

CHAPITRE IV

HOMOLOGIE DES ESPACES STRATIFIES STRUCTUREE PAR LA SOMME TRANSVERSALE

RESUME. Nous reconsidérons pour les ensembles stratifiés abstraits (E.S.A.) (resp. pour les stratifications (c) -régulières) les théories d'homologie et de cohomologie, $WH_*(X)$ et $WH^*(X)$, introduites par M. Goresky [Go]_{1,3} pour une stratification de Whitney X dans laquelle les cycles et les cocycles de X étaient des objets sous-stratifiés (b) -réguliers de X . Nous obtenons ainsi de nouveaux ensembles $AH_k(X)$ et $AH^k(X)$ (resp. $BH_k(X)$ et $BH^k(X)$) pour lesquels les définitions et les résultats homologiques et cohomologiques de [Go]_{1,3} ainsi que les améliorations contenues dans [Mu]_{1,2}, s'étendent de façon naturelle.

Pour l'homologie $AH_*(X)$ nous trouvons de plus que l'application de *représentation homologique* $R_a : AH_k(X) \rightarrow H_k(X)$ est une bijection pour tout E.S.A. X . Goresky, qui avait introduit l'application $R_w : WH_k(X) \rightarrow H_k(X)$, avait montré la bijectivité de R_w pour X une variété lisse et l'avait conjecturée pour X une stratification de Whitney arbitraire.

A l'aide du théorème de transversalité pour des E.S.A. (chapitre III) nous montrons que l'homologie stratifiée $AH_*(X)$ d'un ensemble stratifié abstrait X est une théorie plus riche que l'homologie $WH_*(X)$ d'une stratification de Whitney X (quand X ne se réduit pas à une variété).

Dans les théories $\{AH_*, AH^*\}$ et $\{BH_*, BH^*\}$ le théorème de transversalité joue le même rôle que le "*Moving Lemma*" dans la théorie des anneaux de Chow $CH_*(\)$ pour les cycles algébriques d'une variété algébrique [Fu].

§1. Introduction. Dans ce chapitre, nous reconsidérons la théorie *d'ensembles* "d'homologie" $WH_k(X)$ et de "cohomologie" $WH^k(X)$ introduite par M. Goresky [Go]_{1,3} pour une stratification de Whitney X . Notre objectif est de montrer que cette théorie et d'autres résultats s'obtiennent dans le contexte plus général des ensembles stratifiés abstraits (E.S.A.) et/ou des stratifications (c) -régulières.

L'article original donnant l'idée de cette interprétation géométrique des cycles et cocycles au moyen de sous-ensembles stratifiés est dû à Whitney en 1947 [Wh]. D'autre part le travail de Goresky a été repris (récemment et étendu) dans [Mu]₁, où on introduit une opération de groupe, des coefficients dans un groupe abélien arbitraire G , puis la

construction géométrique des *carrés de Steenrod*. Ensuite, la théorie a été complétée, [Mu]₂, par la construction géométrique des opérations cohomologiques principales, les *p-puissances de Steenrod* (p premier). A partir de [Mu]₁, nous introduisons la terminologie d'*homologie de Whitney* et de *cohomologie de Whitney* pour se référer aux ensembles $WH_k(\mathcal{X})$ et $WH^k(\mathcal{X})$.

1. 1 : Les théorèmes de Goresky. Goresky définit, pour toute stratification de Whitney $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ avec $\dim \mathcal{X} = n$, un ensemble $WH_k(\mathcal{X})$, ($\forall k \leq n$) dont les cycles sont des sous-stratifications de Whitney de $\mathcal{X}$ et dont les homologies sont des sous-stratifications de Whitney de $\mathcal{X} \times [0, 1]$ (dites *cobordismes de Whitney*). Il introduit également une application $R_w : WH_k(\mathcal{X}) \rightarrow H_k(\mathcal{X})$ analogue de l'application de représentation de Thom-Steenrod entre le bordisme différentiel et l'homologie singulière d'un espace, que j'appelle dans [Mu]₁ la *représentation (homologique) de Goresky*. Il démontre, dans le cas particulier où $\mathcal{X}$ est une variété lisse, que l'application R_w est une bijection.

Malgré la profondeur de ses résultats, Goresky n'obtient pas une démonstration de ce théorème pour une stratification de Whitney $\mathcal{X}$ quelconque. Il énonce alors la conjecture (“... the Theorem 3.4. may even be true if $\mathcal{X} \dots$ ” ([Go]₃, p. 174) ou encore que : “it is almost certainly true that” ([Go]₁ p. 52) “l'application R est une bijection pour une stratification de Whitney $\mathcal{X}$ ” arbitraire.

Parallèlement, dans la théorie cohomologique des ensembles $WH^k(\mathcal{X})$, Goresky introduit la *représentation cohomologique* “duale” $R^w : WH^k(\mathcal{X}) \rightarrow H^k(\mathcal{X})$ et démontre que “ R^w est une bijection”. Soulignons que dans le cas cohomologique, contrairement au cas homologique, le théorème “ R^w est une bijection” est obtenu en général pour toute stratification de Whitney $\mathcal{X}$.

Le théorème clef qui permet à Goresky de démontrer la bijectivité de l'application de représentation R^w pour une stratification de Whitney arbitraire $\mathcal{X}$ est le *Transversality Lemma* (3.5 [Go]₂) qui est valable pour des cocycles et non pour des cycles.

Les cocycles V de $\mathcal{X}$ sont définis comme des sous-ensembles vérifiant une certaine “condition de π -fibre” qui implique une (sorte de) transversalité de V aux singularités de $\mathcal{X}$. Cette condition permet à Goresky de démontrer le *Transversality Lemma*, avec comme résultat important la préservation de la condition (b) de Whitney.

Comme Goresky définit les cycles de Whitney sans demander de condition du type π -fibre, il n'obtient pas un analogue du théorème de transversalité pour des cycles. Le *Transversality Lemma* de Goresky reste valable pour les cycles seulement quand l'espace ambiant $\mathcal{X}$ est une variété lisse.

1. 2 : Autres contributions. Comme précisé en début d'introduction, les deux théories, homologique WH_* et cohomologique WH^* , ont été récemment améliorées par [Mu]₁ où sont introduits une opération de groupe et des coefficients dans un groupe abélien arbitraire G . En ce qui concerne l'homologie, nous obtenions cette opération seulement quand $\mathcal{X}$ était une variété.

Dans le cas cohomologique, la théorie WH^* devient de plus une transformation naturelle de foncteurs. En fait, si $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ sont deux stratifications de Whitney et si $f : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$ est une application contrôlée alors l'application induite en cohomologie de Whitney $f^* : WH^k(\mathcal{X}_2) \rightarrow WH^k(\mathcal{X}_1)$ définie par préimage transversale $V \rightarrow f^{-1}(V)$ devient un homomorphisme de groupes.

L'opération de somme introduite signifie géométriquement *réunion transversale* de cycles (quand $\mathcal{X}$ est une variété) ou de cocycles stratifiés (pour tout $\mathcal{X}$) et on démontre qu'elle coïncide avec l'unique opération par laquelle les ensembles $WH_k(\mathcal{X})$ et $WH^k(\mathcal{X})$

deviennent des groupes et les fonctions de représentations

$$R_w : WH_k(X) \rightarrow H_k(X) \quad \text{et} \quad R^w : WH^k(X) \rightarrow H^k(X)$$

des isomorphismes de groupes (l'énoncé homologique étant encore obtenu seulement dans le cas où X est une variété).

C'est le point de départ pour obtenir ensuite la construction géométrique des opérations cohomologiques, les *carrés de Steenrod* et les *p-puissances de Steenrod* (p premier)

$$Sq_k^\alpha : WH^k(X) \rightarrow WH^{k+\alpha}(X) \quad , \quad P_k^\alpha : WH^k(X) \rightarrow WH^{k+2\alpha(p-1)}(X).$$

1. 3 : **Arguments essentiels.** Il faut maintenant préciser que grâce au *Transversality Lemma*, étant donnés deux cycles (d'une variété) ou bien deux cocycles V et V' de X on peut déformer V' en un cocycle W cobordant à V' et transverse à V . Cela nous permet de définir la somme $[V] + [V'] := [V \cup_t V']$ où $V \cup V'$ est stratifié de manière naturelle. L'argument indispensable utilisé dans $[\mathbf{Mu}]_1$ pour obtenir une telle opération (de groupe) et pour montrer qu'elle est bien définie est donc exactement le théorème de transversalité (b)-régulier de Goresky. D'autre part, pour l'homologie d'une variété et également pour la cohomologie d'une stratification de Whitney arbitraire, l'argument essentiel pour démontrer qu'une telle opération coïncide (via R_w et R^w) avec celle de l'homologie singulière de X est précisément la bijectivité des représentations R_w et R^w .

Ces précisions sont décisives et constituent les raisons principales pour lesquelles des théories analogues $\{AH_k(X), AH^k(X)\}$ et $\{BH_k(X), BH^k(X)\}$ sont possibles dans le cas où X est un E.S.A. ou une stratification (c)-régulière. Ces théories recouvrent la plupart des résultats donnés par les $WH_k(X)$ et $WH^k(X)$ en ayant l'avantage d'être plus riche dans le cas homologique pour $AH_*(X)$ (sauf peut-être si on démontre la conjecture de Goresky et un théorème de transversalité pour des stratifications de Whitney). En fait, étant donné un E.S.A. et/ou une stratification (c)-régulière $X = (A, \Sigma)$, le contenu de ce chapitre donné ci-dessous éclaire la situation :

1. 4 : **Contenu du chapitre.** Dans le §2, après avoir vu que les définitions du bord ∂ d'une chaîne stratifiée de X (dans la théorie WH) dépendent seulement de l'existence d'un système de données de contrôle (S.D.C.) $\mathcal{F} = \{(\pi_X, \rho_X)\}_{X \in \Sigma}$ (famille qui est caractéristique, par définition, des E.S.A.), nous déduisons facilement les définitions de *k-cycle stratifié abstrait et/ou (c)-régulier* et donc celles des ensembles $AH_k(X)$ et $BH_k(X)$. De façon analogue à $[\mathbf{Mu}]_1$ on obtient alors les définitions des applications de représentation homologique

$$R_a : AH_k(X) \rightarrow H_k(X) \quad \text{et} \quad R_b : BH_k(X) \rightarrow H_k(X)$$

en particulier pour l'homologie (c)-régulière on retrouve l'analogie du théorème de Goresky "Si X est une variété alors l'application de représentation $R_b : BH_k(X) \rightarrow H_k(X)$ est une bijection.

Dans le §3 on montre que la théorie homologique AH_* d'un E.S.A. est plus complète que la WH_* d'une stratification de Whitney.

Goresky a démontré en 1978 que tout E.S.A. admet une triangulation $[\mathbf{Go}]_2$. Nous utilisons ce théorème important pour montrer que la *représentation homologique*

$$"R_a : AH_k(X) \rightarrow H_k(X) \quad \text{est une bijection}."$$

Le théorème de représentabilité bijective est donc obtenu, dans la théorie homologique AH_k , pour un E.S.A. $\mathcal{X}$ arbitraire. Dans le cas “Whitney-régulier” $WH_k(\mathcal{X})$, on n’a pas de démonstration par des méthodes de triangulation car on ne dispose pas d’un théorème de triangulation de Whitney : c’est une conjecture encore non-résolue. De même pour une stratification (c) -régulière $\mathcal{X}$ et pour la théorie $BH_k(\mathcal{X})$ le résultat analogue est subordonné à la démonstration d’un théorème de triangulation ou bien de cellularisation (c) -régulière de $\mathcal{X}$.

Dans le §4, les techniques de $[\mathbf{Mu}]_1$ s’appliquent convenablement à l’homologie stratifiée et (c) -régulière et on obtient de nouveau que, si $\mathcal{X}$ est une variété, alors $AH_k(\mathcal{X})$ et $BH_k(\mathcal{X})$ muni de la *somme transversale* deviennent des groupes et les applications de représentation homologiques $R_a : AH_k(\mathcal{X}) \rightarrow H_k(\mathcal{X})$ et $R_b : BH_k(\mathcal{X}) \rightarrow H_k(\mathcal{X})$ deviennent des isomorphismes. D’autre part, un résultat similaire (et légèrement plus faible) reste valable pour $\mathcal{X}$ un E.S.A. arbitraire pour la représentation R_a .

Dans le §5, on montre l’existence d’homomorphisme de groupe $f_* : AH_k(\mathcal{X}) \rightarrow AH_k(\mathcal{Y})$, (resp. $f_* : BH_k(\mathcal{X}) \rightarrow BH_k(\mathcal{Y})$) induits en homologie stratifiée (resp. (c) -régulière) au moins quand le morphisme stratifiés $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, est un plongement stratifié des ensembles stratifiés abstraits (resp. un plongement semidifférentiables des stratifications (c) -régulières) $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$.

Il faut remarquer que la possibilité de prolonger ce résultat à la catégorie de tous les morphismes stratifiés $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ (non nécessairement des plongements) reste soumise à la possibilité de trouver des conditions suffisantes pour que l’image $f(V)$ dans $\mathcal{Y}$ d’un cycle V de $\mathcal{X}$ ait une stratification compatible, avec celle de $\mathcal{Y}$. Ce sujet est lié à une version pour E.S.A. du “*push-forward problem*” (voir aussi $[\mathbf{Go}]_3$, §1), un autre problème actuellement encore ouvert.

Le chapitre se conclut enfin au §6 où nous considérons le cas cohomologique.

Nous définissons les ensembles de cohomologie $AH^k(\mathcal{X})$ (resp. et $BH^k(\mathcal{X})$) d’un ensemble stratifié abstrait (resp. d’une stratification (c) -régulière) $\mathcal{X}$ et les application de représentations cohomologique $R^a : AH^k(\mathcal{X}) \rightarrow H^k(\mathcal{X})$ (resp. $R^b : BH^k(\mathcal{X}) \rightarrow H^k(\mathcal{X})$) et donnons des résultats correspondant aux théorèmes contenus dans $[\mathbf{Go}]_{1,3}$ et $[\mathbf{Mu}]_1$ pour la cohomologie de Whitney WH^* .

En particulier, à l’aide du théorème de transversalité du chapitre III, nous montrons qu’avec l’opération de *somme transversale* les ensembles $AH^k(\mathcal{X})$ et $BH^k(\mathcal{X})$ deviennent des groupes et les bijections R^a (resp. R^b) des isomorphismes. On retrouve aussi les autres interprétations géométriques importantes des opérations cohomologiques : le produit cup s’obtient comme l’intersection transverse de deux cocycles, le produit cap comme l’intersection transverse d’un cycle et d’un cocycle et les homomorphismes induits f^* sont représentables comme la préimage transverse $W \mapsto f^{-1}(W)$ d’un cocycle par rapport à une fonction contrôlée f . Le produit cross s’obtient comme le produit cartésien de deux cocycle et quand $\mathcal{X}$ est une variété, l’isomorphisme de dualité de Poincaré s’exprime par une application qui est l’identité sur les cocycles représentatifs. On remarque enfin que les résultats contenus dans $[\mathbf{Mu}]_{1,2}$ concernant la réalisation géométrique des *carrés* et des *p-puissances de Steenrod* pourraient également être déduits.

Beaucoup des nouveaux théorèmes sont valables pour la cohomologie stratifiée AH^* et celle (c) -régulière BH^* avec les mêmes démonstrations que dans $[\mathbf{Go}]_{1,3}$. Par conséquent, tous les nouveaux énoncés seront explicitement formulés alors que des différentes démonstrations seront omises (en renvoyant le lecteur à $[\mathbf{Go}]_{1,3}$ $[\mathbf{Mu}]_{1,2}$).

§2. Le cobordisme stratifié et la “Représentation de Goresky” pour des Ensembles Stratifiés Abstraits.

Toutes les notions ci-dessous présentées peuvent être retrouvées dans [Go]₂ ou bien [Mu]₁; elles y sont développées de manière analogue pour des stratifications de Whitney.

2.1 : Chaînes stratifiées abstraites

Soit $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un ensemble stratifié abstrait. Nous allons introduire la notion de k -chaîne (stratifiée abstraite) de $\mathcal{X}$ de manière complètement analogue à la notion d’*objet sous-stratifié de Whitney* introduite par Goresky, dans le cas où $\mathcal{X}$ était une stratification de Whitney pour la théorie WH [Go]₃.

Rappelons alors (comme défini au chapitre III, §3) qu’un k -objet sous-stratifié (abstrait) de $\mathcal{X}$, est un E.S.A. $\mathcal{V}$ de dimension k dont le support V est un compact contenu dans A et tel que chaque strate S de $\mathcal{V}$ soit contenue dans une des strates de $\mathcal{X}$. Nous noterons

$$\Sigma_{\mathcal{V}} = \left\{ V_j^h \mid j \in J_h, h = 0, \dots, k \right\} \quad \text{où} \quad \forall h \leq k \quad \begin{cases} J_h \text{ est un ensemble d'indices} \\ \text{et} \\ \forall j \in J_h, h = \dim V_j^h \end{cases}$$

la partition en strates de $\mathcal{V}$.

A partir de maintenant, toutes les fois où il n’y aura pas d’ambiguïté, pour simplifier les notations nous sous-entendrons la stratification $\mathcal{V}$ de V (qui est fixée une fois pour toutes) et nous dirons (par abus) “les strates de V ”.

DEFINITION 1. Soit G un groupe abélien. Une k -orientation (à coefficients dans G) de V est un élément

$$z = \sum_{j \in J_k} g_j V_j^k \in C_k(V)$$

du groupe abélien libre $C_k(V)$ sur G engendré par l’ensemble des k -strates G -orientées $\{V_j^k\}_{j \in J_k}$ de V et dans lequel on identifie les éléments ayant toutes les orientations et toutes les multiplicités opposées dans G .

Sous ces hypothèses tout couple $\xi = (V, z)$ est dit une k -chaîne (stratifiée abstraite à coefficients dans G) de $\mathcal{X}$.

L’ensemble de toutes les k -chaînes stratifiées abstraites de $\mathcal{X}$ sera noté :

$$AC_k(\mathcal{X}) = AC_k(\mathcal{X}; G) := \left\{ \xi \mid \xi \text{ est une } k\text{-chaîne S.A. de } \mathcal{X} \right\}.$$

A partir de la k -chaîne $\xi = (V, z)$, nous pouvons définir une nouvelle k -chaîne de $\mathcal{X}$ dite *réduction de ξ* et notée $\xi_{/z} := (V_{/z}, z)$. Cette dernière s’obtient par restriction du support de V à sa “partie essentielle”

$$V_{/z} := \bigcup_{g_j \neq 0} \overline{V_j^k} = \overline{\bigcup_{g_j \neq 0} V_j^k}$$

où $V_{/z}$ est considérée avec la stratification induite par celle de V et munie de la “même” orientation z (en considérant $z \in C_k(V_{/z})$).

2.2 : Le bord

La raison essentielle pour laquelle une théorie de l’homologie stratifiée peut être développée pour un E.S.A. $\mathcal{X}$ est que le bord d’une k -chaîne $\xi = (V, z)$ reste défini toutes les fois que l’on peut disposer pour le sous-E.S.A. V de $\mathcal{X}$ d’un système de données de contrôle (S.D.C.). Les S.D.C. sont par définition caractéristiques des E.S.A., c’est pourquoi la catégorie des E.S.A. nous semble la plus naturelle pour développer une telle théorie d’homologie stratifiée.

Il faut remarquer d’autre part, que dans sa thèse [Go]₁ (originale de la théorie $WH_k(\mathcal{X})$ développée pour les stratifications de Whitney), Goresky donne quelques définitions de base nécessaires (opérateur de bord) dans le cas général des E.S.A., quitte à passer immédiatement au cas (b) -régulier dès qu’il introduit les chaînes en tant qu’*objets sous-stratifiés de Whitney* de $\mathcal{X}$.

La définition du bord $\partial\xi$, d’une k -chaîne $\xi = (V, z)$ de $\mathcal{X}$ peut être donnée à l’aide d’un S.D.C. de V de manière simple et très naturelle en gardant sa signification géométrique comme on peut le voir dans [Go]_{1,2}. D’autre part, une telle définition n’est pas adaptée pour faire des calculs explicites dans une théorie plus complexe comme celle que nous envisageons. Nous considérerons alors, la définition équivalente et plus formelle donnée dans [Mu]₁.

PROPOSITION 1. *Pour tout E.S.A. V de dimension k , il existe un isomorphisme*

$$\psi_k : C_k(V_k) \rightarrow H_k(V_k, V_{k-1})$$

entre le groupe des k -orientations de $V = V_k$ et le groupe d’homologie singulière de V relatif à son $(k-1)$ -squelette V_{k-1} .

Preuve. Voir [Mu]₁ section 3.3, page 188. $\square$

L’application ψ_k n’est pas unique en général et dépend du choix de certains autres isomorphismes qui ne sont pas univoquement déterminés. Même si cela n’est pas vraiment nécessaire, nous supposons associé à tout E.S.A. V un tel isomorphisme qui sera toujours le même et que nous pourrions appeler “canonique”. D’autre part, comme tout h -squelette V_h de V est encore un E.S.A., étant donné V , il sera permis de considérer pour tout $h = 0, \dots, k = \dim V$ des isomorphismes $\psi_h : C_h(V_h) \rightarrow H_h(V_h, V_{h-1})$ associés à V_h (où par définition $V_{-1} = \emptyset$).

Pour tout k -E.S.A. V , à l’aide des isomorphismes canoniques ψ_k et ψ_{k-1} , on peut transformer l’application de bord de l’homologie singulière

$$\partial_k : H_k(V_k, V_{k-1}) \rightarrow H_{k-1}(V_{k-1}, V_{k-2})$$

en une application de bord entre les groupes des *orientations* de dimensions k et $k-1$ de V .

Nous trouvons alors la définition suivante :

DEFINITION 2. *Le k -ème opérateur de bord ∂_k associé à un E.S.A. $V = V_k$ est alors défini comme l’unique homomorphisme $C_k(V) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(V_{k-1})$ qui rend commutatif le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} C_k(V) & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1}(V_{k-1}) \\ \psi_k \downarrow & & \downarrow \psi_{k-1} \\ H_k(V_k, V_{k-1}) & \xrightarrow{\partial_k} & H_{k-1}(V_{k-1}, V_{k-2}) \end{array}$$

i.e. :

$$\partial : C_k(V) \xrightarrow{\psi_k} H_k(V_k, V_{k-1}) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(V_{k-1}, V_{k-2}) \xrightarrow{\psi_{k-1}^{-1}} C_{k-1}(V_{k-1}).$$

Dans la suite nous noterons par abus $\partial_k = \partial$ quand il n’y aura pas d’ambiguïté.

