \end{array}$$

et donc on peut conclure car, par hypothèse $\phi_{X*} \cup \phi_{Y*}$ étant une application rugueuse (resp. lipschitzienne), alors le champ de vecteurs $\xi_{R'} \cup \xi_{T'}$ est rugueux (resp. lipschitzien) sur $R' \cup T'$ en tant que composé des applications rugueuses (resp. lipschitziennes) $(\phi_X \cup \phi_Y)^{-1}$, $\xi_R \cup \xi_T$ et $\phi_{X*} \cup \phi_{Y*}$. $\square$

Avec les mêmes hypothèses et notations que celles du théorème de transversalité, on a pour des stratifications (w)-régulières et lipschitziennes:

THEOREME 2. *Soit $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un espace stratifié (w)-régulier (resp. lipschitzien) et supposons que pour tout $k = 1, \ldots, n$ le difféomorphisme $f = f^k \in B \cap T$, transversalisant dans $S = A_k - A_{k-1}$, puisse être choisi de sorte que le flot Φ_1^k du champ relevés $\zeta(f)_{T_S}$ continu contrôlé du champ de vecteurs dépendant du temps $\zeta(f)$ ait sa différentielle $[\Phi^k_{1\,T_S}]_* : \cup_X TX \to \cup_X TX$ rugueuse (resp. lipschitzienne).*
Alors, l'O.S.S. W de A et sa déformation par isotopie W' vérifient :

i) W est (w)-régulier $\Rightarrow$ W' est (w)-régulier;
ii) W est lipschitzien $\Rightarrow$ W' est lipschitzien.

Preuve. Nous l'obtenons de la même manière qu'au théorème 4.1 (cas (c)-régulier), en analysant toutes les positions réciproques possibles de deux strates fixées R et T de W par rapport au squelette A_k de A. Nous soulignons les modifications nécessaires.

Dans les cas 2), 3) et 5) il faut préciser que le choix de chaque $f = f^k : S \to S$ est de classe C^2 sur $\overline{S}$ et utiliser la remarque 1.

Dans le cas 4), il faut observer que dans l'*étape 2* de la preuve du théorème de transversalité (w)-régulier (resp. lipschitzien), le relèvement du champ de vecteurs $\zeta(f)_{T_S}$ aux strates supérieures est rugueux (resp. lipschitzien) et donc tel est sont flot à tout instant t **[Ve]** (resp. **[Pa]**). On en déduit alors que $\Phi^k_{1|X} \cup \Phi^k_{1|Y}$ est birugueux.

Alors on peut conclure par l'hypothèse de rugosité (resp. de lipschitz) sur les différentielles $\Phi^k_{1|X*} \cup \Phi^k_{1|Y*}$ à l'aide de la proposition 2.

Le cas 6) est à nouveau complètement similaire au cas 4). $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[AGV] V. Arnold, S.M. Gussein-Zade, A.N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps*, Volume I, Birkhäuser, (1985).

[Be]$_1$ K. Bekka, *C-régularité et trivialité topologique*, Singularity theory and its applications, Warwick 1989, Part I, Lecture Notes in Math. 1462 (Springer, Berlin 1991), 42-62.

[Be]$_2$ K. Bekka, *Isotopy Theorem*, preprint, University of Liverpool (1991).

[BT] H. Brodersen and D.J.A. Trotman, *Whitney (b)-regularity is weaker than Kuo's ratio test for real algebraic stratifications*, Mat. Scandinavica, 45 (1979), 27-34.

[Du] A.A. du Plessis, *Continuous controlled vector fields*, 12 pages, archives de l'ESN http://www.mi.aau.dk/∼esn/.

[DW] A. du Plessis and T. Wall, *The Geometry of Topological Stability*, London Mathematical Society Monographs, New Series 9, Oxford Sciences Publications.

[Ep]$_1$ D.B.A. Epstein, *The simplicity of certain groups of homeomorphisms*, Comp. Math., 22 (1970), 165-173.

[Ep]$_2$ D.B.A. Epstein, *Commutators of C^∞-diffeomorphisms. Appendix to " A curious remark conerning the geometric transfer map" by John N. Mather*, Comm. Math. Helv. 59 (1984),111-122.

[Fr] C. Freifeld, *One Parameter Subgroups Do Not Fill a Neighborhood of the Identity in an Infinite Dimensional Lie (Pseudo-)Group*, Battelle Rancontre, 1967; Lectures in Mathematics and Physics (Benjamin, New-York) 538-543.

[Fu] W. Fulton, *Intersection theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge Band 2, Springer Verlag Berlin Heidelberg, (1984).