Finalement nous sommes en état de donner la notion de bord d’une k -chaîne et de k -cycle stratifié abstrait de $\mathcal{X}$.

DEFINITION 3. Soit $\xi = (V, z)$ une k -chaîne de $\mathcal{X}$. Alors $z \in C_k(V)$ et en considérant la réduction du $(k-1)$ -squelette V_{k-1} de V par rapport à la $(k-1)$ -orientation ∂z on trouve une nouvelle chaîne notée

$$\partial\xi := (V_{k-1}, \partial z)_/ = (V_{k-1}/\partial z, \partial z)$$

et dite le *bord* de ξ .

La k -chaîne ξ est dite un k -cycle (*stratifié abstrait*) de $\mathcal{X}$ si son bord $\partial\xi$ coïncide avec la $(k-1)$ chaîne nulle $0 := (\emptyset, 0)$. Donc $\xi = (V, z)$ est un k -cycle de $\mathcal{X}$ si $\partial\xi = 0$ (ce qui arrive si et seulement si $\partial z = 0 \in C_k(V)$).

L’ensemble de tous les k -cycles stratifiés abstraits de $\mathcal{X}$ sera noté :

$$AZ_k(\mathcal{X}) = AZ_k(\mathcal{X}; G) := \left\{ \xi \mid \xi \text{ est un } k\text{-cycle S.A. de } \mathcal{X} \right\}.$$

L’ensemble $AZ_k(\mathcal{X})$ de tous les k -cycles stratifiés abstraits peut être muni d’une relation d’équivalence formellement identique à celle introduite par [Go]₂. Considérons en fait $[0, 1]$ stratifié par $I := \{0,]0, 1[, 1\}$ et munissons $A \times [0, 1]$ de la stratification naturelle induite par le produit des stratifications $\mathcal{X}$ et I que nous noterons par $\mathcal{X} \times I$. Alors, après avoir remarqué que $\mathcal{X} \times I$ est encore un E.S.A. (de dimension $k+1$), on peut introduire la relation suivante :

DEFINITION 4. Soient $\xi = (V, z)$ et $\xi' = (V', z')$ deux k -cycles stratifiés de l’E.S.A. $\mathcal{X}$. Nous dirons que ξ et ξ' sont *cobordants* et écrirons $\xi \equiv \xi'$ s’il existe une $(k+1)$ -chaîne $\zeta = (U, u)$ de $\mathcal{X} \times [0, 1]$ telle que :

$$\text{a) } \exists \epsilon > 0 \quad : \quad \begin{cases} U \cap (A \times [0, \epsilon]) = V \times [0, \epsilon[\\ U \cap (A \times]1 - \epsilon, 1]) = V' \times]1 - \epsilon, 1] \end{cases}$$

$$\text{b) } \partial\zeta = (\xi \times 0 - \xi' \times 1)_/ \quad (\text{où } / := \text{réduction}).$$

Le quotient de l’ensemble $AZ_k(\mathcal{X})$ par rapport à la relation de cobordisme stratifié sera dit *l’ensemble d’homologie stratifié* de $\mathcal{X}$ et sera noté par

$$AH_k(\mathcal{X}) := \frac{AZ_k(\mathcal{X})}{\equiv} = \left\{ [\xi] \mid \xi \text{ est un } k\text{-cycle S.A. de } \mathcal{X} \right\}.$$

REMARQUE. Pour tout $k > \dim \mathcal{X}$, on a $AH_k(\mathcal{X}) = \{[0]\}$.

Preuve. C’est évident car si $k > \dim \mathcal{X}$ alors il n’existe pas de k -cycle S.A. de $\mathcal{X}$ autre que le cycle nul. Donc $AZ_k(\mathcal{X}) = \{0\}$ et automatiquement $AH_k(\mathcal{X}) = \{0\}$.

2.3 : L'application de représentation homologique $R_a : AH_k(X) \rightarrow H_k(X)$

Nous allons définir une application $R_a : AH_k(X) \rightarrow H_k(X)$ entre l'ensemble d'homologie stratifiée et l'homologie singulière du support A de l'E.S.A. X .

Cette application est complètement analogue à l'application de Thom-Steenrod entre le bordisme différentiel d'un espace et son homologie singulière. La signification géométrique de cette application R_a est alors claire, comme on le voit aussi dans [Go]_{1,3}. Nous présentons la définition plus formelle introduite dans [Mu]₁, mais il est immédiat de vérifier que les deux définitions coïncident.

Soit alors, $[\xi] \in AH_k(X)$ la classe d'un k -cycle stratifié abstrait $\xi = (V, z)$ de X .

Comme $\xi = (V, z)$ est un k -cycle, nous avons $\partial z = 0$ et donc $\partial_k \psi_k(z) = 0$. L'exactitude du couple (V_k, V_{k-1}) en homologie singulière et la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \partial_k & & & \\
 & & & \longmapsto & & & \\
 H_k(V_{k-1}) & \longrightarrow & H_k(V_k) & \xrightarrow{i_*} & H_k(V_k, V_{k-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{k-1}(V_{k-1}) & \xrightarrow{j_*} & H_{k-1}(V_{k-1}, V_{k-2}) \\
 & & I_* \downarrow & & \psi_k \uparrow & & & & \uparrow \psi_{k-1} \\
 & & H_k(X) & & C_k(V_k) & \xrightarrow{\partial} & C_{k-1}(V_{k-1}) & &
 \end{array}$$

permettent d'écrire

$$0 = \partial_k \psi_k(z) = j_* \partial \psi_k(z) \quad \text{et} \quad \partial \psi_k(z) = 0.$$

Alors $\psi_k(z) \in \ker \partial = \text{Im } i_*$ et donc il provient d'un unique élément $i_*^{-1}(\psi_k(z))$ dont l'image dans $H_k(X)$, notée $R_a([\xi]) := I_* i_*^{-1}(\psi_k(z))$, est dite la *classe fondamentale* de ξ dans $H_k(X)$.

L'application qui associe à tout élément $[\xi] \in AH_k(X)$ la classe fondamentale de ξ dans X

$$R_a : AH_k(X) \rightarrow H_k(X) = H_k(A) \quad , \quad R_a([\xi]) = I_* i_*^{-1}(\psi_k(z))$$

est dite la *représentation homologique* de l'E.S.A. $X = (A, \Sigma)$.

2.4 : L'homologie (c) -régulière $BH_k(X)$

Dans cette section, nous considérons le cas où la stratification X est une stratification (c) -régulière. D'après K. Bekka [Be], on sait que X peut être munie d'un système de données de contrôle $\mathcal{T} = \{(T_S, \pi_S, \rho_S)\}_{S \in \Sigma}$ et cette propriété reste valable pour tout objet sous-stratifié (c) -régulier $\mathcal{V}$ de X .

Cette remarque est l'élément essentiel pour qu'une théorie BH_* analogue à la WH_* pour des stratifications de Whitney et à la AH_* pour des ensembles stratifiés abstraits puisse être obtenue en prenant pour X , ses cocycles $\mathcal{V}$ et ses cobordismes, des stratifications (c) -régulières(*). On obtient ainsi :

(*) La notation BH a été choisie en l'honneur de Karim Bekka qui a introduit la (c) -régularité [Be]₂ en 1988.

PROPOSITION 2. Si X est une stratification (c) -régulière et G un groupe abélien alors:

1) Pour tout O.S.S. (c) -régulier $\mathcal{V} = (V, \Sigma_{\mathcal{V}})$ de X , toutes les définitions de k -chaîne, de k -ème opérateur de bord $\partial : C_k(V) \rightarrow C_{k-1}(V_{k-1})$, de k -cycle, de k -cobordisme et les définitions des ensembles:

$$BZ_k(X) := BZ_k(X; G) := \left\{ \xi \mid \xi \text{ est un } k\text{-cycle } (c)\text{-régulier de } X \right\}$$

$$BH_k(X) := \frac{BZ_k(X)}{\equiv} = \left\{ [\xi] \mid \xi \text{ est un } k\text{-cycle } (c)\text{-régulier de } X \right\}$$

peuvent être données pour $\mathcal{V}$ sans aucun changement par rapport aux sections 2.1 et 2.2.

2) Avec les mêmes notations qu'à la section 2.3, on a une application (bien définie) de représentation homologique

$$R_b : BH_k(X) \rightarrow H_k(X) \quad , \quad R_b([\xi]) = I_* i_*^{-1}(\psi_k(z)) .$$

Preuve 1). Il suffit de remarquer que la notion de k -chaîne dépend seulement des propriétés de la stratification de $\mathcal{V}$ en tant qu' E.S.A. et que la même propriété reste valable pour la notion de k -ème opérateur de bord $\partial : C_k(V) \rightarrow C_{k-1}(V_{k-1})$ qui dépend de l'existence d'un S.D.C. (à l'aide d'une famille de lignes **[Go]**₂) nécessaire pour $\mathcal{V}$ pour construire des voisinages $T^p(V_{k-1}) = \cup_{\dim R \leq k-1} T^p R$ de V_{k-1} dans V , dont V_{k-1} est un retractor de déformation (voir 3.3. **[Mu]**₁, **[Go]**₃ 7.1 ou bien **[Go]**₁). Cela montre alors l'existence de la définition de k -cycle (c) -régulier de X et de l'ensemble $BZ_k(X)$.

Pour conclure, nous précisons qu'en considérant des cobordismes $\zeta \subseteq X \times [0, 1]$, (c) -réguliers, la relation de cobordisme (définition 4) reste encore une relation d'équivalence: la transitivité reste valable car la réunion de deux $(k+1)$ -chaînes (c) -régulières, dont l'intersection est réunion de strates communes, est évidemment encore une $(k+1)$ -chaîne (c) -régulière. L'ensemble $BH_k(X) := \frac{BZ_k(X)}{\equiv}$ existe alors également.

Preuve 2). Il suffit de remarquer que la section 2.3 n'utilise, en plus de l'existence des isomorphismes ψ_k et ψ_{k-1} , que l'exactitude du couple (V_k, V_{k-1}) . $\square$

De même que pour la théorie AH_k , évidemment on a :

REMARQUE 1. Pour tout $k > \dim X$, $BH_k(X) = \{[0]\}$. $\square$

D'autre part, les applications de représentation homologique, R_w pour des stratifications de Whitney, R_b pour des stratifications (c) -régulières et R_a pour des E.S.A., étant toutes définies par la même formule $R([([V, z])) = I_* i_*^{-1}(\psi_k(z))$, on a alors :

REMARQUE 2. 1) Si X est une stratification (c) -régulière, alors l'application $J : BH_k(X) \rightarrow AH_k(X)$, identité sur les représentants, rend le diagramme suivant commutatif:

$$BH_k(X) \xrightarrow{J} AH_k(X)$$

$$R_b \downarrow \quad (1) \quad \downarrow R_a$$

$$H_k(X) \xrightarrow{id} H_k(X) .$$

2) Si X est une stratification de Whitney, l'application $H : WH_k(X) \rightarrow BH_k(X)$, identité sur les représentants, rend alors commutatif le diagramme suivant:

$$WH_k(X) \xrightarrow{H} BH_k(X)$$

$$R_w \downarrow \quad (2) \quad \downarrow R_b$$

$$H_k(X) \xrightarrow{id} H_k(X) .$$

Preuve 1). Il faut seulement remarquer que J est bien définie car un k -cycle (c) -régulier de X est aussi un k -cycle S.A. de X et de même, un cobordisme $\zeta : \xi \equiv \xi'$ des cycles (c) -réguliers ξ et ξ' est aussi (un E.S.A. et) un cobordisme des k -cycles S.A. ξ et ξ' .

Preuve 2). C'est totalement similaire à la preuve de 1). $\square$

Quand X est une variété on retrouve pour l'homologie BH_* l'analogue du théorème de représentabilité de Goresky :

THEOREME. *Si X est une variété compacte alors*

$$R_b : BH_k(X) \rightarrow H_k(X) \quad \text{est une bijection.}$$

Preuve. A partir de la commutativité du diagramme (2) et de la bijectivité de la représentation de Goresky $R_w : WH_k(X) \rightarrow H_k(X)$ ([Go]_{1,3}) on obtient immédiatement que :

- i) $R_b : BH_k(X) \rightarrow H_k(X)$ est un épimorphisme;
- ii) $H : WH_k(X) \rightarrow BH_k(X)$ est un monomorphisme;
- iii) R_b est un monomorphisme $\iff H$ est un épimorphisme.

D'autre part, Goresky montre dans [Go]_{1,3} que tout cycle (b) -régulier ξ d'une variété X est (b) -régulièrement cobordant (via une déformation) à un cycle qui a des singularités et un S.D.C. coniques.

Comme l'élément essentiel pour construire une telle déformation sont les retractions d'une famille de ligne, lesquelles existent pour tout E.S.A. [Go]₂, alors la même déformation de [Go]₁ (pag. 61) permet dans notre cas d'obtenir que tout cycle ξ (c) -régulier de X est cobordant à un cycle ξ' qui a des singularités et un S.D.C. coniques.

Pour des stratifications ayant des singularités et un S.D.C. coniques, la condition (a) de Whitney équivaut à la condition (b) de Whitney [No] et donc à la (c) de Bekka. Alors ξ et le cobordisme $\zeta : \xi \equiv \xi'$ sont (c) -régulier.

Si X est une variété on en déduit alors que H est une application surjective et donc par la iii) $R_b : BH_k(X) \rightarrow H_k(X)$ est injective. $\square$

§3. Bijectivité de l'application de Représentation homologique pour des Ensembles Stratifiés Abstraites.

Ce paragraphe est dédié au correspondant du théorème précédent dans la théorie AH_k , qui sera démontré plus en général pour X un E.S.A. arbitraire (non nécessairement une variété). Nous obtiendrons alors l'analogue de la conjecture de Goresky ($R_w : WH_k(X) \rightarrow H_k(X)$ est une bijection) dans le cas où X est E.S.A. et pour la théorie $AH_k(X)$.

Supposons alors que X soit un E.S.A., (en particulier non nécessairement contenu dans $\mathbb{R}^N$).

Afin d'énoncer un théorème de bijectivité pour l'application $R_a : AH_k(X) \rightarrow H_k(X)$, il nous faut d'abord rappeler le théorème fondamental de triangulation d'un E.S.A..

Goresky a démontré en 1978 que tout E.S.A. compact $X = (A, \Sigma)$ admet une triangulation. Il existe donc un complexe simplicial $\mathcal{K} = (K, \Sigma_{\mathcal{K}})$ dont le support K est homéomorphe au support A de X .

Soit alors $f : K \rightarrow A$ l'homéomorphisme (i.e. la triangulation) obtenu par la méthode de triangulation du théorème de Goresky [Go]₂.

Nous nous proposons d'adapter ce théorème important et de démontrer que si nous considérons sur A la stratification $\mathcal{X}'$ (raffinement) de $\mathcal{X}$ dont les strates sont les images des simplexes de $\mathcal{K}$, alors

$$\Sigma_{\mathcal{X}'} := f(\Sigma_{\mathcal{K}}) = \left\{ f(\sigma) \mid \sigma \text{ est un simplexe (ouvert) de } \mathcal{K} \right\}$$

est encore un E.S.A. (de support A).

A partir de maintenant nous dirons “la stratification $\mathcal{X}$ ” au lieu de “la stratification $\Sigma_{\mathcal{X}}$ ” en utilisant des expressions analogues pour tous les autres E.S.A. qui interviendront dans la suite.

Avec ces notations, nous avons alors :

THEOREME 1. *Tout E.S.A. $\mathcal{X}$ muni de la stratification $\mathcal{X}'$ (en simplexes) induite par la triangulation de Goresky, $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{X}$ est encore un E.S.A..*

Preuve. Tout complexe simplicial $\mathcal{K}$ est un E.S.A. et il admet donc un système de données de contrôle $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$,

$$\mathcal{F}_{\mathcal{K}} = \{(T_{\sigma}, \pi_{\sigma}, \rho_{\sigma})\}_{\sigma \in \Sigma_{\mathcal{K}}} \quad , \quad \begin{cases} \pi_{\sigma} : T_{\sigma} \rightarrow \sigma \\ \rho_{\sigma} : T_{\sigma} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

tel que les propriétés $(A_1), \dots, (A_9)$ de [Ma] (définition 1, §8) soient vérifiées.

La triangulation de Goresky $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{X}'$ étant un difféomorphisme lisse sur les simplexes ouverts de $\mathcal{K}$, on obtient que $\mathcal{X}'$ est une partition en variétés de A .

D'autre part les conditions $(A_1), \dots, (A_5)$ étant des conditions de type topologique, elles sont préservées par l'homéomorphisme $f : K \rightarrow A$. La partition en variétés (simplexes ouverts) $\mathcal{X}' = f(\mathcal{K})$ de A les vérifie donc aussi.

De plus, $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{X}'$ étant un homéomorphisme qui transforme toute strate σ de $\mathcal{K}$ en une strate $f(\sigma)$ de $\mathcal{X}'$, f transforme aussi tout voisinage ouvert T_{σ} de σ dans $\mathcal{K}$ en un voisinage ouvert $T_{f(\sigma)} := f(T_{\sigma})$ de $f(\sigma)$ dans $\mathcal{X}'$.

Nous pouvons alors transformer, via f , le S.D.C. $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$ de $\mathcal{K}$ en une famille

$$\mathcal{F}_{\mathcal{X}'} = \{(T_{f(\sigma)}, \pi_{f(\sigma)}, \rho_{f(\sigma)})\}$$

où les applications $\pi_{f(\sigma)}$ et $\rho_{f(\sigma)}$ sont définies par la commutativité des diagrammes suivants:

$$\begin{array}{ccccc} T_{f(\sigma)} & \xrightarrow{\pi_{f(\sigma)}} & f(\sigma) & T_{f(\sigma)} & \xrightarrow{\rho_{f(\sigma)}} & \mathbb{R} \\ f^{-1} \downarrow & & \uparrow f & f^{-1} \downarrow & & \parallel \\ T_{\sigma} & \xrightarrow{\pi_{\sigma}} & \sigma & T_{\sigma} & \xrightarrow{\rho_{\sigma}} & \mathbb{R} . \end{array}$$

Nous montrons que la famille $\mathcal{F}_{\mathcal{X}'}$ est un S.D.C. pour $\mathcal{X}'$.

En fait, comme les propriétés $(A_6), (A_7), (A_9)$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{X}}$ se préservent par homéomorphisme, $\mathcal{F}_{\mathcal{X}'}$ les vérifie également.

Il nous reste donc à vérifier la condition (A_8) : pour tout couple de simplexes adjacents $f(\sigma) < f(\omega)$ (donc $\sigma < \omega$) l'application restriction

$$(\pi_{f(\sigma)}, \rho_{f(\sigma)}) : T_{f(\sigma)} \cap f(\omega) \rightarrow f(\sigma) \times \mathbb{R}$$

doit être une submersion si l'application

$$(\pi_\sigma, \rho_\sigma) : T_\sigma \cap \omega \rightarrow \sigma \times \mathbb{R}$$

l'est aussi.

Essentiellement, cela resulte du fait, déjà utilisé au début de la preuve, que la restriction $f_\omega : \omega \rightarrow f(\omega)$ de f à tout simplexe ouvert $\omega \in \mathcal{K}$, est un difféomorphisme sur le simplexe image $f(\omega) \in \mathcal{X}'$. Cependant, par souci de clarté, on examine deux cas distincts.

Cas 1) : $f(\sigma) < f(\omega)$ sont tous les deux dans une même strate de $\mathcal{X}$. La restriction $f_{\sigma \cup \omega} : \sigma \cup \omega \rightarrow f(\sigma) \cup f(\omega)$ de f à $\sigma \cup \omega$ est alors par construction un difféomorphisme sur les strates. La restriction $f|_{T_\sigma \cap \omega} : T_\sigma \cap \omega \rightarrow T_{f(\sigma)} \cap f(\omega)$ est donc un difféomorphisme et on en déduit par commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} T_{f(\sigma)} \cap f(\omega) & \xrightarrow{(\pi_{f(\sigma)}, \rho_{f(\sigma)})} & f(\sigma) \times \mathbb{R} \\ f^{-1} \downarrow & & \uparrow f \times id_{\mathbb{R}} \\ T_\sigma \cap \omega & \xrightarrow{(\pi_\sigma, \rho_\sigma)} & \sigma \times \mathbb{R} \end{array}$$

que l'application $(\pi_{f(\sigma)}, \rho_{f(\sigma)}) : T_{f(\sigma)} \cap f(\omega) \rightarrow f(\sigma) \times \mathbb{R}$ est une submersion par composition de submersions.

Cas 2) : $f(\sigma) < f(\omega)$ sont contenus dans deux strates différentes $X < Y$ de $\mathcal{X}$ (donc $f(\sigma) \subseteq X$ et $f(\omega) \subseteq Y$).

Nous rappelons alors que, dans ce cas, par construction de la triangulation $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$ [Go]₂, il existe une application simpliciale α correspondant via f à la restriction $\pi_{XY}|_{f(q)} : f(q) \rightarrow \pi_{XY}(f(q))$, $f(q)$ étant un simplexe de $S_{XY}(1)$, telle que :

- 1) le “cylindre d'application simplicial triangulé” C_α est un sous-complexe simplicial de $\mathcal{K}$, $C_\alpha \subseteq \mathcal{K}$;
- 2) le cylindre C_α est homéomorphe au cylindre d'application topologique M_α par un homéomorphisme $H_\alpha : C_\alpha \rightarrow M_\alpha(*)$;
- 3) $f(\omega)$ est un simplexe “vertical” de $f(C_\alpha)$, i.e. $f(\omega) \subseteq T_{XY}(1)$;
- 4) $f(\sigma) < \pi_{XY}(f(q))$;
- 5) la restriction $f|_{C_\alpha}$ de la triangulation f à C_α est définie par :

$$G_\alpha : C_\alpha \xrightarrow{H_\alpha} M_\alpha \longrightarrow \overline{\pi_{XY}^{-1}(\pi_{XY}(f(q))) \cap T_{XY}(1)} \quad , \quad G_\tau(p, t) = r_{XY}^t(f(p))$$

où les $\{r_X^t : T_X - X \rightarrow S_X(t)\}_{X \in \Sigma, t \in [0,1]}$ sont les applications d'une famille de lignes.

D'autre part, en utilisant la régularité de l'application r_{XY}^t , il est immédiat de vérifier que l'application G_α est un homéomorphisme stratifié dont la restriction à toute strate (simplexe ouvert) est un difféomorphisme (même en tenant compte de l'homéomorphisme stratifié $H_\alpha : C_\alpha \rightarrow Z_\alpha$).

Comme la restriction $f|_{T_\sigma \cap \omega} : T_\sigma \cap \omega \rightarrow T_{f(\sigma)} \cap f(\omega)$ coïncide avec la restriction $G|_{T_\sigma \cap \omega} := G_\alpha|_{T_\sigma \cap \omega}$ on obtient, par commutativité du diagramme :

(*) Avec les notations de [Go]₂ $C_\alpha = S_q$, $M_\alpha = M_q$ et $H_\alpha = H_q$

$$\begin{array}{ccc}
T_{f(\sigma)} \cap f(\omega) & \xrightarrow{(\pi_{f(\sigma)}, \rho_{f(\sigma)})} & f(\sigma) \times \mathbb{R} \\
G_{/}^{-1} \downarrow & & \uparrow f \times id_{\mathbb{R}} \\
T_{\sigma} \cap \omega & \xrightarrow{(\pi_{\sigma}, \rho_{\sigma})} & \sigma \times \mathbb{R}
\end{array}$$

que l'application $(\pi_{f(\sigma)}, \rho_{f(\sigma)}) : T_{f(\sigma)} \cap f(\omega) \rightarrow f(\sigma) \times \mathbb{R}$ est une submersion par composition de submersions.

Finalement, les conditions $(A_1), \dots, (A_9)$ dans la définition de E.S.A. de [Ma] étant vérifiées, on conclut que la stratification $\mathcal{X}'$ induite par la triangulation de Goresky $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{X}$ munit le support de $\mathcal{X}$ d'une structure d'ensemble stratifié abstrait (raffinement de $\mathcal{X}$). $\square$

Le théorème précédent fournit l'argument essentiel pour démontrer la bijectivité de l'application de représentation homologique $R_a : AH_k(\mathcal{X}) \rightarrow H_k(\mathcal{X})$. Goresky, qui avait introduit l'application $R_w : WH_k(\mathcal{X}) \rightarrow H_k(\mathcal{X})$, avait montré la bijectivité de R_w pour $\mathcal{X}$ une variété lisse et l'avait conjecturée pour $\mathcal{X}$ une stratification de Whitney arbitraire.

Pour l'homologie $AH_*(\mathcal{X})$ la propriété correspondante de la *conjecture de Goresky* est alors valable. En fait nous avons :

THEOREME 2. *La "représentation homologique" de Goresky d'un E.S.A. $\mathcal{X}$ compact*

$$R_a : AH_k(\mathcal{X}) \rightarrow H_k(\mathcal{X}) \quad \text{est une bijection.}$$

Preuve. La démonstration est similaire à celle de Goresky (Théor. 3.4., [Go]₂) obtenue pour l'homologie $WH_k(\mathcal{X})$ d'une variété lisse et dans laquelle l'auteur utilise une triangulation lisse (et donc (b)-régulière) de la variété considérée. Il suffira juste de considérer la triangulation d'un E.S.A. au lieu de la triangulation de la variété.

Surjectivité. Comme l'homologie singulière $H_k(\mathcal{X})$ est isomorphe à l'homologie simpliciale $H_k^{sim}(\mathcal{X}')$, toute classe $\alpha \in H_k(\mathcal{X})$ peut être représentée par un cycle simplicial ξ de $\mathcal{X}'$ dont les simplexes sont des strates de $\mathcal{X}'$. La stratification $\mathcal{X}'$ étant un E.S.A. par le théorème 1, alors la stratification $\mathcal{V}$ en simplexes (ouverts) de ξ est un sous-E.S.A. de $\mathcal{X}$.

Par conséquent ξ définit un k -cycle S.A., $\xi = (\mathcal{V}, z)$ de $\mathcal{X}$ pour lequel, en considérant la classe de cobordisme $[\xi]_{\mathcal{X}} \in AH_k(\mathcal{X})$, on a $R_a([\xi]_{\mathcal{X}}) = \alpha$.

Injectivité. Soient $\xi = (\mathcal{V}, z)$ et $\xi' = (\mathcal{V}', z')$ deux cycles stratifiés abstraits de $\mathcal{X}$ dont les classes $[\xi]_{\mathcal{X}}$ et $[\xi']_{\mathcal{X}} \in AH_k(\mathcal{X})$ ont la même image par R_a dans $H_k(\mathcal{X})$:

$$R_a([\xi]_{\mathcal{X}}) = R_a([\xi']_{\mathcal{X}}).$$

Comme pour toute chaîne stratifiée abstraite de support $\mathcal{U}$ la restratification $(\mathcal{X} - \mathcal{U}) \cup \mathcal{U}$ est encore un E.S.A., alors en considérant la nouvelle stratification $\mathcal{H}$ de $\mathcal{X} \times [0, 1]$ dont les strates sont obtenues par

$$\left\{ \begin{array}{ll}
(\mathcal{X} \times 0 - \mathcal{V} \times 0) \cup \mathcal{V} \times 0 & \text{dans } \mathcal{X} \times 0 \\
\mathcal{X} \times]0, 1[& \text{dans } \mathcal{X} \times]0, 1[\\
(\mathcal{X} \times 1 - \mathcal{V}' \times 1) \cup \mathcal{V}' \times 1 & \text{dans } \mathcal{X} \times 1,
\end{array} \right.$$

on a que $\mathcal{H}$ est encore un E.S.A.

De nouveau d’après le théorème 1, $\mathcal{H}$ admet une triangulation $\mathcal{H}'$ dans laquelle $\mathcal{V} \times 0$ et $\mathcal{V}' \times 1$ sont restratifiés par des raffinements $\mathcal{W} \times 0$ et $\mathcal{W}' \times 1$ en simplexes (de $\mathcal{X}'$) qui sont encore deux sous-E.S.A. de $\mathcal{X}$.

Par conséquent, $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}'$ définissent deux k -cycles η et η' de l’homologie simpliciale de $\mathcal{X}$ qui peuvent être interprétés comme deux k -cycles stratifiés abstraits. $\square$

Si $\mathcal{X}$ est une stratification (c) -régulière arbitraire (non nécessairement une variété lisse), nous n’avons pas la preuve de la bijectivité de R_b , laquelle pourrait être obtenue si l’on démontre un théorème de triangulation (c) -régulière pour $\mathcal{X}$.

§4. L’opération de “somme transversale” dans $AH_k(\mathcal{X})$ et $BH_k(\mathcal{X})$.

Dans ce paragraphe, nous considérons une application parmi les plus significatives du théorème de transversalité-isotopie établi au chapitre III. Celui-ci sera utilisé comme dans [Mu]₁ (§2. 3) où l’on applique le *Transversality Lemma* de Goresky (5.3. [Go]₃) pour les cycles d’une variété afin de munir l’ensemble d’homologie $WH_k(\mathcal{X})$ d’une opération de groupes abéliens et il jouera dans les théories $AH_k(\)$ et $BH_k(\)$ le même rôle que le “Moving Lemma” dans la théorie des anneaux de Chow $CH_*(\)$ pour les cycles algébriques d’une variété algébrique [Fu].

Comme notre théorème de transversalité est valable pour les sous-E.S.A. d’un E.S.A. arbitraire $\mathcal{X}$ et comme nous disposons également de la bijectivité de la représentation homologique $R_a : AH_k(\mathcal{X}) \rightarrow H_k(\mathcal{X})$ pour tout E.S.A. $\mathcal{X}$ arbitraire (non nécessairement une variété), nous avons les arguments suffisants pour obtenir des résultats similaires à ceux de [Mu]₁ (§2. 3) pour la catégorie plus générale des E.S.A.

Quand $\mathcal{X}$ est une variété lisse, la réunion de deux E.S.A. et/ou de deux O.S.S. (c) -réguliers transversaux dans $\mathcal{X}$ est munie de façon naturelle d’une partition en strates, la rendant encore un E.S.A. ou une stratification (c) -régulière [Be]. On obtient alors totalement l’analogue du théorème homologique de [Mu]₁ (§2. 3).

Quand $\mathcal{X}$ est une variété, les applications $R_a : AH_k(\mathcal{X}) \rightarrow H_k(\mathcal{X})$ et $R_b : BH_k(\mathcal{X}) \rightarrow H_k(\mathcal{X})$ étant des bijections, les ensembles $AH_k(\mathcal{X})$ et $BH_k(\mathcal{X})$ sont munis d’une opération de groupe héritée par préimage de $H_k(\mathcal{X})$ et cette opération est la seule par laquelle R_a et R_b deviennent des isomorphismes. Nous montrerons que cette opération peut être décrite au niveau des cycles par la réunion de deux cycles en position de transversalité réciproque dans $\mathcal{X}$. Une propriété similaire et légèrement plus faible reste valable pour $AH_k(\mathcal{X})$ quand $\mathcal{X}$ est un E.S.A. arbitraire (section 4.2).

Ce paragraphe sera donc presque entièrement déduit, en adaptant aux ensembles $AH_k(\mathcal{X})$ et $BH_k(\mathcal{X})$ le §2. 3 de [Mu]₁ auquel nous renvoyons également pour les démonstrations omises ici.

DEFINITION 1. Soit $\mathcal{X}$ un E.S.A. et soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ deux sous-E.S.A. (fermés) transversaux dans $\mathcal{X}$. Alors, la partition en variétés connexes

$$\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W} := \left\{ c.c.(A \cap B) \right\}_{A \in \mathcal{V}, B \in \mathcal{W}}$$

de $V \cap W$, où $c.c.(U)$ désigne “la famille des composantes connexes de U ”, est dite l’*intersection transversale* de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ (dans $\mathcal{X}$) et de même, la partition en variétés connexes

$$\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W} := \left\{ c.c.(A - W), c.c.(B - V), c.c.(A \cap B) \right\}_{A \in \mathcal{V}, B \in \mathcal{W}}$$

de $V \cup W$ est dite la *réunion transversale* de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ (dans X).

Le cas où X se réduit à une variété est réglé par le théorème suivant de Bekka :

THEOREME (Bekka). *Si $X = \{M\}$ est la stratification triviale d'une variété et si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont deux O.S.S. (c)-réguliers (resp. deux sous-E.S.A.) transversaux dans M alors $\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W}$ et $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}$ sont deux O.S.S. (c)-réguliers (resp. deux sous-E.S.A.) de X (en particulier ils vérifient la locale finitude et la condition de frontière).*

Preuve. Si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont (c)-réguliers c'est précisément la proposition 2.7 dans [Be]. Par contre, pour $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ des E.S.A. il (faut et) suffit de remarquer que la proposition 2.6, le lemme 2 et la proposition 2.8 de [Be] restent valables en considérant pour les E.S.A. $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ car on n'utilise que (la structure conique locale conséquence de) la trivialité topologique valable pour tous les E.S.A. [Ma]. $\square$

D'autre part, quand X n'est pas une variété, il y a quelques problèmes :

ATTENTION. Quand X est un E.S.A. qui ne se réduit pas à une variété, l'intersection $\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W}$ et la réunion $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}$ transversale de deux objets sous-stratifiés de X ne définissent pas en général deux stratifications au sens entendu jusqu'à présent car les partitions en strates $\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W}$ et $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}$ ne vérifient pas automatiquement la condition de *locale finitude* et la *condition de frontière* (*).

La figure 1 (respectivement la figure 2) ci-dessous montre un exemple de stratifications $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ dont la réunion transversale $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}$ ne vérifie pas la condition de "frontière" (respectivement la condition de "locale finitude").

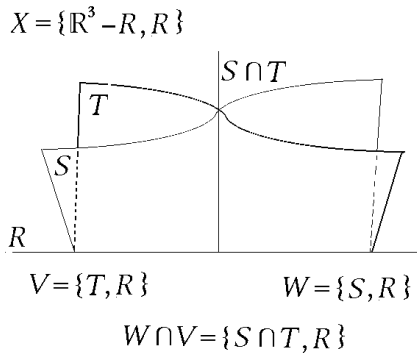


figure 1

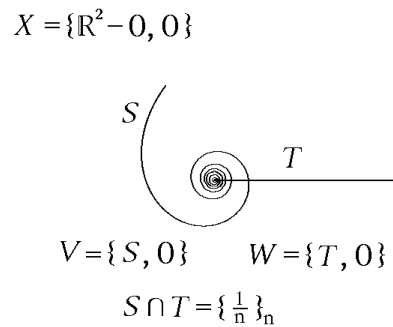


figure 2

REMARQUE 1. En revanche, dans les cas où les partitions en variétés connexes $\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W}$ et $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}$ vérifient la "locale finitude" et la "condition de frontière", elles définissent alors automatiquement des stratifications de $V \cap W$ et de $V \cup W$. Si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ vérifient de plus des conditions de régularité supplémentaires comme "être un E.S.A." ou la condition (b) de Whitney ou la condition (c) de Bekka, une telle régularité se préserve alors pour $\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W}$ et pour $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}$ (voir encore [Be]).

REMARQUE 2. Dans la théorie cohomologique WH^* introduite par Goresky, plusieurs propriétés et/ou opérations fondamentales des cocycles, comme les produits *cup* et *cap*, l'existence des *morphismes induits* f^* et l'opération de somme se réinterprètent géométriquement via la bijection $R^w : WH^k(X) \rightarrow H^k(X)$ à travers l'intersection transversale, la

(*) Comparez cette remarque avec le problème posé au chapitre III au §3.2

préimage transversale (à une application contrôlée f) [Go]_{1,3} et la réunion transversale [Mu]₁. Nous le soulignons maintenant mais ce sera plus clair au §6, que l'idée *spéciale* de Goresky d'introduire pour les cocycles la condition de π -fibre lui permet d'obtenir ces résultats géométriques importants.

Dans la suite de cette section, nous nous intéresserons particulièrement au cas où la réunion transversale $\mathcal{W} \cup_t \mathcal{V}$ de deux sous-E.S.A. $\mathcal{W}$ et $\mathcal{V}$ (resp. O.S.S. (c)-réguliers) de X est encore un E.S.A. (resp. O.S.S. (c)-régulier) de X même quand X n'est pas la stratification triviale d'une variété.

Soit alors X un E.S.A. (resp. une stratification (c)-régulière) et considérons deux k -chaînes S.A. (resp. (c)-régulières) $\xi_V = (\mathcal{V}, z_V)$ et $\xi_W = (\mathcal{W}, z_W)$ de X telles que $\mathcal{W} \cup_t \mathcal{V}$ soit encore un sous-E.S.A. (resp. un O.S.S. (c)-régulière) de X .

De la même manière selon laquelle les stratifications $\mathcal{W}$ et $\mathcal{V}$ de W et V se restratifient dans la réunion transversale $\mathcal{W} \cup_t \mathcal{V}$, les groupes des k -orientations $C_k(V)$ de $\mathcal{V}$ et $C_k(W)$ de $\mathcal{W}$ peuvent être plongés dans le groupe des k -orientations $C_k(V \cup W)$ de $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}$. On a en fait facilement les monomorphismes “d'inclusion” :

$$\begin{aligned} \beta_V : C_k(V) &\rightarrow C_k(V \cup_t W) \quad , \quad \beta_V(z_V) = \sum_{j \in J_k} g_j \left(\sum c.c.(V_j^k - W) \right) \\ \beta_W : C_k(W) &\rightarrow C_k(V \cup_t W) \quad , \quad \beta_W(z_W) = \sum_{s \in \Gamma_k} f_s \left(\sum c.c.(W_s^k - V) \right) \end{aligned}$$

où nous avons noté

$$z_V = \sum_{j \in J_k} g_j V_j^k \in C_k(V) \quad \text{et} \quad z_W = \sum_{s \in \Gamma_k} f_s W_s^k \in C_k(W).$$

DEFINITION 2. Soit X un E.S.A. (resp. une stratification (c)-régulière). Si $\xi = (V, z_V)$ et $\xi_W = (W, z_W)$ sont deux k -chaînes S.A. (resp. (c)-régulières) de X dont les stratifications $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$, transverses dans X , sont telles que la réunion transverse $\mathcal{W} \cup_t \mathcal{V}$ est un E.S.A (resp. une stratification (c)-régulière), nous dirons que *les k -chaînes $\xi = (V, z_V)$ et $\xi_W = (W, z_W)$ sont transversales dans X .*

Dans ce cas, on trouve une k -chaîne S.A. (resp. (c)-régulière)

$$\xi_V +_t \xi_W := (V \cup_t W, \beta_V(z_V) + \beta_W(z_W))$$

qui est dite la *somme transversale* des chaînes ξ_V et ξ_W dans X .

PROPOSITION 1. Soit X un E.S.A. (resp. une stratification (c)-régulière). Si $\xi = (V, z_V)$ et $\xi_W = (W, z_W)$ sont deux k -chaînes S.A. (resp. (c)-régulières) transversales dans X , leurs bords $\partial \xi = (V_{k-1}, \partial z_V)_f$ et $\partial \xi_W = (W_{k-1}, \partial z_W)_f$ le sont aussi et on a :

$$\partial(\xi_V +_t \xi_W) = \partial \xi_V +_t \partial \xi_W.$$

En particulier, la somme transversale de deux k -cycles de X est encore un k -cycle de X .

Preuve. [Mu]₁. $\square$

4.1 : Le cas où $X = \{M\}$ est une variété

Dans cette section, on considère le cas où $X = \{M\}$ est la stratification triviale d'une variété. Soient maintenant ξ_V et ξ_W deux k -cycles (c) -réguliers (resp. S.A.) de X .

Le théorème de transversalité stratifiée assure qu'il existe un O.S.S. (c) -régulier (resp. un sous-E.S.A.) $\mathcal{W}'$ de X qui est une déformation par isotopie de $\mathcal{W}$ de X et qui de plus est transverse à $\mathcal{V}$ dans X .

Soit alors $\Phi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ l'isotopie définissant $\mathcal{W}'$ i.e. telle que $\mathcal{W}' := \Phi_1(\mathcal{W})$.

Considérons alors la "déformation" Ψ induite par Φ de $X \times I$ ($I =$ stratification de $[0, 1]$),

$$\Psi : X \times I \rightarrow X \times I \quad , \quad \Psi(x, t) = (\Phi(x, t), t) .$$

X étant une variété, Φ et donc Ψ sont alors de classe C^∞ et comme la (c) -régularité se préserve par des applications C^1 [Be], on trouve que

$$\mathcal{W}' := \Phi_1(\mathcal{W}) \subseteq X \quad \text{et} \quad \mathcal{U} := \Psi(\mathcal{W} \times I) \subseteq X \times I$$

sont des O.S.S. (c) -réguliers (resp. des sous-E.S.A.) de X et de $X \times I$ déformations de $\mathcal{W}$ et de $\mathcal{W} \times I$.

A présent, la $(k+1)$ -orientation $z_{W \times [0, 1]} = \sum_{s \in \Gamma_k} f_s W_s^k \times]0, 1[$ de $\xi_W \times [0, 1]$ se transforme grâce à Ψ en la $(k+1)$ -orientation $z_U = \sum_{s \in \Gamma_k} f_s \Psi(W_s^k \times]0, 1[)$ de $\mathcal{U}$ de sorte qu'on trouve la $(k+1)$ -chaîne de $X \times I$:

$$\zeta_U := (U, z_U) \quad , \quad z_U = \sum_{s \in \Gamma_k} f_s \Psi(W_s^k \times]0, 1[) .$$

Enfin, Ψ définit (au niveau $t = 1$) une k -orientation $z_{W' \times 1} := \sum_{s \in \Gamma_k} f_s \Phi_1(W_s^k \times 1) \in C_k(W' \times 1)$ de sorte qu'on en déduit la k -chaîne $\xi_{W'}$ de X de stratification $\mathcal{W}'$:

$$\xi_{W'} := (W', z_{W'}) \quad , \quad z_{W'} := \sum_{s \in \Gamma_k} f_s \Phi_1(W_s^k)$$

pour laquelle on a :

LEMME. La k -chaîne $\xi_{W'} := (\mathcal{W}', z_{W'})$ vérifie :

- 1) $\xi_{W'}$ est un k -cycle (c) -régulier (resp. S.A.) de X ;
- 2) $\zeta_U : \xi_W \equiv \xi_{W'}$, i.e. ils sont cobordants avec cobordisme ζ_U ;
- 3) la somme transversale $\xi_V +_t \xi_{W'}$ est un k -cycle (c) -régulier (resp. S.A.) de X .

Preuve 1). En rappelant que ξ_W est un cycle par hypothèse, la preuve se réduit à un cas particulier de la preuve de la proposition 2, affirmation 4) au §5, où l'on montre une propriété analogue pour X un E.S.A. et $f : X \rightarrow \mathcal{Y}$ un plongement stratifié abstrait (maintenant, X et $\Phi_1 : X \rightarrow X$ sont respectivement une variété et un difféomorphisme).

Preuve 2). La preuve s'obtient comme pour la *preuve 1)* en se référant maintenant à la proposition 3 du §5 (basée sur l'affirmation 3) de la proposition 2). En fait $\zeta_U = \Psi_*(\xi_W \times I)$ étant le transformé du cobordisme identique $\xi_W \times I : \xi_W \equiv \xi_W$ on obtient :

$$\zeta_U : \Psi|_{X \times 0*}(\xi_W) \equiv \Psi|_{X \times 1*}(\xi_W) \quad \text{i.e.} \quad \zeta_U : \Phi_{0*}(\xi_W) \equiv \Phi_{1*}(\xi_W) \quad \text{i.e.} \quad \zeta_U : \xi_W \equiv \xi_{W'} .$$

Preuve 3). Comme X est une variété et ξ_V et $\xi_{W'}$ sont deux chaînes (c) -régulières (resp. S.A.) de X , la somme transversale $\xi_V +_t \xi_{W'}$ définit encore une k -chaîne (c) -régulière (resp. S.A.) de X car $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}'$ est encore une stratification (c) -régulière (resp. un sous-E.S.A.) de X grâce au théorème précédent (de Bekka).