[Gi] C.G. Gibson, K. Wirthmüller, A.A.du Plessis, E.J.N. Looijenga, *Topological stability of smooth mappings*, Lecture Notes in Math. 552, Springer Verlag, (1976).

[GG] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Mathematics, n. 14, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1973.

[GM]$_1$ M. Goresky and R. MacPherson, *Intersection Homology theory I*, Topology, vol 19, (1980), 135-162.

[GM]$_2$ M. Goresky and R. MacPherson, *Intersection Homology theory II*, Inventiones Mathematicae, volume 72,(1983), 77-129.

[Go]$_1$ M. Goresky, *Cohomology and homology of stratified objects*, thèse, Brown University, 1976.

[Go]$_2$ M. Goresky, *Whitney stratified chains and cochains*, Trans. Amer. Math .Soc. 267 (1981), 175-196.

[Hi] M.W. Hirsh, *Differential Topology*, Graduate Texts in Math. (33), Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[Kuo] T.C. Kuo, *The Ratio Test for Analytic Whitney Stratification*, Proc. of Liverpool Singularities Sym., Springer Lectures Notes in Math. 192, 141-149 (1971).

[La] B. Lawson, *Foliations*, Bull. Amer. Math. Soc. 80 n. 3, (1974), 369-418.

[Ma]$_1$ J. Mather, *Notes on topological stability*, Mimeographed notes, Harvard University, (1970).

[Ma]$_2$ J. Mather, *Simplicity of certain groups of diffeomorphisms*, Bull. Amer. Math. Soc., 80 (1974), 271-273.

[Ma]$_3$ J. Mather, *Commutators of diffeomorphisms I*, Comm. Math. Helv. 49 (1974), 512-528.

[Ma]$_4$ J. Mather, *Commutators of diffeomorphisms II*, Comm. Math. Helv. 50 (1975), 33-40.

[Ma]$_5$ J. Mather, *A curious remark concerning the geometric transfer map*, Comm. Math. Helv., 59 (1984), 86-110.

[Ma]$_6$ J. Mather, *Stability of C^∞ mappings: II. Infinitesimal stability implies stability*, Annals of Mathematics, 89, (1969), 254-291.

[McC]$_1$ C. McCrory, *Poincaré duality in spaces with singularities*, Thèse, Brandeis University, (1972)

[McC]$_2$ C. McCrory, *Stratified general position*, Algebraic and Geometric Topology, Santa Barbara 1977, Lecture Notes in Math., vol 664, Springer-Verlag Berlin and New York, 1978, 142-146.

[McD] D. McDuff, *The Lattice of Normal Subgroups of the Group of Diffeomorphisms or Homeomorphisms of an Open Manifold.*, J. London Math. Soc. (2), 18 (1978) 353-364.

[Mic] P. Michor, *Manifolds of Differentiable Mappings*, Shiva Publishing, Orpington, 1980.

[Mi] J. Milnor, *Remarks on Infinite-dimensional Lie groups*, In Relativity, Groups and Topology II. Les Houches Session XL, 1983. B.S. de Witt & R. Stora Editors. North-Holland. Amsterdam (1984).

[Mu]$_1$ C. Murolo, *Whitney Homology, Cohomology and Steenrod squares*, Ricerche di Matematica, Vol. XLIII, fasc. 2^0, (1994), 175-204.

[Mu]$_2$ C. Murolo, *The Steenrod p-powers in Whitney Cohomology*, Topology and its Applications, Vol 68, (1996), 133-151.

[Pa] A. Parusiński, *Lipschitz stratifications*, Global Analysis in Modern Mathematics (K. Uhlenbeck, ed.), Proceedings of a Symposium in Honor of Richard Palais' Sixtieth Birthday, Publish or Perish, Houston, 1993, pp 73-91.

[Te] M. Teufel, *Abstract stratified sets are (b)-regular*, Journal of Diff. Geom., **16** (1981), 529-536.

[Th] R. Thom, *Ensembles et morphismes stratifiés*, Bull.A.M.S. 75 (1969), 240-284.

[Thu] W. Thurston, *Foliations and groups of diffeomorphisms*, Bull. Amer. Math. Soc., 80 (1974), 304-307.

[Tr] D.J.A. Trotman, *Comparing regularity conditions on stratifications*, Singularities, Arcata 1981, Proc. Sympos. Pure Math. 40, (A.M.S.) (1983), 575-586.

[Ve] J.L. Verdier, *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard*, Inventiones Mathem. 36 (1976), pp. 295-312.

[Wh] H. Whitney, *Local properties of analytic varieties*, Differential and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press, (1965), pp. 205-244.