D'autre part, on obtient immédiatement que $\partial(\xi_V +_t \xi_{W'}) = 0$ par la proposition 1 car ξ_V est un cycle par hypothèse et $\xi_{W'}$ est un cycle par la 1). $\square$

REMARQUE 3. Dans le cas où $\mathcal{X}$ est un E.S.A. les affirmations 1) et 2) du lemme ci-dessus restent valables; par contre la validité de l'affirmation 3) est subordonnée au fait que le cycle S.A. somme transversale $\xi_V +_t \xi_{W'}$ existe, i.e. d'après la remarque 1 que la réunion transversale $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}'$ vérifie les conditions de locale finitude et de frontière. $\square$

REMARQUE 4. Dans le cas où $\mathcal{X}$ est une stratification (c)-régulière pour que la 1) du lemme soit vérifiée il faut que la stratification image $\mathcal{W}' = \Phi_1(W)$ soit (c)-régulière. Cela se vérifie (chapitre III, §4) si l'on dispose de la semidifférentiabilité de l'isotopie stratifiée $\Phi_1 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. Dans ce cas $\Psi : \mathcal{X} \times I \rightarrow \mathcal{X} \times I$ est également semidifférentiable et la 2) reste valable. Enfin la validité de l'affirmation 3) est subordonnée aux mêmes difficultés rencontrées dans la remarque 3 (pour des E.S.A.). $\square$

Le lemme précédent nous permet d'utiliser le théorème de transversalité afin de transporter sur les ensembles $BH_k(\mathcal{X})$ et $AH_k(\mathcal{X})$ l'opération de somme transversale définie précédemment uniquement pour des k -cycles. Dans le théorème qui suit, nous notons alors $EH_k(\mathcal{X})$ l'ensemble d'homologie $BH_k(\mathcal{X})$ d'une stratification (c)-régulière $\mathcal{X}$ ou bien l'ensemble d'homologie $AH_k(\mathcal{X})$ d'un E.S.A. $\mathcal{X}$ et similairement R_e désigne l'application de représentation homologique R_b ou bien R_a .

THEOREME 1. Si $\mathcal{X} = \{M\}$ est la stratification triviale d'une variété, l'opération

$$\begin{aligned} \cup_t : EH_k(\mathcal{X}) \times EH_k(\mathcal{X}) &\longrightarrow EH_k(\mathcal{X}) \\ ([\xi_V], [\xi_W]) &\longmapsto [\xi_V] \cup_t [\xi_W] := [\xi_V +_t \xi_{W'}] \end{aligned}$$

est bien définie dans l'ensemble $EH_k(\mathcal{X})$ et le munit d'une structure de groupe abélien pour laquelle l'application de représentation homologique

$$R_e : EH_k(\mathcal{X}) \rightarrow H_k(\mathcal{X}) \quad \text{est un isomorphisme de groupes.}$$

Preuve. En regardant [Mu]₁ §2.3 où les preuves ont été données pour des k -chaînes (b)-régulières de $\mathcal{X}$, on constate immédiatement que la démonstration reste valable sans aucune difficulté en considérant des k -chaînes (c)-régulières et/ou stratifiées abstraites de la variété $\mathcal{X}$.

Remarquons aussi que, dans la preuve, le théorème de transversalité intervient une deuxième fois au niveau des cobordismes pour démontrer que l'application $+$ est bien définie. $\square$

4.2 : Le cas où $\mathcal{X}$ est un ensemble stratifié abstrait arbitraire

L'un des buts originels de ce travail était de montrer le théorème 1, déduit seulement quand $\mathcal{X}$ est une variété, dans le cas général où $\mathcal{X}$ est un E.S.A. et/ou une stratification (c)-régulière arbitraires. Malheureusement, dans ce cas, le lemme de transversalité ne s'adapte pas de manière convenable car on rencontre la difficulté (présent aussi dans le cas de la théorie WH_* [Mu]₁) de ne pas disposer de la propriété suivante :

(i) " $\forall [\xi_W], [\xi_V] \in AH_k(X)$ (resp. $EH_k(X)$), on peut représenter la classe $[\xi_W]$ par un k -cycle $\xi_{W'}$ cobordant à ξ_W et transverse à ξ_V ".

Ici nous précisons que même si $\mathcal{W}'$ est transverse à $\mathcal{V}$ dans X pour que la chaîne $\xi_{W'}$ soit transverse à la chaîne ξ_V on demande (dans la définition 2) que la réunion transverse $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}'$ soit encore une stratification et cette condition peut ne pas se vérifier, comme dans les exemples des figures 1 et 2 (voir aussi avec les remarques 3 et 4).

Dans le cas où X était une stratification de Whitney, on avait comme obstruction supplémentaire le fait que "*l'objet sous-stratifié $\mathcal{W}'$ de X déformé de $\mathcal{W}$ ne préserve pas en général la (b)-régularité (de $\mathcal{W}$)*", condition nécessaire pour représenter un élément de $WH_k(X)$. Cette difficulté est encore présente quand on considère pour X une stratification (c)-régulière qui ne se réduit pas à une variété (remarque 4).

D'autre part, dans le cas de $AH_k(X)$ où X et ses cycles sont considérés comme ensembles stratifiés abstraits, on dispose comme avantage du fait que l'application de représentation $R_a : AH_k(X) \rightarrow H_k(X)$ est une bijection (théorème 1 §3).

L'application $R_a : AH_k(X) \rightarrow H_k(X)$ étant une bijection, l'ensemble $AH_k(X)$ est muni d'une opération de groupe $+$: $AH_k(X) \times AH_k(X) \rightarrow AH_k(X)$, héritée via R_a par préimage de $H_k(X)$ et cette opération est la seule par laquelle R_a devient un isomorphisme de groupes. Une telle opération étant déduite à partir de l'application de représentation R_a nous l'appellerons la R_a -somme de $AH_k(X)$.

Les difficultés exposées ci-dessus nous empêchent de démontrer que

(*) : "*pour tout couple d'éléments $\alpha, \beta \in EH_k(X)$, on peut définir une somme transversale de k -cycles.*"

propriété valable, quand X se réduit à une variété, pour les théories $BH_k(X)$, $AH_k(X)$ (théorème 1) et pour $WH_k(X)$ [Mu]₁. Cependant dans la théorie AH_* , la bijectivité de R_a nous aide à reconnaître que la somme représentée par la réunion transversale des k -cycles S.A., quand elle existe, coïncide avec la R_a -somme de $AH_k(X)$.

PROPOSITION 2. Si X est un E.S.A. et si $\xi_V = (\mathcal{V}, z_V)$ et $\xi_W = (\mathcal{W}', z_W)$ sont deux k -cycles S.A. de X tels que la réunion transverse $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}'$ soit encore un E.S.A., la R_a -somme, $[\xi_V] + [\xi_W] \in AH_k(X)$ se représente alors par le k -cycle somme transversale $\xi_V +_t \xi_W$:

$$[\xi_V] + [\xi_W] = [\xi_V +_t \xi_W].$$

Preuve. C'est précisément la même que dans [Mu]₁ "Theorem §2.3 page 183" à partir de : "*About the second statement, it is sufficient to show that*" :

$$R([\xi_V +_t \xi_W]) = R([\xi_V]) + R([\xi_W]).$$

Nous soulignons que l'hypothèse " X variété" présente dans l'énoncé du "Theorem §2.3" servait dans [Mu]₁ uniquement pour déduire la bijectivité de $R_a : WH_k(X) \rightarrow H_k(X)$ et que (différemment) pour la théorie $AH_k(X)$ la bijectivité de $R_a : AH_k(X) \rightarrow H_k(X)$ est valable pour X un E.S.A. arbitraire grâce au théorème du §3. $\square$

Avec la même preuve pour l'ensemble $BH_k(X)$ ne disposant pas de la bijectivité de $R_b : BH_k(X) \rightarrow H_k(X)$ on peut seulement dire que :

PROPOSITION 3. Si X une stratification (c)-régulière, et $\xi_V = (\mathcal{V}, z_V)$ et $\xi_W = (\mathcal{W}, z_W)$ sont deux k -cycles (c)-réguliers de X tels que la réunion transverse $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}$ soit encore une stratification (c)-régulière, alors $R_b([\xi_V +_t \xi_W]) = R_b([\xi_V]) + R_b([\xi_W])$. $\square$

Le théorème 1 à la section 4.1 et la proposition 2 précédente nous suggèrent la définition suivante :

DEFINITION 3. Soit $\mathcal{X}$ un E.S.A. (resp. une variété). L'opération définie par $[\xi_V] + [\xi_W] := [\xi_V +_t \xi_W]$, laquelle *a priori* est définie sur l'intier $AH_k(\mathcal{X})$ (resp. $BH_k(\mathcal{X})$) seulement quand $\mathcal{X}$ est une variété est dite la *somme transversale dans $AH_k(\mathcal{X})$* (resp. *dans $BH_k(\mathcal{X})$*).

Donc si $\mathcal{X}$ est une variété, le théorème 1 nous dit que la R_b -somme de $BH_k(\mathcal{X})$ et la R_a -somme de $AH_k(\mathcal{X})$ coïncident avec la somme transversale et dans le cas général où $\mathcal{X}$ est un E.S.A. arbitraire, la proposition 2 dit que la R_a -somme de $AH_k(\mathcal{X})$ est l'unique prolongement naturel de la somme transversale sur tout $AH_k(\mathcal{X})$.

Par la suite, il nous sera alors permis de confondre les deux opérations et d'appeler le groupe $(BH_k(\mathcal{X}), +)$ comme le k^{eme} -groupe d'homologie (c)-régulière de $\mathcal{X}$ (quand $\mathcal{X}$ est une variété) et le groupe $(AH_k(\mathcal{X}), +)$ comme le k^{eme} -groupe d'homologie stratifiée abstraite de $\mathcal{X}$ (quand $\mathcal{X}$ est un E.S.A. arbitraire).

REMARQUE 5. Un résultat plus complet, concernant la somme transversale dans $AH_k(\mathcal{X})$ et du même type que celui obtenu pour $\mathcal{X}$ variété (théorème 1), pourrait être obtenu pour un E.S.A. $\mathcal{X}$ en améliorant le théorème de transversalité-isotopie du chapitre III selon la manière proposée au *problème* concluant le §3 du chapitre III.

Nous terminons la section en montrant que l'opération de somme transversale redonne les opérations plus classiquement utilisées pour les groupes d'homologie.

Plus précisément, nous voyons que la somme transversale respecte aussi bien les stratifications que la somme dans $C_k(V)$ quand il s'agit de sommer deux cycles ξ_V et ξ_W dont les k -orientations

$$z_V = \sum_{j \in J_k} g_j V_j^k \in C_k(V) \quad , \quad z_W = \sum_{s \in I_k} f_s W_s^k \in C_k(W)$$

sont telles que pour tout couple de strates V_j^k et W_s^k (à coefficients $g_j \neq 0$ et $f_s \neq 0$), les strates sont soit égales soit disjointes.

Dans ce cas, $V \cup W$ admet la stratification naturelle

$$\mathcal{V} \cup \mathcal{W} = \{V_j^k\}_{g_j \neq 0} \cup \{W_s^k\}_{f_s \neq 0}$$

et il suffit de sommer les k -orientations z_V et z_W dans $C_k(V \cup W)$. En fait, on a :

COROLLAIRE 1. Si $\mathcal{X}$ est un E.S.A., dans le groupe $AH_k(\mathcal{X})$ muni de la somme transversale les propriétés suivantes sont vérifiées :

1) Si $V \cup W$ se stratifie par la réunion des strates de V et de W , alors

$$[(V, z_V)] + [(W, z_W)] = [(V \cup W, z_V + z_W)].$$

2) L'élément opposé d'un élément $[\xi_V] = [(V, z_V)] \in AH_k(\mathcal{X})$ s'obtient en remplaçant les coefficients de z_V par leurs opposés :

$$-[(V, z_V)] = [(V, -z_V)].$$

3) Le zéro de $AH_k(\mathcal{X})$ se représente par le cycle nul : $0 = [(\emptyset, 0)]$.

Preuve. Elle découle facilement par application du théorème 2 et grâce à la bijectivité de $R_a : AH_k(\mathcal{X}) \rightarrow H_k(\mathcal{X})$ (pour plus de détails voir [Mu]₁). $\square$

COROLLAIRE 2. Si X est une variété, les mêmes propriétés énoncées au corollaire 1 restent valables pour les cycles (c) -réguliers dans le groupe $BH_k(X)$.

Preuve. Similaire à celle du corollaire 1. $\square$

Dans l'homologie d'un complexe simplicial et (ou bien) d'un complexe cellulaire, la somme de deux cycles s'obtient par la réunion ensembliste des simplexes des deux cycles considérés en le munissant de la somme algébrique de leurs coefficients. Les corollaires 1 et 2 nous dit donc que la somme transversale dans $AH_k(X)$ et $BH_k(X)$ est compatible avec les opérations usuelles des théories géométriques plus classiques de l'homologie.

§5. Homomorphismes Induits en homologie stratifiée. Functorialité.

Dans la première section ce paragraphe, nous montrons qu'à tout plongement stratifié $f : X \rightarrow \mathcal{Y}$ on peut associer une application induite $f_* = f_*^k : AH_k(X) \rightarrow AH_k(\mathcal{Y})$ qui par rapport à l'opération de somme transversale est un homomorphisme de groupes.

Donc en restreignant convenablement la catégorie des morphismes stratifiés nous trouverons que AH_k se réécrit comme un foncteur à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens. De plus les morphismes $f_* : AH_k(X) \rightarrow AH_k(\mathcal{Y})$ induits commutent avec les applications R_a , $R_a \mathcal{Y} \circ f_* = f_* \circ R_a X$ et la représentation homologique R_a définit donc une équivalence naturelle de foncteurs

$$R_a : AH_k \longrightarrow H_k.$$

ou mieux encore par la bijectivité de toute $R_a X : AH_k(X) \rightarrow H_k(X)$ une équivalence naturelle.

D'après les théorèmes du chapitre III §4, la (c) -régularité d'une stratification se préserve par la semidifférentiabilité d'un homéomorphisme stratifié; alors à la section §5.2 nous obtiendrons des propriétés analogues pour l'homologie BH_k en considérant la catégorie des espaces (c) -réguliers et dont les morphismes sont des plongements stratifiés semidifférentiables.

5.1. Le cas de l'homologie AH_k

DEFINITION 1. Une application stratifiée $f : X \rightarrow \mathcal{Y}$ entre deux E.S.A. X et $\mathcal{Y}$ est dite un *plongement stratifié abstrait* (noté P.S.A.) si la restriction $f|_X : X \rightarrow f(X)$ est un homéomorphisme sur l'image et pour toute strate S de X , en notant S' la strate de $\mathcal{Y}$ qui contient $f(S)$, on obtient que la restriction $f_S : S \rightarrow S'$ est un plongement de variétés.

Notons l'ensemble des plongements stratifiés entre X et $\mathcal{Y}$ par

$$\mathcal{PSA}(X, \mathcal{Y}) := \left\{ f : X \rightarrow \mathcal{Y} \mid f \text{ est un P.S.A.} \right\}$$

et l'ensemble de tous les plongements stratifiés par

$$\mathcal{PSA} := \bigcup_{X, \mathcal{Y} \in \mathcal{ESA}} \mathcal{PSA}(X, \mathcal{Y})$$

où

$$\mathcal{ESA} := \left\{ X \mid X \text{ est un E.S.A.} \right\}$$

L'identité stratifiée $1_X : X \rightarrow X$ d'un E.S.A. X est définie par l'application identique en considérant la même stratification X pour le domaine et pour le codomaine.

Evidemment $1_X \in \mathcal{PSA}(X, X)$ est un P.S.A.

D'autre part, en considérant sur un espace topologique deux stratifications différentes X' et X l'application identique détermine un P.S.A. $1_{X', X} : X' \rightarrow X$, appartenant à $\mathcal{PSA}(X', X)$ différent de l'identité stratifiée, si et seulement si X' est un raffinement non trivial de X .

Une composition $g \circ f : X \rightarrow Z$ de deux P.S.A. $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ étant évidemment encore un P.S.A. nous obtenons que le couple $(\mathcal{ESA}, \mathcal{PSA})$ est une catégorie.

Sauf mention explicite les morphismes stratifiés que nous considérerons dans cette section seront toujours des éléments de la catégorie $\mathcal{PSA}$.

Fixons alors un P.S.A. $f : X \rightarrow Y$ entre deux E.S.A. X et Y , définissons l'homomorphisme $f_* : AH_k(X) \rightarrow AH_k(Y)$ induit en homologie stratifiée et montrons que AH_k devient un foncteur à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens.

Fixons alors une k -chaîne S.A. $\xi = (V, z)$ de X , soit $\mathcal{V}$ la stratification de V et notons $V' = f(V)$.

Comme f est un P.S.A. et $\mathcal{V}$ un sous-E.S.A. de X alors la restriction $f_V : V \rightarrow Y$ de f à V muni automatiquement $V' = f(V)$ de la stratification induite

$$\mathcal{V}' := \left\{ f(V_j^h) \mid V_j^h \text{ est une strate de } \mathcal{V}, h = 0, \dots, k \right\}$$

avec laquelle $f_V : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ devient un homéomorphisme stratifié, difféomorphisme sur les strates; i.e. la restriction $f_{V_j^h} : V_j^h \rightarrow f(V_j^h)$ à toute h -strate V_j^h de $\mathcal{V}$ est un difféomorphisme de variétés lisses.

Comme nous l'avons vu dans la démonstration du théorème 1 §3 un homéomorphisme stratifié difféomorphisme sur les strates transforme un S.D.C. $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$ dans un S.D.C. de $\mathcal{V}'$.

Désormais nous noterons f l'homéomorphisme stratifié $f_V : V \rightarrow V'$.

REMARQUE 1. Si $f : X \rightarrow Y$ est un P.S.A. alors :

1) La stratification $\mathcal{V}' = f(\mathcal{V})$ image via f de tout sous-E.S.A. V de X est un sous-E.S.A. de Y .

2) De plus le S.D.C. $\mathcal{F}_{\mathcal{V}'}$ de $\mathcal{V}'$ est obtenu par composition des application du S.D.C. $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$ avec l'homéomorphisme $f_V : V \rightarrow V'$. $\square$

D'autre part, un P.S.A. f détermine aussi automatiquement un isomorphisme f_* entre le groupe des k -orientations $C_k(V)$ de $\mathcal{V}$ et celui $C_k(V')$ de $\mathcal{V}'$:

$$\begin{aligned} f_* : C_k(V) &\rightarrow C_k(V') \\ z = \sum_{j \in J_k} g_j V_j^k &\mapsto f_*(z) = \sum_{j \in J_k} g_j f(V_j^k), \end{aligned}$$

et de plus on a :

PROPOSITION 1. Si $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ est un homéomorphisme stratifié arbitraire, difféomorphisme sur les strates entre les deux E.S.A. $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ alors l'isomorphisme canonique $\phi_k : C_k(V'_k) \rightarrow H_k(V'_k, V'_{k-1})$ de $\mathcal{V}'$ obtenu à partir du S.D.C. $\mathcal{F}_{\mathcal{V}'} = f(\mathcal{F}_{\mathcal{V}})$ image via

f du S.D.C. $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{X}$ correspond via f_* à l'isomorphisme canonique $\psi_k : C_k(V_k) \rightarrow H_k(V_k, V_{k-1})$ de $\mathcal{V}'$ obtenu à partir de $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}$. I.e. le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} C_k(V_k) & \xrightarrow{\psi_k} & H_k(V_k, V_{k-1}) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ C_k(V'_k) & \xrightarrow{\phi_k} & H_k(V'_k, V'_{k-1}). \end{array}$$

Preuve. En reprenant la démonstration de la proposition 1 §2 ([Mu]₁ §3.3.) on voit facilement que chacun des isomorphismes de la ligne supérieure, qui compose $\psi_k : C_k(V_k) \cong H_k(V_k, V_{k-1})$, commute avec l'isomorphisme correspondant dans la ligne inférieure, qui définit $\phi_k : C_k(V'_k) \cong H_k(V'_k, V'_{k-1})$. I.e., les diagrammes [1], ..., [4],

$$\begin{array}{ccccccc} H_k(V_k, V_{k-1}) \cong & H_k(V_k, T_{2\varepsilon} V_{k-1}) \cong & H_k(\bigsqcup S_\varepsilon, \bigsqcup \partial S_\varepsilon) \cong & \bigoplus_{S_\varepsilon} H_k(S_\varepsilon, \partial S_\varepsilon) \cong & C_k(V_k) \\ f_* \downarrow & [1] & f_* \downarrow & [2] & f_* \downarrow & [3] & f_* \downarrow & [4] & \downarrow f_* \\ H_k(V'_k, V'_{k-1}) \cong & H_k(V'_k, T_{2\varepsilon} V'_{k-1}) \cong & H_k(\bigsqcup S'_\varepsilon, \bigsqcup \partial S'_\varepsilon) \cong & \bigoplus_{S'_\varepsilon} H_k(S'_\varepsilon, \partial S'_\varepsilon) \cong & C_k(V'_k) \end{array}$$

sont tous commutatifs.

En fait, grâce à l'affirmation 2) de la remarque 1, les voisinages utilisés pour obtenir les isomorphismes de rétraction et d'excision qui composent la ligne inférieure sont précisément les images via f des voisinages utilisés pour obtenir les isomorphismes de la ligne supérieure. $\square$

PROPOSITION 2. Si $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est un P.S.A. alors :

1) f fait correspondre à toute k -chaîne S.A. $\xi = (V, z)$ de $\mathcal{X}$ une k -chaîne S.A. de $\mathcal{Y}$

$$f_*(\xi) := (V', f_*(z)).$$

2) Les opérateurs de bord commutent avec les applications f_* . I.e., le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} C_k(V) & \xrightarrow{f_*^k} & C_k(V') \\ \partial_V = \partial \downarrow & & \downarrow \partial = \partial_{V'} \\ C_{k-1}(V_{k-1}) & \xrightarrow{f_*^{(k-1)}} & C_{k-1}(V'_{k-1}). \end{array}$$

3) $\partial(f_*(\xi)) = f_*(\partial\xi)$.

4) Si $\xi = (V, z)$ est un k -cycle S.A. de $\mathcal{X}$ alors $f_*(\xi) := (V', f_*(z))$ l'est aussi.

Preuve 1). Par définition, car $\mathcal{V}'$ est un sous-E.S.A. de $\mathcal{Y}$ et $f_*(z) \in C_k(V')$.

Preuve 2). Les opérateurs de bord ∂_V et $\partial_{V'}$ étant définis par les compositions $\partial_V = \psi_{k-1}^{-1} \partial_k \psi_k$ et $\partial_{V'} = \phi_{k-1}^{-1} \partial_k \phi_k$ (§2 2. déf. 2), il suffit de vérifier la commutativité

du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 C_k(V) & \xrightarrow{\psi_k} & H_k(V_k, V_{k-1}) & \xrightarrow{\partial_k} & H_{k-1}(V_{k-1}, V_{k-2}) & \xrightarrow{\psi_{k-1}^{-1}} & C_{k-1}(V_{k-1}) \\
 f_* \downarrow & (1) & f_* \downarrow & (2) & f_* \downarrow & (3) & \downarrow f_* \\
 C_k(V') & \xrightarrow{\phi_k} & H_k(V'_k, V'_{k-1}) & \xrightarrow{\partial_k} & H_{k-1}(V'_{k-1}, V'_{k-2}) & \xrightarrow{\phi_{k-1}^{-1}} & C_{k-1}(V'_{k-1}).
 \end{array}$$

La commutativité du diagramme (2), entre les bords homologues et les isomorphismes f_*^k et f_*^{k-1} induits en homologie singulière, étant évidemment vérifiée, la proposition 1 permet de conclure grâce à la commutativité des diagrammes (1) et (3).

Preuve 3). C'est évident car $\partial f_*(z) = f_*(\partial z)$, implique immédiatement :

$$\begin{aligned}
 \partial f_*(\xi) &:= \partial(V'_k, f_*(z)) = (V'_{k-1}, \partial f_*(z))_/_ = \left(f(V_{k-1}), f_*(\partial z) \right)_/_ = \\
 &= f_*((V_{k-1}, \partial z)_/_) = f_*(\partial \xi).
 \end{aligned}$$

Preuve 4). C'est immédiat car par 3) si ξ est un cycle de $\mathcal{X}$ alors $\partial \xi = 0$ et on trouve que

$$\partial f_*(\xi) = f_*(\partial \xi) = f_*(0) = 0. \quad \square$$

La proposition précédente nous définit une application f_* entre l'ensemble $AC_k(\mathcal{X})$ des k -chaînes S.A. de $\mathcal{X}$ et l'ensemble $AC_k(\mathcal{Y})$ des k -chaînes S.A. de $\mathcal{Y}$

$$f_* : AC_k(\mathcal{X}) \rightarrow AC_k(\mathcal{Y}) \quad , \quad f_*(\xi) := (V', f_*(z))$$

qui de plus au niveau des cycles vérifie

$$f_*(AZ_k(\mathcal{X})) \subseteq AZ_k(\mathcal{Y}).$$

PROPOSITION 3. *Si $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est un P.S.A. entre $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ alors*

1) *L'application restriction $f_* : AZ_k(\mathcal{X}) \rightarrow AZ_k(\mathcal{Y})$ est compatible avec les relations de cobordisme stratifié de $\mathcal{X}$ et de $\mathcal{Y}$. Donc on a une application quotient induit (que nous noterons) :*

$$f_* : AH_k(\mathcal{X}) \rightarrow AH_k(\mathcal{Y}) \quad , \quad f_*([\xi]_{\mathcal{X}}) := [f_*(\xi)]_{\mathcal{Y}}.$$

Preuve 1. Soient $\xi_V = (V, z_V)$ et $\xi_W = (W, z_W)$ deux k -cycles S.A. de $\mathcal{X}$ définissant la même classe de cobordisme stratifié dans $AH_k(\mathcal{X})$ et soit $\zeta_U = (U, z_U)$ un cobordisme

$$\zeta_U : \xi_V \equiv \xi_W.$$

Considérons l'application $f \times 1_I : \mathcal{X} \times I \rightarrow \mathcal{Y} \times I$. Comme f est un P.S.A. de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$, alors $f \times 1_I$ est un P.S.A. de $\mathcal{X} \times I$ dans $\mathcal{Y} \times I$. La $(k+1)$ -chaîne transformée $(f \times 1_I)_*(\zeta_U) = ((f \times 1_{[0,1]})(U), (f \times 1_{[0,1]})_*(z_U))$ est donc une $(k+1)$ -chaîne S.A. de $\mathcal{Y} \times I$ et par la 3) de la proposition 2, est de plus un cobordisme stratifié

$$(f \times 1_I)_*(\zeta_U) : f_*(\xi_V) \equiv f_*(\xi_W). \quad \square$$

PROPOSITION 4. *On a les propriétés suivantes :*

- 1) Si $1_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ est l'identité stratifiée, $1_{\mathcal{X}*} = 1_{AH_k(\mathcal{X})}$.
- 2) Si $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ et $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ sont deux P.S.A., $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Preuve 1). C'est évident car pour toute k -chaîne (cycle) $\xi = (V, z_V)$, l'identité stratifiée $1_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ donne lieu à l'isomorphisme identique $1_{\mathcal{X}*} : C_k(V_k) \rightarrow C_k(V_k)$.

Donc

$$1_{\mathcal{X}*}([\xi]) = [(1_V(V), 1_{\mathcal{X}*}(z_V))] = [(V, z_V)] = [\xi].$$

Preuve 2). Si $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ et $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ sont deux P.S.A. alors, étant donné un k -cycle $\xi = (V, z_V)$ de $\mathcal{X}$, en notant $V' = f(V)$ et $V'' = g(V')$ on vérifie au niveau des k -orientations la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_k(V_k) & \xrightarrow{f_*} & C_k(V'_k) \\ (g \circ f)_* \searrow & & \downarrow g_* \\ & & C_k(V''_k). \end{array}$$

On conclut donc que :

$$\begin{aligned} (g \circ f)_*([(V, z_V)]) &= \left[\left((g \circ f)(V), (g \circ f)_*(z_V) \right) \right] = \left[\left(g(f(V)), g_*(f_*(z_V)) \right) \right] = \\ &= g_*([(f(V), f_*(z_V))]) = g_*f_*([(V, z_V)]). \quad \square \end{aligned}$$

Les propriétés 1) et 2) de la proposition 2 se résument en disant que la correspondance AH_k est un foncteur de la catégorie des E.S.A. avec pour morphismes les P.S.A. à valeurs dans la catégorie $(\mathcal{GA}, \text{hom}(\mathcal{GA}))$ des groupes abéliens.

COROLLAIRE 1. $AH_k : (\mathcal{ESA}, \mathcal{PSA}) \rightarrow (\mathcal{GA}, \text{hom}(\mathcal{GA}))$ est un foncteur covariant. $\square$

Nous trouvons de plus que, la représentation homologique R_a peut être interprétée comme une équivalence naturelle entre le foncteur AH_k et le foncteur H_k de l'homologie ordinaire (restreint à $(\mathcal{ESA}, \mathcal{PSA})$)

En fait, pour tout P.S.A. $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ en notant

$$\begin{cases} f_{*strat.} : AH_k(\mathcal{X}) \rightarrow AH_k(\mathcal{Y}) \\ f_{*homol.} : H_k(\mathcal{X}) \rightarrow H_k(\mathcal{Y}) \end{cases}$$

l'homomorphisme induit en homologie stratifiée et l'homomorphisme induit en homologie singulière, on a :

THEOREME. *La correspondance de foncteurs*

$$R_a : AH_k \rightarrow H_k \quad , \quad \begin{cases} AH_k(\mathcal{X}) \xrightarrow{R_a} H_k(\mathcal{X}) \\ f_{*strat.} \xrightarrow{R_a} f_{*homol.} \end{cases}$$

est une équivalence naturelle de foncteurs covariants.

I.e., pour tout P.S.A. $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} AH_k(\mathcal{X}) & \xrightarrow{f_{*strat.}} & AH_k(\mathcal{Y}) \\ R_{a\mathcal{X}} \downarrow & & \downarrow R_{a\mathcal{Y}} \\ H_k(\mathcal{X}) & \xrightarrow{f_{*homol.}} & H_k(\mathcal{Y}). \end{array}$$

Preuve. Notons $R_{\mathcal{X}} = R_{a\mathcal{X}}$ et $R_{\mathcal{Y}} = R_{a\mathcal{Y}}$.

Etant donné un élément $[\xi] \in AH_k(\mathcal{X})$ avec $\xi = [(V, z_V)]$, en notant $\xi' = (V', z_{V'})$ le k -cycle image $f_*(\xi) = (f(V), f_*(z_V))$ et en considérant la définition des applications $R_{\mathcal{X}}$ et $R_{\mathcal{Y}}$ nous avons

$$\begin{cases} R_{\mathcal{X}}([\xi]) := I_{V*} i_{V*}^{-1} \psi_k(z_V) \\ R_{\mathcal{Y}}([\xi']) = I_{V'*} i_{V'*}^{-1} \phi_k(z_{V'}) \end{cases}$$

avec $z_{V'} = f_*(z_V)$.

En considérant alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} C_k(V) & \xrightarrow{\psi_k} & H_k(V_k, V_{k-1}) & \xleftarrow{i_{V*}} & H_k(V_k) & \xrightarrow{I_{V*}} & H_k(\mathcal{X}) \\ f_* \downarrow & (1) & f_* \downarrow & (2) & \downarrow f_* & (3) & \downarrow f_* \\ C_k(V') & \xrightarrow{\phi_k} & H_k(V'_k, V'_{k-1}) & \xleftarrow{i_{V'*}} & H_k(V'_k) & \xrightarrow{I_{V'*}} & H_k(\mathcal{Y}) \end{array}$$

on a évidemment la commutativité en homologie singulière des diagrammes (2) et (3) et celle du diagramme (1) grâce à la proposition 1.

On peut donc conclure que :

$$R_{\mathcal{Y}} f_{*strat.}([\xi]) = R_{\mathcal{Y}}([\xi']) = I_{V'*} i_{V'*}^{-1} \phi_k(z_{V'}) = I_{V'*} i_{V'*}^{-1} \phi_k(f_*(z_V)) =$$

$$f_{*homol.} I_{V*} i_{V*}^{-1} \psi_k(f_*(z_V)) = f_{*homol.} R_{\mathcal{X}}([\xi]).$$

Alors par $R_{\mathcal{Y}} \circ f_{*strat.} = f_{*homol.} \circ R_{\mathcal{X}}$ la représentation homologique est une transformation naturelle de foncteurs et d'autre part comme toute application $R_{\mathcal{X}}$ est une bijection R est de plus une équivalence naturelle. $\square$

COROLLAIRE 2. Pour tout P.S.A. $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, l'application induite

$$f_* = f_{*strat.} : AH_k(\mathcal{X}) \rightarrow AH_k(\mathcal{Y}) \quad , \quad f_*([\xi]) := [f_*(\xi)]$$

est un homomorphisme de groupes.

Preuve. La commutativité du diagramme du théorème précédent et le fait que $R_{\mathcal{X}}$ et $R_{\mathcal{Y}}$ sont des isomorphismes impliquent que $f_{*strat.} = R_{\mathcal{Y}}^{-1} \circ f_{*homol.} \circ R_{\mathcal{X}}$ est également un isomorphisme. $\square$

COROLLAIRE 3. Si $\mathcal{U}'$ est un sous-E.S.A. de $\mathcal{X}$ alors l'application

$$I_{\mathcal{U}\mathcal{X}} : AH_k(\mathcal{U}) \rightarrow AH_k(\mathcal{X}) \quad , \quad I_{\mathcal{U}\mathcal{X}}([\xi]_{\mathcal{U}}) = [\xi]_{\mathcal{X}}$$

est un homomorphisme de groupes défini comme l'application identique $1_{AZ_k(X)}$ sur les cycles représentants. $\square$

Comme tout P.S.A. $f : X \rightarrow \mathcal{Y}$ s'écrit comme composition $f = I_{\mathcal{Y}'\mathcal{Y}} \circ g$, d'un homéomorphisme $g = f/$ difféomorphisme sur toute strate et d'une inclusion stratifiée $I_{\mathcal{Y}'\mathcal{Y}}$, regardons les propriétés des homomorphismes induits g_* et $I_{\mathcal{Y}'\mathcal{Y}*}$.

Le diagramme suivant illustre la situation :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{g} & \mathcal{Y}' = f(X) & AH_k(X) & \xrightarrow{g_*} & AH_k(\mathcal{Y}') \\ f \searrow & & \downarrow I_{\mathcal{Y}'\mathcal{Y}} & & f_* \searrow & \downarrow I_{\mathcal{Y}'\mathcal{Y}*} \\ & & \mathcal{Y} & & & AH_k(\mathcal{Y}) \end{array}$$

COROLLAIRE 4. Si $f : X \rightarrow \mathcal{Y}$ est un homéomorphisme stratifié difféomorphisme sur toute strate alors $f_* : AH_k(X) \rightarrow AH_k(\mathcal{Y})$ est un isomorphisme.

Preuve. Le morphisme f étant une équivalence de la catégorie $(\mathcal{ESA}, \mathcal{PSA})$, on en déduit que $f_{*strat.} = R_{\mathcal{Y}}^{-1} \circ f_{*homol.} \circ R_X$ est un isomorphisme comme composition d'isomorphismes. $\square$

COROLLAIRE 5. Si X' est un E.S.A. raffinement de X alors l'homomorphisme induit par l'application identique $I_{X'X}$:

$$I_{X'X*} : AH_k(X') \rightarrow AH_k(X)$$

est un isomorphisme.

Preuve. Comme au corollaire 3, on a dans ce cas

$$I_{X'X*} = R_X^{-1} \circ id_* \circ R_{X'}. \quad \square$$

5.2 : Le cas de l'homologie BH_k

Soient maintenant X et $\mathcal{Y}$ des stratifications (c) -régulières et $f : X \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme stratifié.

Nous avons démontré au chapitre III §4 qu'une condition suffisante assurant la préservation de la (c) -régularité d'un O.S.S. $\mathcal{V}$ de X par image via f était la *semidifférentiabilité* introduite au chapitre II (introduite précisément en vue de récupérer la préservation d'une telle régularité). Dans ce cas là, le morphisme considéré était un homéomorphisme stratifié, difféomorphisme sur chaque strate, mais d'autre part l'on peut voir sans difficulté que la preuve donnée reste également valable dans le cas où f est un plongement stratifié semidifférentiable (P.S.S.) de X dans $\mathcal{Y}$.

Si donc $\mathcal{V}$ est un O.S.S. (c) -régulier de X et $f : X \rightarrow \mathcal{Y}$ est un P.S.S., alors $\mathcal{V}' := f(\mathcal{V})$ est un O.S.S. (c) -régulier de $\mathcal{Y}$.

Dans le cas de l'homologie BH_k , les morphismes convenables pour obtenir des applications induites f_* sont alors les P.S.S.

Notons alors l'ensemble des plongements stratifiés semidifférentiables entre X et $\mathcal{Y}$:

$$\mathcal{PSS}(X, \mathcal{Y}) := \left\{ f : X \rightarrow \mathcal{Y} \mid f \text{ est un P.S.A.} \right\}$$

et l'ensemble de tous les plongements stratifiés semidifférentiables:

$$\mathcal{PSS} := \bigcup_{\mathcal{X} \mathcal{Y} \in \mathcal{ESB}} \mathcal{PSS}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

où

$$\mathcal{ESB} := \left\{ \mathcal{X} \mid \mathcal{X} \text{ est } (c)\text{-régulière} \right\}$$

On voit immédiatement que $1_{\mathcal{X}} \in \mathcal{PSS}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ et que toute composition $g \circ f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ de deux P.S.S. $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ et $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ est encore un P.S.S. (chapitre II, remarque 2, §2.1). Le couple $(\mathcal{ESB}, \mathcal{PSS})$ définit donc une catégorie.

On pourrait alors envisager d'obtenir pour la catégorie $(\mathcal{ESB}, \mathcal{PSS})$ et pour BH_k toutes les propositions analogues à celles montrées à la section précédente pour la catégorie $(\mathcal{ESA}, \mathcal{PSA})$.

En réalité, maintenant nous ne disposons pas d'un théorème de bijectivité de toutes les applications de représentations $R_b : BH_k(\mathcal{X}) \rightarrow H_k(\mathcal{X})$ et nous n'avons donc pas droit de considérer les $BH_k(\mathcal{X})$ comme des groupes. Le foncteur BH_k peut à présent être considéré comme à valeurs seulement dans la catégorie des ensembles et avec cette modification, tous les énoncés de la section §5.1 restent valables.

D'autre part, on pourrait se restreindre à la catégorie des variétés et des applications lisses pour laquelle la bijectivité de toute représentation $R_b : BH_k(\mathcal{X}) \rightarrow H_k(\mathcal{X})$ est assurée (théorème §2.4): dans ce cas tous les énoncés de la section §5.1 restent valables en considérant BH_k à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens $(\mathcal{GA}, \text{hom}(\mathcal{GA}))$ (*)

Si $\mathcal{V}$ est le support d'une k -chaîne (c) -régulière $\xi = (V, z_V)$ de $\mathcal{X}$ et si $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est un P.S.S., alors $\mathcal{V}' := f(\mathcal{V})$ est un O.S.S. (c) -régulier de $\mathcal{Y}$ support d'une chaîne (c) -régulière $f_*(\xi) := (f(V), f_*(z_V))$ de $\mathcal{Y}$.

Les analogues de la remarque 1 et des propositions 1 et 2 étant évidemment valables, on retrouve alors les correspondants des propositions 3 et 4 :

PROPOSITION 5. Si $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est un P.S.S. de stratifications (c) -régulières, alors:

1) L'application

$$f_* : BZ_k(\mathcal{X}) \rightarrow BZ_k(\mathcal{Y}) \quad , \quad f_*((V, z_V)) := (f(V), f_*(z_V)) .$$

est compatible avec les relations de cobordisme (c) -régulier de $\mathcal{X}$ et de $\mathcal{Y}$ et induit une application quotient

$$f_* : BH_k(\mathcal{X}) \rightarrow BH_k(\mathcal{Y}) \quad , \quad f_*([(V, z_V)]) := [(f(V), f_*(z_V))]$$

rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} BH_k(\mathcal{X}) & \xrightarrow{f_{*strat.}} & BH_k(\mathcal{Y}) \\ R_{b\mathcal{X}} \downarrow & & \downarrow R_{b\mathcal{Y}} \\ H_k(\mathcal{X}) & \xrightarrow{f_{*homol.}} & H_k(\mathcal{Y}) . \quad \square \end{array}$$

(*) Cette remarque est également valable pour l'homologie de Whitney WH_k

PROPOSITION 6. *Les propriétés suivantes se vérifient :*

- 1) $1_{\mathcal{X}_*} = 1_{AH_k(\mathcal{X})}$.
- 2) Si $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ et $g : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ sont deux P.S.S., $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.
- 3) BH_k est un foncteur covariant. $\square$

REMARQUE. La section §5.1 toute entière pourrait être obtenue si l'on démontre la bijectivité de toute représentation homologique $R_b : BH_k(\mathcal{X}) \rightarrow H_k(\mathcal{X})$, propriété correspondant à la *conjecture de Goresky* pour l'homologie (c)-régulière BH_k .

5.3 : Inverse de l'isomorphisme de raffinement

Soit $\mathcal{X}$ un E.S.A. et $\mathcal{X}'$ un raffinement de $\mathcal{X}$ qui est encore un E.S.A. Alors l'identité stratifiée $I_{\mathcal{X}'\mathcal{X}} : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ induit en homologie AH_* un isomorphisme $I_{\mathcal{X}'\mathcal{X}_*} : AH_k(\mathcal{X}') \rightarrow AH_k(\mathcal{X})$ (§5.1 corollaire 5).

Le théorème de transversalité pour des E.S.A. permet alors de donner une interprétation géométrique de l'isomorphisme inverse $J := (I_{\mathcal{X}'\mathcal{X}_*})^{-1}$ de $I_{\mathcal{X}'\mathcal{X}_*}$.

En fait, si $\mathcal{X}'$ est un raffinement de $\mathcal{X}$, grâce au théorème de transversalité dans lequel on interprète $\mathcal{X}'$ comme un sous-E.S.A. de $\mathcal{X}$, pour tout k -cycle $\xi = (V, z_V)$ de $\mathcal{X}$ il existe un k -cycle $\xi' = (V', z_{V'})$ de $\mathcal{X}$ cobordant à ξ et transverse à $\mathcal{X}'$ dans $\mathcal{X}$.

Si l'intersection transverse de $\mathcal{V}'$ avec $\mathcal{X}'$ est encore un E.S.A. alors on détermine une nouvelle k -chaîne S.A. $\xi'' = (V' \cap_t \mathcal{X}', z_{V''})$, restratification de ξ' , dont la k -orientation est définie par

$$z_{V''} = \sum_{j \in J_k} g_j \left(\sum_{S=n-\text{strate de } \mathcal{X}'} \sum c.c.(V_j'^k \cap S) \right) \quad \text{où} \quad z_{V'} = \sum_{j \in J_k} g_j V_j'^k.$$

Nous remarquons que $\xi'' := \xi' \cap_t \mathcal{X}$ est encore un k -cycle de $\mathcal{X}$, cobordant à ξ' (et à ξ) et que nous appellerons *intersection transversale de ξ' et $\mathcal{X}'$ (dans $\mathcal{X}$)*. De plus $\xi' \cap_t \mathcal{X}$ a sa stratification compatible avec celle de $\mathcal{X}'$ et est donc aussi un k -cycle de $\mathcal{X}'$.

Avec ces notations on a alors :

PROPOSITION 7. *Si $\mathcal{X}'$ est un raffinement de $\mathcal{X}$, l'isomorphisme $J = (I_{\mathcal{X}'\mathcal{X}_*})^{-1}$ est donné par*

$$\begin{cases} J : & AH_k(\mathcal{X}) \rightarrow AH_k(\mathcal{X}') \\ & [\xi] = [\xi']_{\mathcal{X}} \mapsto [\xi' \cap_t \mathcal{X}']_{\mathcal{X}'} \end{cases}$$

Preuve. C'est une application du théorème de transversalité au niveau des cobordismes qui permet de voir que l'application J est bien définie.

D'autre part, comme l'homomorphisme induit par l'inclusion stratifiée $I_{\mathcal{X}'\mathcal{X}}$ agit identiquement sur les cycles représentants (corollaire 2), on trouve facilement que :

$$I_{\mathcal{X}'\mathcal{X}_*} \circ J([\xi]_{\mathcal{X}}) = I_{\mathcal{X}'\mathcal{X}_*}([\xi' \cap_t \mathcal{X}']_{\mathcal{X}'}) = [\xi' \cap_t \mathcal{X}']_{\mathcal{X}} = [\xi']_{\mathcal{X}} = [\xi]_{\mathcal{X}}.$$

Donc $I_{\mathcal{X}'\mathcal{X}_*} \circ J = 1_{AH_k(\mathcal{X})}$, et la bijectivité de $I_{\mathcal{X}'\mathcal{X}_*}$ (corollaire 4) permettent de conclure que $J = (I_{\mathcal{X}'\mathcal{X}_*})^{-1}$. $\square$

Enfin, soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un P.S.A. qui est de plus un homéomorphisme.

Pour toute strate S de $\mathcal{X}$ notons S' la strate de $\mathcal{Y}$ qui contient $f(S)$.

Comme f est un P.S.A. alors toute restriction $f_S : S \rightarrow f(S)$ est un difféomorphisme mais $f(S)$ ne coïncide pas en général avec toute la strate S' de $\mathcal{Y}$. Cela signifie que le P.S.A. f bien qu'étant un homéomorphisme n'est pas une équivalence de la catégorie $(\mathcal{ESA}, \mathcal{PSA})$, car $\mathcal{Y} \xrightarrow{f^{-1}} \mathcal{X}$ n'est pas stratifiée. D'autre part en considérant à la place de $\mathcal{Y}$ le raffinement $\mathcal{Y}'$ induit par f :

$$\mathcal{Y}' := f(\mathcal{X}') = \{ f(S) \mid S \text{ est une strate de } \mathcal{X} \}$$

on trouve alors f^{-1} est un P.S.A.

Le corollaire 5 permet d'interpréter l'isomorphisme inverse $(f_*)^{-1} : AH_k(\mathcal{Y}) \rightarrow AH_k(\mathcal{X})$ de f_* . En fait on a :

PROPOSITION 8. *Etant donné un P.S.A. $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ qui est de plus un homéomorphisme d'E.S.A. sans être une équivalence de la catégorie $(\mathcal{ESA}, \mathcal{PSA})$, i.e. $f^{-1} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ n'est pas stratifié, alors l'isomorphisme inverse de $f_* : AH_k(\mathcal{X}) \rightarrow AH_k(\mathcal{Y})$ est donné par:*

$$\left\{ \begin{array}{lll} (f_*)^{-1} & : & AH_k(\mathcal{Y}) \rightarrow AH_k(\mathcal{X}) \\ [\eta]_{\mathcal{Y}} = [\eta']_{\mathcal{Y}} & \mapsto & \left[\left(f^{-1} \right)_* \left(\eta' \cap_t f(\mathcal{X}') \right) \right]_{\mathcal{X}} \end{array} \right.$$

où η' est un cycle de $\mathcal{Y}$ cobordant à η et transverse au raffinement $\mathcal{Y}' = f(\mathcal{X}')$ de $\mathcal{Y}$.

Preuve. Décomposons f par les applications

$$f = I_{\mathcal{Y}'\mathcal{Y}} \circ f_{/} \quad : \quad \mathcal{X} \xrightarrow{f_{/}} \mathcal{Y}' \xrightarrow{I_{\mathcal{Y}'\mathcal{Y}}} \mathcal{Y}.$$

Les morphismes $f_{/}$ et $I_{\mathcal{Y}'\mathcal{Y}}$ étant des P.S.A., les homomorphismes induits existent en homologie AH_* et vérifient $f_* = I_{\mathcal{Y}'\mathcal{Y}*} \circ (f_{/})_*$.

D'autre part $(f_{/})_*$ et $I_{\mathcal{Y}'\mathcal{Y}*}$ étant des isomorphismes (corollaires 3 et 4), on en déduit

$$(f_*)^{-1} = (f_{/})_*^{-1} \circ I_{\mathcal{Y}'\mathcal{Y}*}^{-1} \quad : \quad AH_k(\mathcal{Y}') \xrightarrow{(I_{\mathcal{Y}'\mathcal{Y}*})^{-1}} AH_k(\mathcal{Y}) \xrightarrow{(f_{/})_*^{-1}} AH_k(\mathcal{X}).$$

On peut alors conclure grâce à la proposition 4. $\square$

§6. La cohomologie stratifiée $AH^k(X)$ et $BH^k(X)$.

Dans ce paragraphe, nous reprenons la théorie $WH^k(X)$ où X était une stratification de Whitney et ses cocycles, des objets sous-stratifiés de Whitney de X , k -codimensionnels dans X et nous montrons qu'elle peut être redéveloppée en considérant pour $X = (A, \Sigma)$ et ses cocycles des ensembles stratifiés abstraits et/ou des stratifications (c) -régulières.

La condition de π -fibre introduite par Goresky [Go]_{1,3} s'exprime uniquement en termes de projections $\{\pi_S\}_{S \in \Sigma}$ d'un S.D.C. $\mathcal{T} = \{(T_S, \pi_S, \rho_S)\}_{S \in \Sigma}$ de X (par définition caractéristique des E.S.A. [Ma]). Cette condition de π -fibre peut donc bien être considérée pour des objets sous-stratifiés (O.S.S.) abstraits de X et nous pouvons bien introduire l'ensemble $AC^k(X)$ des cochaînes stratifiées abstraites (pour tout $k \leq n = \dim X$).

De nouveau, l'existence d'un opérateur de *cobord* dépend seulement de l'existence d'un système de données de contrôle $\mathcal{T}$ et donc peut aussi bien être reconsidérée pour des cochaînes stratifiées abstraites, de la même manière que dans [Go]_{1,3}, excepté que maintenant sa signification géométrique, basée sur la "continuité" d'un sous-fibré normal à la cochaîne considérée dans X ([Go]₃, 4.1) peut être retrouvée seulement à travers un plongement (b) -régulier de X dans un espace Euclidien [Na], [No], [Te], [Ve].

Nous pouvons alors définir de toutes façons l'ensemble $AZ^k(X)$ des k -cocycles stratifiés abstraits de X .

A ce stade, l'ensemble quotient $AH^k(X)$ de cohomologie stratifiée abstraite de X et une application de *représentation* $R^a : AH^k(X) \rightarrow H^k(X)$ peuvent être facilement obtenus de manière totalement analogue à celle de Goresky. Cependant, envisageant d'étendre les résultats de [Mu]₁, en plus de ceux de Goresky [Go]_{1,3}, nous considérons, comme déjà fait pour le cas de l'homologie stratifiée, la définition équivalente et plus formelle utilisée dans [Mu]₁. Les mêmes considérations restant valables en considérant pour X et ses cocycles des stratifications (c) -régulières, nous définissons également un ensemble de *cohomologie* (c) -régulière $BH^k(X)$ et une application de représentation $R^b : BH^k(X) \rightarrow H^k(X)$.

Il est essentiel pour que les théories AH^* et BH^* vérifient de bonnes propriétés comme dans la théorie WH^* de Goresky de disposer d'un analogue du *Transversality Lemma* [Go]₃ pour des cochaînes abstraites et (c) -régulières. Les résultats de transversalité du chapitre III nous aiderons alors à satisfaire cette nécessité.

En particulier, le théorème de transversalité, la bijectivité des représentations homologiques d'une variété $R_a : AH_k(X) \rightarrow H_k(X)$ et $R_b : BH_k(X) \rightarrow H_k(X)$ et l'existence d'une *famille de lignes* étant valables [Go]₂, nous pourrions en déduire alors la bijectivité des applications de représentation cohomologique $R^a : AH^k(X) \rightarrow H^k(X)$ et $R^b : BH^k(X) \rightarrow H^k(X)$.

A l'aide du théorème de transversalité du chapitre III, nous montrons que l'opération de groupe induite par la bijection R^a (resp. R^b) sur $AH^k(X)$ (resp. sur $BH^k(X)$) s'interprète géométriquement par la réunion transverse de cocycles de X .(*) En même temps on retrouvera aussi bien d'autres interprétations géométriques importantes des opérations cohomologiques : le produit $\cup$ s'obtient comme l'intersection transverse de deux cocycles, le produit $\cap$ comme l'intersection transverse d'un cycle et d'un cocycle et les homomorphismes induits f^* représentables comme la préimage transverse $W \mapsto f^{-1}(W)$ d'un cocycle par rapport à une fonction contrôlée f .

Enfin quand X est une variété, l'isomorphisme de dualité de Poincaré s'exprime par une application qui est l'identité sur les cocycles représentatifs.

(*) Cette idée m'avait été suggérée par S. Buoncristiano en 1985 pour la théorie $WH^k(X)$ et était aussi indiquée dans la thèse de Goresky [Go]₁.

Nous concluons le paragraphe à la section §6.11 contenant un résumé de ces contenus géométriques des cohomologies stratifiées AH^* et BH^* et en remarquant que les autres résultats contenus dans [Mu]_{1,2} concernant la réalisation géométrique des *carrés* et des *p-puissances de Steenrod* pourraient également être obtenus.

Dans nos théories AH et BH le théorème de transversalité joue le même rôle que le “*Moving Lemma*” dans la théorie des anneaux de Chow $CH_*(\)$ [Fu] pour les cycles algébriques d’une variété algébrique.

Différentes démonstrations seront omises en renvoyant le lecteur à [Go]_{1,2,3} et à [Mu]₁.

6.1 : Condition de π -fibre. Costrates. Coorientations

Soit $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un ensemble stratifié abstrait et fixons un système de données de contrôle $\mathcal{T} = \{(T_S, \pi_S, \rho_S)\}_{S \in \Sigma}$ pour $\mathcal{X}$.

DEFINITION 1. Soit $\mathcal{V} = (V, \Sigma_{\mathcal{V}})$ un O.S.S. de $\mathcal{X}$. On dira que $\mathcal{V}$ vérifie la condition de π -fibre dans $\mathcal{X}$ (par rapport à $\mathcal{T}$) si et seulement si :

$$\forall S \in \Sigma \quad , \quad \exists \epsilon > 0 \mid V \cap T_S(\epsilon) = \pi_S^{-1}(V \cap S) \cap T_S(\epsilon).$$

Pour toute strate R de $\mathcal{V}$, considérons la strate S_R de $\mathcal{X}$ contenant R et notons $\text{cod}(R) := \dim S_R - \dim R$ la codimension de R dans S_R .

DEFINITION 2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l’ensemble stratifié abstrait

$$V^k := \bigcup_{\text{cod}(R) \geq k} R \quad , \quad \forall k = 1, \dots, n = \dim \mathcal{X}$$

est dit le *k-cosquelette* de $\mathcal{V}$ (dans $\mathcal{X}$).

De telle manière, si V désigne le support de $\mathcal{V}$, on obtient la famille suivante croissante de *h-cosquelettes* de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{X}$:

$$\emptyset = V^{n+1} \subseteq V^n \subseteq \dots \subseteq V^k = \dots = V^0 = V$$

Dans la théorie cohomologique, les cosquelettes V^k de $\mathcal{V}$ remplacent les squelettes V_k de $\mathcal{V}$ utilisés pour l’homologie et donc on définit une *k-costrate* de $\mathcal{V}$ (dans $\mathcal{X}$) comme un élément D_s^k de la famille des composantes connexes de $V^k - V^{k+1}$, i.e. :

$$\{D_s^k\}_{s \in \Gamma_k} := c.c.(V^k - V^{k+1}) = c.c.\left(\bigcup_{\text{cod}(R)=k} R\right).$$

En particulier, toute *k-costrate* D_s^k de $\mathcal{V}$ est aussi une réunion de strates contenues dans $\mathcal{X}$ avec codimension k : $D_s^k = \cup_{R \subseteq D_s^k} R$.

La condition de π -fibre introduite à la définition 1, relative aux strates d’une même *k-costrate* D de $\mathcal{V}$ doit être relue de la manière suivante.

Pour tout couple de strates $R < R'$ dans D , si on note $S < S'$ le couple de strates de $\mathcal{X}$ telles que $R \subset S$ et $R' \subset S'$ ($S = S_R$ et $S' = S_{R'}$) avec nos notations usuelles où $T_{SS'} := T_S \cap S'$ et $\pi_{SS'} := \pi_{S|T_{SS'}} : T_{SS'} \rightarrow S$, on a :

$$R' \cap T_{SS'}(\epsilon) = \pi_{SS'}^{-1}(R) \cap T_{SS'}(\epsilon).$$

REMARQUE 1. La condition de π -fibre pour $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{X}$ entraîne que l'on peut construire un voisinage tubulaire $T_D := \cup_{R \subset D} T_R$ où chaque T_R est un voisinage tubulaire de la strate R dans S (différent de celui du S.D.C. de $\mathcal{V}$) tel que T_D soit un k -fibré vectoriel sur D . La preuve s'obtient en faisant une récurrence croissante sur la dimension des strates $R \subset D$ et en demandant la condition $T_{R'} \supseteq \pi_{SS'}^{-1}(T_R) \cap T_{SS'}(\delta)$, pour toute R' minimale telle que $R' > R$ (et pour un δ suffisamment petit).

On aurait pu également démontrer l'existence d'une telle famille de voisinages tubulaires $\{T_D\}_D$ en considérant un plongement (b) -régulier ϕ du couple d'E.S.A. $(\mathcal{V}, \mathcal{X})$ dans un espace Euclidien [Na], [No], [Te], [Ve], afin d'utiliser la construction de Goresky ([Go]₃, 4.1) pour $(\phi(\mathcal{V}), \phi(X))$ et réobtenir la famille de voisinages $\{T_D\}_D$ (des k -costrates de $\mathcal{V}$) par préimage via homéomorphisme stratifié ϕ^{-1} . $\square$

Fixons définitivement pour toute k -costrate D un tel voisinage tubulaire T_D .

On pose alors :

DEFINITION 3. Soit G un groupe abélien et D une k -costrate de $\mathcal{V}$. D est dit G -coorientable si et seulement si le couple fibré en sphères $(T_D, T_D - D)$ est G -orientable.

A partir des propriétés homologiques du couple fibré en sphères $(T_D, T_D - D)$, on trouve :

PROPOSITION 1. Pour tout groupe abélien G ,

$$H^k(T_D, T_D - D; G) \cong \begin{cases} G & \text{si } D \text{ est } G\text{-coorientable} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. [Mu]₁. $\square$

DEFINITION 4. On note alors :

$$C^k(V^k) = C^k(V^k; G) := \left\{ c = \sum_{s \in \Gamma_k} g_s D_s^k \mid \dots \text{ où } D_s^k \text{ est } G\text{-coorienté} \right\}$$

pour le groupe abélien libre sur l'ensemble des k -costrates D_s^k de $\mathcal{V}$ G -coorientables (et G -coorientées) obtenues par l'identification usuelle $g \cdot D_s^k = (-g) \cdot (-D_s^k)$ et tout élément $c = \sum_{s \in \Gamma_k} g_s D_s^k \in C^k(V^k; G)$ est dit une k -coorientation de $\mathcal{V}$ (à coefficients dans G).

On a alors :

PROPOSITION 2. Il existe un isomorphisme naturel

$$\psi^k : C^k(V^k; G) \longrightarrow H^k(X - V^{k+1}, X - V^k; G)$$

Preuve. [Mu]₁ §3.3. $\square$

Un tel isomorphisme utilisé en dimensions k et $k+1$ nous permet alors, à l'aide de l'opérateur de cobord cohomologique δ_k de définir un opérateur δ transformant chaque k -coorientation c de $\mathcal{V}$ en une $(k+1)$ -coorientation δc de $\mathcal{V}$.

DEFINITION 4. Nous notons alors $\delta : C^k(V^k) \rightarrow C^{k+1}(V^{k+1})$ l'unique application rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
C^k(V^k) & \xrightarrow{\delta} & C^{k+1}(V^{k+1}) \\
\psi^k \downarrow & & \downarrow \psi^{k+1} \\
H^k(X - V^{k+1}, X - V^k) & \xrightarrow{\delta_k} & H^{k+1}(X - V^{k+2}, X - V^{k+1})
\end{array}$$

6.2 : Cochaînes et cocycles stratifiés abstraits. L'ensemble $AH^k(X)$.

DEFINITION 1. Une k -cochaîne stratifiée abstraite (S.A.) de l'E.S.A. X est un couple $\theta = (\mathcal{V}, c)$ où $\mathcal{V}$ est un O.S.S. de X vérifiant la condition de π -fibre et tel que toutes les strates de $\mathcal{V}$ soient de dimension au moins k (i.e. les strates sont contenues dans X avec codimension au moins k) et où $c = \sum_j g_j D_j \in C^k(V)$. On note alors

$$AC^k(X) = AC^k(X; G) := \{\theta = (\mathcal{V}, c) \mid \theta \text{ est une } k\text{-cochaîne S.A. de } X\}$$

On définit la réduction $\theta_{/} = (V_{/c}, c)$ de θ comme la k -cochaîne S.A. de X obtenue par restriction du support V de θ à sa partie essentielle $V_{/c} := \overline{\cup_{g_j \neq 0} D_j}$. On voit tout de suite que $V_{/c}$ vérifie la condition de π -fibre, que $c \in C^k(V_{/c})$ et donc que $\theta_{/}$ est une k -cochaîne S.A. de X .

Le cobord $\delta\theta$ de la k -cochaîne θ est la $(k+1)$ -cochaîne S.A. de X définie par

$$\delta\theta := (V^{k+1}, \delta c)_{/} = (V_{/\delta c}^{k+1}, \delta c).$$

Alors θ est dit un k -cocycle stratifié abstrait (S.A.) de X si et seulement si $\delta\theta = 0$ ce qui arrive si et seulement si $\delta c = 0 \in C^{k+1}(V)$.

Nous posons alors :

$$AZ^k(X) = AZ^k(X; G) := \{\theta = (\mathcal{V}, c) \mid \theta \text{ } k\text{-cocycle S.A. de } X\}$$

Similairement et dualement à ce fait, pour l'ensemble $AZ_k(X; G)$ des k -cycles S.A. l'ensemble $AZ^k(X; G)$ des k -cocycles S.A. de X peut être muni d'une relation d'équivalence, le cobordisme de k -cocycle S.A., de la manière suivante :

DEFINITION 2. Soient $\theta = (V, c)$ et $\theta' = (V', c')$ deux k -cocycles stratifiés de l'E.S.A. X . Nous dirons que θ et θ' sont *cobordants* et écrirons $\theta \equiv \theta'$ s'il existe une k -cochaîne $\zeta = (U, u)$ de $X \times [0, 1]$ telle que :

- a) $\exists \epsilon > 0$:
$$\begin{cases} U \cap (A \times [0, \epsilon]) = V \times [0, \epsilon[\\ U \cap (A \times]1 - \epsilon, 1]) = V' \times]1 - \epsilon, 1] \end{cases}$$
- b) $\partial\zeta = (\theta \times \{0\} - \theta' \times \{1\})_{/}$ (“/” notant la réduction).

Le quotient de l'ensemble $AZ^k(X)$ par la relation de cobordisme stratifié de k -cocycles S.A. de X est dit l'ensemble de cohomologie stratifié de X et noté :

$$AH^k(X) := \frac{AZ^k(X)}{\equiv} = \left\{ [\theta] \mid \theta \text{ est un } k\text{-cocycle S.A. de } X \right\}.$$

REMARQUE 1. Pour tout $k > \dim X$, $AH^k(X) = \{0\}$.

Preuve. C'est évident car si $k > \dim X$ alors il n'existe pas de k -cocycle S.A. de X autre que le cycle nul. Donc $AZ^k(X) = \{0 := (\emptyset, 0)\}$ et trivialement $AH^k(X) = \{0\}$. $\square$

6.3 : L'application de représentation cohomologique $R^a : AH^k(X) \rightarrow H^k(X)$

Si $\theta = (V, c)$ est un k -cocycle S.A. de X , en considérant les suites exactes de triplets

$$X - V^k \subseteq X - V^{k+1} \subseteq X \quad , \quad X - V^{k+1} \subseteq X - V^{k+2} \subseteq X$$

dans le diagramme (de même que dans [Go]₃, 4.5)

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & H^{k+1}(X, X - V^{k+2}) \\ & & & & & & \downarrow h^* \\ H^k(X, X - V^{k+1}) & \xrightarrow{j^*} & H^k(X, X - V^k) & \xrightarrow{i^*} & H^k(X - V^{k+1}, X - V^k) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}(X, X - V^{k+1}) \\ & & I^* \downarrow & & \psi^k \uparrow & \delta_k \searrow & \downarrow H^* \\ & & H^k(X) & & C^k(V) & & H^{k+1}(X - V^{k+2}, X - V^{k+1}) \end{array}$$

on a $\delta c = 0$ de sorte que $\delta_k \psi^k(c) = \psi^{k+1} \delta(c) = 0$ et donc

$$\psi^k(c) \in \ker \delta_k = \ker \delta = \text{Im } i^* .$$

On en déduit alors qu'il existe une unique préimage $i^{*-1} \psi^k(c) \in H^k(X, X - V^k)$.

REMARQUE 1. L'injectivité de l'application i^* utilisée ci-dessus et l'égalité des noyaux $\ker \delta_k = \ker \delta$ (injectivité de H^*) découlent respectivement du fait que

$$H^k(X, X - V^{k+1}) = 0 = H^{k+1}(X, X - V^{k+2}) .$$

Preuve. [Go]₃, Lemme 4.5. $\square$

DEFINITION 1. L'application

$$R^a : AH^k(X) \rightarrow H^k(X) \quad , \quad R^a(\theta) = I^* i^{*-1} \psi^k(c)$$

est dite la *représentation cohomologique* de l'ensemble stratifié abstrait X et l'image $R^a([\theta]) = I^* i^{*-1} \psi^k(c) \in H^k(X)$ est appelée la *classe fondamentale de θ dans $H^k(X)$* .

REMARQUE 2. La preuve que la représentation cohomologique est une application bien définie, i.e que l'image $R^a([\theta])$ ne dépend que de la classe de cobordisme du cocycle θ s'obtient de la même manière que dans [Go]₁.

6.4 : La cohomologie (c) -régulière $BH^k(X)$

Dans cette section, nous considérons le cas où la stratification X est une stratification (c) -régulière. De même que dans le cas homologique §2.4 et comme toute stratification (c) -régulière est un E.S.A., toutes les définitions des sections précédentes peuvent être redonnées afin d'obtenir une théorie $BH^*(X)$ dans laquelle X , ses cocycles $\mathcal{V}$ et ses cobordismes sont considérés comme des stratifications (c) -régulières.

PROPOSITION 1. Si X est une stratification (c) -régulière et G un groupe abélien alors:

1) Pour tout O.S.S. (c) -régulier $\mathcal{V} = (V, \Sigma_{\mathcal{V}})$ de X , toutes les définitions de k -cochaîne, de k -ème opérateur de cobord $\delta : C^k(V) \rightarrow C^{k+1}(V^{k+1})$, de k -cocycle, de k -cobordisme (c) -régulier et les définitions des ensembles:

$$BZ^k(X) := BZ^k(X; G) := \left\{ \theta \mid \theta \text{ est un } k\text{-cocycle } (c)\text{-régulier de } X \right\}$$

$$BH^k(X) := \frac{BZ^k(X)}{\equiv} = \left\{ [\theta] \mid \theta \text{ est un } k\text{-cocycle } (c)\text{-régulier de } X \right\}$$

peuvent être données pour $\mathcal{V}$ sans aucun changement par rapport aux sections 6.1 et 6.2.;

2) Avec les mêmes notations qu'à la section 6.3, on a une application de représentation cohomologique

$$R^b : BH^k(X) \rightarrow H^k(X) \quad , \quad R^b([\theta]) = I^* i^{*-1}(\psi^k(c)) . \quad \square$$

De manière complètement similaire qu'au cas homologique on obtient les remarques 1 et 2 suivantes :

REMARQUE 1. Si X est (c) -régulière, $\forall k > \dim X$ on a : $BH^k(X) = \{[0]\}$. $\square$

Les applications de représentation homologique pour des stratifications de Whitney R^w , des stratifications (c) -régulières R^b , ou des E.S.A. R^a , étant toutes définies par la même formule $R[(V, c)] = I^* i^{*-1}(\psi^k(c))$, on a aussi :

REMARQUE 2. 1) Si X est une stratification (c) -régulière, alors l'application $J : BH^k(X) \rightarrow AH^k(X)$, identité sur les représentants, rend le diagramme suivant commutatif:

$$\begin{array}{ccc} BH^k(X) & \xrightarrow{J} & AH^k(X) \\ R^b \downarrow & (1) & \downarrow R^a \\ H^k(X) & \xrightarrow{id} & H^k(X) . \end{array}$$

2) Si X est une stratification de Whitney, l'application $H : WH^k(X) \rightarrow BH^k(X)$, identité sur les représentants, rend alors commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} WH^k(X) & \xrightarrow{H} & BH^k(X) \\ R^w \downarrow & (2) & \downarrow R^b \\ H^k(X) & \xrightarrow{id} & H^k(X) . \quad \square \end{array}$$

6.5 : Transversalité de cocycles stratifiés abstraits et morphismes contrôlés

A partir de maintenant nous noterons $EH^h(X)$ la cohomologie $AH^h(X)$ d'un E.S.A. X ou bien la cohomologie $BH^h(X)$ (c) -régulière d'une stratification (c) -régulière X et R^e l'application de représentation R^a ou bien à R^b .

Le théorème de cette section est l'analogue pour des E.S.A. et/ou pour des stratifications (c) -régulières de la proposition 5.2 de Goresky [Go]₃.

THEOREME 1. Soient X un E.S.A. ou bien une stratification (c) -régulière, $\mathcal{Y}$ une variété et $f : X \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme stratifié contrôlé. Alors :

1) pour tout élément $[(W, c_W)] \in EH^k(\mathcal{Y})$ il existe un k -cocycle $(W', c_{W'})$ de $\mathcal{Y}$ tel que $\theta' := (W', c_{W'})$ soit cobordant à $\theta = (W, c_W)$ et transverse à $f : X \rightarrow \mathcal{Y}$;

2) $f^*(\theta') := (f^{-1}(W'), f^*(c_{W'}))$ est un k -cocycle de X où :

$$f^*(c_{W'}) := \sum_{j \in J_k} g_j \left(\sum c.c.(f^{-1}(D'_j)) \right) \quad \text{et} \quad c_{W'} := \sum_{j \in J_k} g_j D'_j ;$$

3) l'application f_{strat}^* est bien définie :

$$f^* = f_{strat}^* : EH^k(\mathcal{Y}) \rightarrow EH^k(X) \quad , \quad f^*([(W, c_W)]) := [(f^{-1}(W'), f^*(c_{W'}))];$$

4) l'application f^* commute avec les représentations cohomologiques :

$$\begin{array}{ccc} EH^k(\mathcal{Y}) & \xrightarrow{f_{strat}^*} & EH^k(X) \\ R_{\mathcal{Y}}^e \downarrow & & \downarrow R_X^e \\ H^k(\mathcal{Y}) & \xrightarrow{f_{cohom}^*} & H^k(X). \end{array}$$

Preuve 1. Le théorème de transversalité nous dit que, relativement à la stratification $\mathcal{W}$ de θ , on peut déterminer une isotopie $\Phi : \mathcal{Y} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Y}$ telle que la déformation au temps $t = 1$ de $\mathcal{W}$, i.e. $\mathcal{W}' := \Phi_1(\mathcal{W})$ soit transverse à f .

Comme Φ_1 est un difféomorphisme de la variété $\mathcal{Y}$, il transforme alors chaque k -costrate D_j de $\mathcal{W}$ en une k -costrate $D'_j = \Phi_1(D_j)$ de $\mathcal{W}'$ induisant un isomorphisme $\Phi_{1*} : C^k(W) \rightarrow C^k(W')$ entre les groupes de coorientations de $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}'$.

A la k -coorientation $c_W := \sum_{j \in J_k} g_j D_j \in C^k(W)$ de $\mathcal{W}$ correspond alors de manière naturelle la k -coorientation :

$$c_{W'} := \Phi_{1*}(c_W) = \sum_{j \in J_k} g_j D'_j \in C^k(W') \quad \text{où} \quad D'_j = \Phi_1(D_j), \quad \forall j \in J_k$$

de sorte qu'on ait la k -cochaîne $\theta' = (W', c_{W'})$ de $\mathcal{Y}$.

A ce stade, la preuve que θ' est un k -cocycle, i.e. $\delta c_{W'} = 0$ découle du fait que $\delta c_W = 0$ et de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} C^k(W) & \xrightarrow{\Phi_{1*}} & C^k(W') \\ \delta_W \downarrow & & \downarrow \delta_{W'} \\ C^{k+1}(W^{k+1}) & \xrightarrow{\Phi_{1*}} & C^{k+1}(W'^{k+1}) \end{array}$$

qui se prouve de manière similaire à l'affirmation 2) de la proposition 2 §5 à l'aide du diagramme commutatif cohomologique analogue de la proposition 1 §5 (obtenu en considérant l'isomorphisme ψ^k au lieu de ψ_k et Φ_1 au lieu de f).

Enfin, en considérant la "déformation" induite par Φ_1 de $\mathcal{Y} \times I$ (I = stratification de $[0, 1]$),

$$\Psi : \mathcal{Y} \times I \rightarrow \mathcal{Y} \times I \quad , \quad \Psi(x, t) = (\Phi(x, t), t)$$

et en posant

$$\mathcal{U} := \Phi(\mathcal{W} \times I) \subseteq \mathcal{Y} \times I \quad \text{et} \quad c_U = \Psi_*(c_W \times I) = \sum_{j \in J_k} g_j \Psi(D_j \times]0, 1])$$

on détermine (similairement au lemmme du §4) un cobordisme $\zeta = (U, c_U)$ entre les k -cocycles θ et θ' .

Enfin si $\theta = (W, c_W)$ est (c) -régulier, $\mathcal{Y}$ étant une variété et Φ_1 un difféomorphisme de $\mathcal{Y}$, on déduit immédiatement que θ' et ζ sont deux chaînes (c) -régulières aussi.

Preuve 2. Comme $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est un morphisme stratifié et $\mathcal{W}'$ est transverse à f , alors $f^{-1}(\mathcal{W}')$ se restratifie par une partition en variétés connexes :

$$f^{-1}(W') = \bigcup_{S \text{ strate de } \mathcal{X}} f_S^{-1}(W') = \bigcup_{S \text{ strate de } \mathcal{X}} \bigcup_{R \text{ strate de } \mathcal{W}'} c.c.(f_S^{-1}(R)),$$

de sorte que (par transversalité) les strates de $f^{-1}(\mathcal{W}')$ dans $\mathcal{X}$ préservent la même codimension que les strates correspondantes de $\mathcal{W}'$ dans $\mathcal{Y}$.

Le morphisme stratifié f étant contrôlé et $\mathcal{W}'$ vérifiant la condition de π -fibre alors $f^{-1}(W')$ vérifie la condition de π -fibre également.

Pour toute strate S de $\mathcal{X}$, la partition en variétés connexes $\{c.c.(f_S^{-1}(R))\}_{R \subseteq \mathcal{W}'}$ de la préimage $f_S^{-1}(W') = f^{-1}(W') \cap S$ est localement finie et vérifie la condition de frontière dans la variété S grâce à la proposition 2.8) [Be] et de plus une telle propriété reste encore valable pour la la partition en strate de $f^{-1}(W') \cap \bar{S}$ par la condition de π -fibre. Donc la partition en variétés connexes $\{c.c.(f_S^{-1}(R))\}_{S \subseteq \mathcal{X}, R \subseteq \mathcal{W}'}$ définit une stratification de $f^{-1}(\mathcal{W}')$.

Dans le cas où $\mathcal{X}$ et $\mathcal{W}'$ sont deux stratifications (c) -régulières, alors chaque $f_S^{-1}(W')$ est (c) -régulière à nouveau par la proposition 2.8) [Be]. Alors afin d'obtenir que toute la stratification $f^{-1}(\mathcal{W}') = \cup_S f_S^{-1}(W')$ soit encore (c) -régulière, il reste à vérifier que si $S < S'$ sont deux strates de $\mathcal{X}$ et $A < A'$ sont deux strates de $f^{-1}(\mathcal{W}')$ telles que $A \subseteq S$ et $A' \subseteq S'$ alors le couple $A < A'$ est également (c) -régulier.

Il faut d'abord remarquer que le couple $A < A'$ est dans ce cas (a) -régulier grâce à la condition de π -fibre. En considérant alors comme fonction distance $\rho_{AA'}$ la restriction $\rho_{AA'}(a') := \rho_{SS'|A'}(a')$ de $\ker \rho_{AA'*a'} = \ker \rho_{SS'*a'} \cap T_{a'}A'$ et comme la (c) -régularité de $S < S'$ et la (a) -régularité de $A < A'$ entraînent respectivement que :

$$\lim_{a' \rightarrow a} \ker \rho_{SS'*a'} \supseteq T_a A \quad \text{et} \quad \lim_{a' \rightarrow a} T_{a'} S' \supseteq T_a A$$

il en découle que

$$\lim_{a' \rightarrow a} \ker \rho_{AA'*a'} = \left(\lim_{a' \rightarrow a} \ker \rho_{SS'*a'} \right) \cap \left(\lim_{a' \rightarrow a} T_{a'} A' \right) \supseteq T_a S \cap T_a A = T_a A.$$

On en déduit enfin que si les stratifications $\mathcal{X}$ et $\mathcal{W}'$ sont (c) -régulières alors $f^{-1}(\mathcal{W}')$ l'est également.

Maintenant, comme les strates de $f^{-1}(\mathcal{W}')$ dans $\mathcal{X}$ préservent la même codimension que les strates correspondantes de $\mathcal{W}'$ dans $\mathcal{Y}$ alors à toute k -costrate D'_j de $\mathcal{W}'$ correspond la famille des k -costrates $c.c.(f^{-1}(D'_j))$ et on a un homomorphisme entre les groupes de coorientations

$$f^* : C^k(W') \rightarrow C^k(f^{-1}(W')) \quad \text{où} \quad f^* \left(\sum_{s \in \Gamma_k} h_s D_s^k \right) := \sum_{s \in \Gamma_k} h_s \left(\sum c.c.(f^{-1}(D_s^k)) \right).$$

Donc $f^*(\theta') := (f^{-1}(W'), f^*(c_{W'}))$ est une k -cochaîne de $\mathcal{X}$ et est de plus un k -cocycle car $\delta f^*(c_{W'}) = f^* \delta(c_{W'}) = 0$ en raisonnant de même que pour $\delta(\Phi_{1*}(c_W))$ dans

la *preuve 1* (à l'aide de l'analogue cohomologique de la proposition 1 §5 à propos de l'isomorphisme $\psi^k : C^k(W^k) \rightarrow H^k(X - W^{k+1}, X - W^k)$).

Preuve 3. Si θ' et θ'' sont deux k -cocycles cobordants à θ , transversaux à $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ et obtenus par le théorème de transversalité, alors (quitte à le “déformer”) un cobordisme $\zeta : \theta' \equiv \theta''$ peut être supposé transverse à $f \times 1_I : \mathcal{X} \times I \rightarrow \mathcal{Y} \times I$ de sorte que la préimage $(f \times 1_I)^*(\zeta)$ soit un cobordisme entre $f^*(\theta')$ et $f^*(\theta'')$.

D'autre part, si la stratification $\mathcal{X}$, les cycles θ et θ' et le cobordisme ζ sont tous (c) -réguliers, alors le cobordisme $(f \times 1_I)^*(\zeta)$ est encore (c) -régulier en raisonnant de même que pour $f^*(\theta')$ dans la *preuve 2*.

Preuve 4). C'est très similaire à la preuve du théorème 1 au §5 (pour un P.S.A. f , en homologie), où maintenant l'on doit seulement remplacer les diagrammes commutatifs (1), (2) et (3) par leurs correspondants cohomologiques et utiliser les définitions des applications représentations cohomologiques :

$$\begin{cases} R_{\mathcal{X}}^e([f^*(\theta')]) := I_V^* i_V^{*-1} \psi^k(c) \\ R_{\mathcal{Y}}^e([\theta']) = I_{W'}^* i_{W'}^{*-1} \phi^k(c_{W'}) \end{cases}$$

où on a posé $(V, c) = f^*(\theta') = (f^{-1}(W'), f^*(c_{W'}))$. $\square$

6.6 : Produits en cohomologie stratifiée

Soient maintenant

$$\alpha = [(V, c_V)] \in EH^h(\mathcal{X}) \quad \text{et} \quad \beta = [(W, c_W)] \in EH^k(\mathcal{X}).$$

Par transversalité à l'application $i : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{X}$, la classe β peut alors être représentée par un k -cocycle $\beta = [(W', c_{W'})]$ tel que $\mathcal{W}'$ soit transverse à $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{X}$.

A la différence du cas homologique, la condition de π -fibre caractéristique des cocycles nous permet de montrer le lemme suivant :

LEMME. 1) *L'intersection et la réunion transversale $\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W}'$ et $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}'$ définissent deux stratifications.*

2) *Si $\mathcal{X}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont (c) -régulières alors $\mathcal{W}'$ ainsi que $\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W}'$ et $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}'$ sont encore (c) -régulières.*

Preuve 1). Pour toute strate S de $\mathcal{X}$, grâce à la proposition 2.7) [Be], les restrictions $[\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W}']_S$ et $[\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}']_S$ à la variété S vérifient les conditions de local finitude et de frontière et sont de plus (c) -régulières si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}'$ le sont.

D'autre part, comme $\mathcal{V}$ vérifie la condition de π -fibre dans $\mathcal{X}$ alors pour tout couple de strate $S < S'$ de $\mathcal{X}$ et $R < R'$ de $\mathcal{V}$ tels que $R \subseteq S$ et $R' \subseteq S'$ la formule $R' \cap T_{SS'}(\epsilon) = \pi_{SS'}^{-1}(R) \cap T_{SS'}(\epsilon)$ (remarque 1, §6.1) dit précisément que les (parties des) strates R' de $\mathcal{V}$ dans $T_S(\epsilon)$ sont les (parties des) strates $\pi_{SS'}^{-1}(R)$ “continuations” des strates R de $\mathcal{V}$ dans S via $\pi_{SS'}^{-1}$. La même propriété vaut alors pour $\mathcal{W}'$ qui vérifie la condition de π -fibre dans $\mathcal{X}$ et de plus reste également valable pour les partitions en strates $[\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W}']$ et $[\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}']$ car il est immédiat vérifier que ces dernières aussi la vérifient (sous l'hypothèse que $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}'$ la vérifient).

Alors les (parties des) strates de $\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W}'$ et $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}'$ dans $T_{SS'}(\epsilon)$ sont précisément les (parties des) “continuations” des strates de $\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W}'$ et $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}'$ dans S via $\pi_{SS'}^{-1}$ et

cela permet de conclure que les partitions en variétés $\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W}'$ et $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}'$ vérifient les conditions de local finitude et de frontière et définissent donc des stratifications.

Preuve 2). Si $\mathcal{W}$ est (c) -régulier, le théorème de transversalité ne suffit pas pour avoir automatiquement que l'O.S.S. $\mathcal{W}' := \Phi_1(\mathcal{W})$ déformé de $\mathcal{W}$ dans X est (c) -régulier (sauf si l'on dispose de la semidifférentiabilité de Φ_1). En revanche, la déformation $\Phi_1 : X \rightarrow X$ étant un homéomorphisme stratifié contrôlé, on a d'une part que $\mathcal{W}'$ vérifie la condition de π -fibre (car $\mathcal{W}$ la vérifie), d'autre part que pour toute strate S de X , la restriction $\mathcal{W}'_S$ est (c) -régulière et enfin que $\mathcal{W}'$ est au moins (a) -régulière grâce encore à la condition de π -fibre et car les projections $\pi_{SS'} : T_{SS'} = T_S \cap S' \rightarrow S$ du S.D.C. de X sont lisses.

Soient alors $R < R'$ deux strates de $\mathcal{W}'$ telles que $R \subseteq S$ et $R' \subseteq S'$. Afin de montrer la (c) -régularité de $R < R'$, considérons comme fonction distance $\rho_{RR'}$ la restriction $\rho_{RR'}(r) = \rho_{S|R'}(r)$. La preuve que $\mathcal{W}'$ est une stratification (c) -régulière se conclut alors de même qu'à la 2) du théorème 1 à la section §6.5 en utilisant que la fonction $\rho_{SS'}$ est de Thom par la (c) -régularité de X .

Enfin $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}'$ étant (c) -régulières et $\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W}'$ et $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}'$ vérifiant la condition de π -fibre dans l'espace (c) -régulier X , on peut déduire la (c) -régularité de $\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W}'$ et $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}'$, en raisonnant de manière complètement similaire que pour $\mathcal{W}'$. $\square$

PROPOSITION 3. *L'intersection transversale $\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W}'$ détermine, pour un choix convenable de la coorientation $c_{V \cap W'} \in C^{h+k}(V \cap W')$ un $(h+k)$ -cocycle $(V \cap_t W', c_{V \cap W'})$ de X tel que l'application*

$$\begin{aligned} \cap_t : \quad EH^h(X) \times EH^k(X) &\longrightarrow EH^{h+k}(X) \\ \left([(V, c_V)], [(W, c_W)] \right) &\longmapsto [(V, c_V)] \cap_t [(W, c_W)] := [(V \cap W', c_{V \cap W'})] \end{aligned}$$

est bien définie et en notant “ $\cup$ ” le produit “cup” ordinaire en $H^*(X)$ on a :

$$[1] : \quad R^e \left([(V, c_V)] \cap_t [(W, c_W)] \right) = R^e([(V, c_V)]) \cup R^e([(W, c_W)]) .$$

Preuve. Voir [Go]₃ proposition 6.2 (où les parenthèses $[*]$ notent l'image $R(*)$ via la représentation cohomologique R de $*$). $\square$

Avec des notations similaires, en considérant le produit “cap” dans la théorie singulière on obtient :

PROPOSITION 4. *Si (V, z_V) est un h -cycle de X , tel que l'intersection transversale $\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W}'$ soit une stratification, alors pour un choix convenable de la coorientation $z_{V \cap W'} \in C_{h-k}(V \cap W')$, $\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W}'$ détermine un $(h-k)$ -cycle $(V \cap_t W', z_{V \cap_t W'})$ de X tel qu'en notant “ $\cap$ ” le produit “cap” ordinaire en $H^*(X)$ on a :*

$$[2] : \quad R^e \left([(V \cap_t W', z_{V \cap_t W'})] \right) = R_e([(V, c_V)]) \cap R^e([(W', c_{W'})]) .$$

Preuve. Voir [Go]₃ proposition 6.3. Précisons seulement que les $(h-k)$ -strates de $V \cap W'$ sont données par les intersections des h -strates de V avec les k -costrates de W . $\square$

Dans le cas où X est une variété, l'intersection transversale $\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W}'$ définissant toujours une stratification [Be], la proposition 4 entraîne alors :

COROLLAIRE. Si $\mathcal{X}$ est une variété, l'application

$$\begin{aligned} \sqcap_t : EH_h(\mathcal{X}) \times EH^k(\mathcal{X}) &\longrightarrow EH_{h-k}(\mathcal{X}) \\ \left([(V, z_V)], [(W, c_W)] \right) &\longmapsto [(V, z_V)] \sqcap_t [(W', c_{W'})] := [(V \cap W', z_{V \cap W'})] \end{aligned}$$

est bien définie et on a :

$$[2] : R^e \left([(V, c_V)] \sqcap_t [(W', c_{W'})] \right) = R_e([(V, c_V)]) \cap R^e([(W', c_{W'})]) . \quad \square$$

Dans le cas du produit “cross”, le produit cartésien de deux E.S.A. et/ou de deux stratifications (c)-régulières étant encore un E.S.A. et/ou une stratification (c)-régulière, on obtient alors :

PROPOSITION 5. L'application

$$\begin{aligned} \times : EH^h(\mathcal{X}) \times EH^k(\mathcal{Y}) &\longrightarrow EH^{h+k}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \\ \left([(V, c_V)], [(W, c_W)] \right) &\longmapsto [(V, c_V)] \times [(W, c_W)] := [(V \times W, c_{V \times W})] \end{aligned}$$

est bien définie et si “ $\times$ ” désigne aussi le produit “cross” ordinaire, on a :

$$[3] : R_{\mathcal{X}}^e \times R_{\mathcal{Y}}^e \left([(V, c_V)] \times [(W, c_W)] \right) = R^e([(V, c_V)]) \times R^e([(W, c_W)]) . \quad \square$$

6.7 : Bijectivité des applications de représentation cohomologique

L'analogue du théorème de représentation cohomologique de Goresky est encore valable pour les théories AH^* et BH^* :

THEOREME 2. Si $\mathcal{X}$ est un E.S.A. et/ou une stratification (c)-régulière compact, la représentation cohomologique

$$R^e : EH^k(\mathcal{X}) \rightarrow H^k(\mathcal{X}) \quad \text{est une bijection.}$$

Preuve. Considérons d'abord le cas où $\mathcal{X}$ est un E.S.A.

$\mathcal{X}$ n'est alors pas nécessairement plongé dans une variété. Soit alors un plongement (b)-régulier $\phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^m$ de $\mathcal{X}$ dans $\mathbb{R}^m$ [Te] et une variété compacte orientable M' contenant $\mathcal{X}' := \phi(\mathcal{X})$.

Comme le raffinement $\mathcal{M}' := [M' - \mathcal{X}'] \cup \mathcal{X}'$ de M' est évidemment encore une stratification de Whitney (i.e. (b)-régulière), on peut alors construire pour $\mathcal{M}'$ un système de données de contrôle $\mathcal{T}' := \{(\pi_{R'}, \rho_{R'}) : T_{R'} \times [0, 1]_{R'} \mid \mathbf{Ma}\}$ où pour toute strate R' de $\mathcal{M}'$ (et en particulier de $\mathcal{X}'$), $T_{R'}$ est un voisinage tubulaire de R' dans M' .

En notant $M := \mathcal{X} \cup [M' - \mathcal{X}']$ et

$$\psi = \phi \cup 1_{[M' - \mathcal{X}']} : M = \mathcal{X} \cup [M' - \mathcal{X}'] \longrightarrow M' = \mathcal{X}' \cup [M' - \mathcal{X}']$$

par préimage via l'application ψ , on peut donner à M une structure de variété différentiable abstraite contenant $\mathcal{X}$ et par rapport à laquelle ψ est un difféomorphisme.

La restratification $\mathcal{M} := [M - X] \cup X$ de M , admet un S.D.C. $\mathcal{T} = \{(\pi_R, \rho_R) : T_R \times [0, 1]_{R,t} \text{ préimage de } \mathcal{T}' \text{ via } \psi \text{ et acquiert une structure d'E.S.A. dans laquelle pour toute strate } R \text{ de } X \text{ (et de } \mathcal{M}), T_S \text{ est un voisinage tubulaire de } R \text{ dans } M.$

Comme $\mathcal{M}$ muni du S.D.C. $\mathcal{T}$ est un E.S.A., on peut alors construire une “famille de lignes” $[\mathbf{Go}]_2$, $\mathcal{F} = \{r_R^t : T_R - R \rightarrow S_R(t)\}_R$ pour $\mathcal{M}$ compatible avec $\mathcal{T}$.

L'existence d'une telle famille de lignes $\mathcal{F}$ permet la construction d'une importante rétraction par déformation $[\mathbf{Go}]_3$,

$$f : U(\epsilon) \rightarrow X \quad \text{où} \quad U(\epsilon) := \bigcup_{R \text{ strate de } X} T_R(\epsilon),$$

obtenue en composant $f|_X$ avec l'inclusion stratifiée i , $g = i \circ f|_X : X \rightarrow U(\epsilon)$ (i.e. $f \circ g \cong 1_X$) où $U(\epsilon)$ est un voisinage de X dans M .

A partir de telles applications f et g , la suite de la démonstration se complète de même que dans $[\mathbf{Go}]_3$ §7 “*Proof. of Theorem 4.7 (for X compact)*” grâce au théorème 1 à la section 7 appliqué à la fonction $g : X \hookrightarrow U(\epsilon)$ à valeurs dans la variété $U(\epsilon)$.

Nous précisons alors seulement que dans le cas où X est (c) -régulière, X est alors par définition plongée dans une variété M qui peut toujours être supposée orientable et d'autre part, la stratification $[M - X] \cup X$ est évidemment encore (c) -régulière ainsi que la restratification $[U(\epsilon) - X] \cup X$ de la variété $U(\epsilon)$. $\square$

6.8 : La somme transversale et les homomorphismes induits

Soit X un E.S.A. ou une stratification (c) -régulière. Comme les applications de représentation cohomologiques

$$R^a : AH^k(X) \rightarrow H^k(X) \quad \text{et} \quad R^b : BH^k(X) \rightarrow H^k(X)$$

sont bijectives, les ensembles $AH^k(X)$ et $BH^k(X)$ héritent alors par préimage via R^a ou via R^b d'une opération de groupe $+$ par laquelle R^a ou R^b devient un isomorphisme. Appelons une telle opération de groupe la R^a -somme de $AH^k(X)$ ou R^b -somme de $BH^k(X)$.

Notons alors $EH^h(X)$ la cohomologie $AH^h(X)$ d'un E.S.A. X ou bien la cohomologie $BH^h(X)$ (c) -régulière d'une stratification (c) -régulière et R^e l'application de représentation correspondante R^a ou bien R^b .

Soient maintenant $\alpha = [(V, c_V)]$ et $\beta = [(W, c_W)]$ deux éléments de $EH^k(X)$. Par transversalité à l'application $i : \mathcal{V} \rightarrow X$, la classe β peut être représentée par un k -cocycle $\beta = [(W', c_{W'})]$ tel que $\mathcal{W}'$ soit cobordant à $\mathcal{W}$ et transverse à $\mathcal{V}$.

Rappelons, comme vu à la section 6 que :

a) dans le cas où X est un E.S.A. (et $EH = AH$), la réunion transversale $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}'$ est encore une stratification.

b) dans le cas où X est (c) -régulière (et $EH = BH$), $\mathcal{W}'$ est encore (c) -régulière et $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}'$ est encore une stratification (c) -régulière.

Alors, de manière analogue au cas homologique traité au §4, l'union transversale $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}'$ détermine, pour un choix naturel de la coorientation $c_{V \cup_t W'} \in C^k(V \cup W')$, un k -cocycle de X , noté $\theta_V +_t \theta_{W'} = (\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}', c_{V \cup_t W'})$ lequel similairement au cas homologique sera dit la *somme transversale des cocycles* θ_V et $\theta_{W'}$ et avec lequel on a :

THEOREME 3. *Si X est un ensemble stratifié abstrait ou bien une stratification (c)-régulière, alors l'opération*

$$\begin{aligned} \cup_t : EH^k(X) \times EH^k(X) &\longrightarrow EH^k(X) \\ ([\theta_V], [\theta_W]) &\longmapsto [\theta_V] \cup_t [\theta_W] := [\theta_V +_t \theta_W] \end{aligned}$$

est bien définie dans $EH^k(X)$ et le munit d'une structure de groupe abélien avec laquelle l'application de représentation cohomologique

$$R^e : EH^k(X) \rightarrow H^k(X) \quad \text{est un isomorphisme de groupes.}$$

Preuve. Etant donnée la bijectivité de l'application de représentation R^e il suffit alors seulement de vérifier l'égalité

$$R^e([\theta_V +_t \theta_{W'}]) = R^e([\theta_V]) + R^e([\theta_{W'}]) .$$

La preuve devient donc la même que celle faite dans $[\mathbf{Mu}]_1$ pour l'homologie de Whitney WH_k d'une variété, où l'on doit seulement remplacer tous les diagrammes commutatifs considérés par leurs correspondants cohomologiques. $\square$

DEFINITION 1. Soit X un E.S.A. ou bien une stratification (c)-régulière. L'opération $\cup_t : EH^k(X) \times EH^k(X) \rightarrow EH^k(X)$ sera dite la *somme transversale dans $EH^k(X)$* . Donc le théorème précédent dit que la R^a -somme de $AH_k(X)$ et la R^b -somme de $BH^k(X)$ coïncident avec la somme transversale.

Les groupes $(AH^k(X), \cup_t)$ et $(BH^k(X), \cup_t)$ seront dits respectivement le k^{eme} -groupe de cohomologie stratifiée abstraite de X et le k^{eme} -groupe de cohomologie (c)-régulière de X .

PROPOSITION 6. *Si X et $\mathcal{Y}$ sont des E.S.A. ou bien deux stratifications (c)-régulières et $f : X \rightarrow \mathcal{Y}$ est un morphisme contrôlé, l'application $f^* : EH^k(\mathcal{Y}) \rightarrow EH^k(X)$ est alors un homomorphisme des groupes de cohomologie stratifiée $EH^k(\mathcal{Y})$ et $EH^k(X)$.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la commutativité du diagramme dans l'affirmation 3) du théorème 1 au §6.5. et du théorème 3. $\square$

REMARQUE. *Si $[(W, c_W)] \in EH^k(\mathcal{Y})$ et si $(W', c_{W'})$ est un cocycle cobordant à (W, c_W) , transverse à f dont la préimage $f^{-1}(W')$ est une stratification, on a alors :*

$$f^*([(W, c_W)]) = f^*([(W', c_{W'})]) = [(f^{-1}(W'), f^*(c_{W'}))].$$

Ceci est toujours le cas si $\mathcal{Y}$ est une variété (théorème 1 §6.5).

6.9 : Functorialité de AH^k et BH^k

Rappelons que, par définition, chaque ensemble stratifié abstrait X est défini en considérant fixé (avec X) un système de données de contrôle $[\mathbf{Ma}]$.

Etant donnés trois E.S.A. $X, \mathcal{Y}$ et Z munis de leurs S.D.C. respectivement $\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$ et $\mathcal{T}_Z$, il est immédiat de vérifier que si $f : X \rightarrow \mathcal{Y}$ est une application contrôlée par

rapport à $\mathcal{T}_X$ et $\mathcal{T}_Y$ et si $g : Y \rightarrow Z$ est contrôlée par rapport à $\mathcal{T}_Y$ et $\mathcal{T}_Z$, alors l'application composée $g \circ f : X \rightarrow Z$ est une application stratifiée contrôlée par rapport à $\mathcal{T}_X$ et $\mathcal{T}_Z$.

Nous pouvons donc considérer la catégorie $(\mathcal{ESA}, \mathcal{MSC})$ ayant pour objets les ensembles stratifiés abstraits et pour ensemble de morphismes l'ensemble $\mathcal{MSC}$ des morphismes stratifiés contrôlés

$$\mathcal{MSC} := \bigcup_{X, Y \in \mathcal{ESA}} \mathcal{MSC}(X, Y) \quad \text{où} \quad \mathcal{MSC}(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ est contrôlée}\}.$$

Similairement, comme toute stratification (c) -régulière admet une structure d'E.S.A. et donc un S.D.C. [Be], on peut considérer la catégorie $(\mathcal{ESB}, \mathcal{MSC})$ dont les objets éléments de $\mathcal{ESB}$ sont les stratifications (c) -régulières $X \in \mathcal{MSB}$ munies d'un S.D.C. fixé et on a :

PROPOSITION 7. $AH^k : (\mathcal{ESA}, \mathcal{MSC}) \rightarrow (\mathcal{GA}, \text{hom}(\mathcal{GA}))$ et $BH^k : (\mathcal{ESB}, \mathcal{MSC}) \rightarrow (\mathcal{GA}, \text{hom}(\mathcal{GA}))$ sont des foncteurs contravariants à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens $(\mathcal{GA}, \text{hom}(\mathcal{GA}))$.

Preuve. On a vu au §8 que toute application contrôlée $f : X \rightarrow Y$ détermine un homomorphisme $f^* : EH^k(Y) \rightarrow EH^k(X)$, entre les groupes d'homologie stratifiée.

D'autre part, pour vérifier que si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont deux applications contrôlées alors $EH^k(g \circ f) = EH^k(f) \circ EH^k(g)$, i.e. avec les notations standards que $(g \circ f)_{\text{strat.}}^* = f_{\text{strat.}}^* \circ g_{\text{strat.}}^*$, il suffit de remarquer que par la bijectivité des applications R_X^e, R_Y^e et R_Z^e et de la 3) du théorème 1 §6.5 on a :

$$(g \circ f)_{\text{strat.}}^* := R_Z^e{}^{-1} \circ (g \circ f)_{\text{cohom.}}^* \circ R_X^e = R_Z^e{}^{-1} \circ f_{\text{cohom.}}^* \circ g_{\text{cohom.}}^* \circ R_X^e{}^{-1} = \\ \left(R_Z^e{}^{-1} \circ f_{\text{cohom.}}^* \circ R_Y^e \right) \circ \left(R_Y^e{}^{-1} \circ g_{\text{cohom.}}^* \circ R_X^e \right) = f_{\text{strat.}}^* \circ g_{\text{strat.}}^* . \quad \square$$

Dans ce langage, on peut reformuler les résultats des sections précédentes par :

THEOREME 4. La correspondance de foncteurs

$$R^e : EH^k \rightarrow H^k \quad , \quad \begin{cases} EH^k(X) \xrightarrow{R^e} H^k(X) \\ f_{\text{strat.}}^* \xrightarrow{R^e} f_{\text{homol.}}^* \end{cases}$$

est une équivalence naturelle de foncteurs contravariants.

Preuve. C'est précisément la bijectivité de toutes les applications de représentations cohomologiques R^e et leur commutativité avec les applications induites $f_{\text{strat.}}^*$. $\square$

6.10 : Dualité de Poincaré en cohomologie stratifiée

Notons $EH^k = AH^k$ ou bien $EH^k = BH^k$. Alors on a :

THEOREME 5. Si X est une n -variété compacte sans bord, l'isomorphisme de “dualité de Poincaré” $\mathcal{D}$ en cohomologie stratifiée $EH^k(X)$ est l'identité sur les cycles représentatifs,

$$\mathcal{D} : EH_k(X) \rightarrow EH^{n-k}(X) \quad , \quad \mathcal{D}([\xi_V]) = [\xi_V]$$

i.e. s'obtient en interprétant chaque k -cycle ξ_V de X comme un $(n-k)$ -cocycle de X .

Preuve. Sous l'hypothèse où $X = \{M\}$ est une variété (les projections du S.D.C. $\mathcal{T}$ de X se réduisant à l'identité), tout O.S.S. $\mathcal{V}$ de X vérifie trivialement la condition de π -fibre.

Si $\xi_V = (V, z_V)$ est un k -cycle de X avec stratification $\mathcal{V}$, alors chaque k -strate V_j^k de $\mathcal{V}$ est aussi une $(n-k)$ -costrate de $\mathcal{V}$. Par conséquent : $C^k(V) = C^{n-k}(V)$.

En particulier $z_V \in C^{n-k}(V)$ et donc $\xi_V = (V, z_V)$ est aussi une k -cochaîne de X .

Montrons maintenant que

$$\xi_V \text{ est } k\text{-cycle de } X \iff \xi_V \text{ est } k\text{-cocycle de } X$$

i.e., que " $\partial_k z_V = 0 \iff \delta^{n-k} z_V = 0$ ".

Dans ce but, il faut d'abord rappeler que, par définition, les opérateurs de bord ∂_k (et resp. cobord δ^{n-k}) avaient été définis comme compositions d'homomorphismes de la ligne supérieure (et resp. inférieure) du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} C_k(V) & \xrightarrow{\psi_k} & H_k(V_k, V_{k-1}) & \xrightarrow{\partial_k} & H_{k-1}(V_{k-1}, V_{k-2}) & \xrightarrow{\psi_{k-1}^{-1}} & C_{k-1}(V) \\ \parallel & & \gamma_U \downarrow & & \gamma'_U \downarrow & & \parallel \\ C^{n-k}(V) & \xrightarrow{\psi^{n-k}} & H^{n-k}(X - V_{k-1}, X - V_k) & \xrightarrow{\delta^{n-k}} & H^{n-k+1}(X - V_{k-2}, X - V_{k-1}) & \xrightarrow{(\psi^{n-k+1})^{-1}} & C^{n-k+1}(V), \end{array}$$

où dans la ligne inférieure du diagramme nous avons utilisé que $V_{k-1} = V^{n-k+1}$, $V_k = V^{n-k}$ et $V_{n-k-2} = V^{k+2}$.

Les isomorphismes ψ_k et ψ^{n-k} ainsi que les isomorphismes ψ_{k-1} et ψ^{n-k+1} sont contruits dans [Mu]₁ §3.3 par composition d'isomorphismes de rétraction et d'excision en utilisant des voisinages tubulaires $\{T_R\}$ des k -strates et respectivement des voisinages tubulaires $\{T_D\}$ des k -costrates de $\mathcal{V}$ (du type considéré à la remarque 1 §6.1).

Comme $X = \{M\}$ est une variété, les k -strates de ξ_V coïncident avec les k -costrates de ξ_V et on peut donc choisir les T_D coïncidant avec les T_R .

De telle manière, si les applications γ_U et γ'_U sont les isomorphismes du "théorème de dualité" ([Sp] chap. 6, sec. 17, pag. 296, theorem 1) relatifs aux couples compacts (V_k, V_{k-1}) et (V_{k-1}, V_{k-2}) dans X , on obtient la commutativité du diagramme ci-dessus et donc l'équivalence " $\partial_k z_V = 0 \iff \delta^{n-k} z_V = 0$ " (*).

Une analyse analogue au niveau des cobordismes montre que l'application de dualité $\mathcal{D} : EH_k(X) \rightarrow EH^{n-k}(X)$ est bien définie.

En réinterprétant similairement chaque $(n-k)$ -cocycle $\theta_V = (V, c_V)$ de X comme un k -cycle, on peut définir similairement l'application

$$\mathcal{D}' : EH^{n-k}(X) \xrightarrow{\sqcap_t[M]} EH_k(X) \quad , \quad D'([\theta_V]) := [\theta_V]$$

qui coïncide évidemment avec l'homomorphisme $\gamma_{[M]} := \sqcap_t[M]$, où $[M] \in EH_n(X)$ note la classe fondamentale dans $EH_n(X)$, et qui rend commutatif le diagramme suivant (propo-

(*) En définissant l'isomorphisme ψ^{n-k} "adapté" à (et donc après avoir construit) l'isomorphisme ψ_k , il me semblerait possible d'obtenir de plus l'égalité : $\psi_k = \psi^{n-k}$.

sition 4, §6.6) :

$$\begin{array}{ccc} EH^{n-k}(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\cap_t[M]} & EH_k(\mathcal{X}) \\ R^e \downarrow & & \downarrow R_e \\ H^{n-k}(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\cap[M]} & H_k(\mathcal{X}). \end{array}$$

On conclut alors que $\mathcal{D}$ est bien la dualité de Poincaré en homologie stratifiée et que l'application $\mathcal{D}'$ est sa fonction réciproque. $\square$

Si $\mathcal{X}$ n'est pas une variété, mais en revanche $\mathcal{X}_{n-1} = \emptyset$ (où $n = \dim X$) alors il existe encore une classe fondamentale $[\mathcal{X}] \in EH_k(\mathcal{X})$; dans ce cas $\mathcal{X}$ est dit une pseudovariété (ou “un circuit” [MC]) et on a :

PROPOSITION 8. *L'homomorphisme de “dualité”*

$$\mathcal{D}' : EH^{n-k}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\cap_t[M]} EH_k(\mathcal{X}) \quad , \quad \mathcal{D}'([\theta_V]) = [\theta_V] \cap_t [M] = [\theta_V]$$

existe encore pour $\mathcal{X}$ et il interprète chaque $(n-k)$ -cocycle de $\mathcal{X}$ comme un k -cycle de $\mathcal{X}$. $\square$

6.11 : Résumé des contenus géométriques de la cohomologie stratifiée

La bijectivité des applications de représentation homologique et cohomologique

$$R_e : EH_k(\mathcal{X}) \rightarrow H_k(\mathcal{X}) \quad \text{et} \quad R^e : EH^k(\mathcal{X}) \rightarrow H^k(\mathcal{X})$$

permet de résumer les résultats obtenus sur les opérations définies aux sections §6.6 et §6.8 et §6.10 par les interprétations géométriques suivantes :

THEOREME 4. *Dans les théories cohomologiques EH^* , on a :*

1) *L'opération de “somme” $+_{EH}$ de $EH^k(\mathcal{X})$ est donnée au niveau des cocycles représentatifs par la réunion transverse de deux cocycles : i.e. $+ = \cup_t$.*

2) *Les homomorphismes induits $f_{strat}^* : EH^k(\mathcal{Y}) \rightarrow EH^k(\mathcal{X})$ s'interprètent au niveau des cocycles représentatifs par la préimage transverse des cocycles de $\mathcal{Y}$; i.e. : $f_{strat}^*[\theta] = [f^{-1}(\theta')]$ (θ' étant un k -cocycle de $\mathcal{Y}$ cobordant à θ et transverse à f).*

3) *Le produit “cup” $\cup_{EH}$ de EH^* est donné au niveau des cocycles représentatifs par l'intersection transverse de deux cocycles : i.e. $\cup_{EH} = \cap_t$.*

4) *Le produit “cap” $\cap_{EH}$ dans $EH_* \times EH^*$ s'interprète au niveau des éléments représentatifs par l'intersection transverse d'un cycle et d'un cocycle : i.e. $\cap_{EH} = \cap_t$.*

5) *Le produit “cross” $\times_{EH^*}$ de EH^* est donné au niveau des cocycles représentatifs par le produit cartésien de deux cocycles : i.e. $\times_{EH^*} = \times$.*

6) *L'isomorphisme de dualité (quand $\mathcal{X}$ est une variété)*

$$\mathcal{D} : EH_k(\mathcal{X}) \rightarrow EH^{n-k}(\mathcal{X}) \quad , \quad \mathcal{D}([(V, z_V)]) = [(V, z_V)]$$

est l'identité sur les cycles représentatifs, i.e., il s'obtient en interprétant chaque k -cycle de $\mathcal{X}$ comme un $(n-k)$ -cocycle de $\mathcal{X}$.

REMARQUE. Une construction géométrique des opérations cohomologiques “les carrés” et “les p -puissances de Steenrod” (p -premier) peut être obtenue pour les théories AH^* et BH^* de manière similaire à ce qui a été fait dans [Mu]_{1,2} pour la cohomologie de Whitney WH^* . $\square$

BIBLIOGRAPHIE

- [Be] K. Bekka, *(c)-régularité et trivialité topologique*, Singularity theory and its applications, Warwick 1989, Part I, Lecture Notes in Math. 1462 (Springer, Berlin 1991), pp. 42-62.
- [BRS] S. Buoncristiano, C. Rourke & B. Sanderson, *A geometric approach to homology theory*, London Math.Soc. Lecture Notes, vol 18, Cambridge Univ.press, New York, 1976.
- [Fu] W. Fulton, *Intersection theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge Band 2, Springer Verlag Berlin Heidelberg, (1984).
- [Go]₁ M. Goresky, *Geometric Cohomology and Holomogy of Stratified objects*, Ph.D. Thesis, Brown University, 1976.
- [Go]₂ M. Goresky, *Triangulation of stratified objects*, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), 193-200.
- [Go]₃ M. Goresky, *Whitney stratified chains and cochains*, Trans. Amer. Math. Soc., **267**(1981), 175-196.
- [Ma] J. Mather, *Notes on topological stability*, Mimeographed notes, Harvard University, (1970).
- [MC] C. McCrory, *Poincaré Duality in Spaces with Singularities*, Ph.D. thesis, Brandeis University, (1972).
- [Mu]₁ C. Murolo, *Whitney homology, cohomology and Steenrod Squares*, Ricerche di Matematica, Univ. Naples, Vol XLIII, (1994), 175-204.
- [Mu]₂ C. Murolo, *The Steenrod p-powers in Whitney cohomology*, Topology and Its Applications, Vol 68, (1996), 133-151.
- [Na] H. Natsume, *The realization of abstract stratified sets*, Kodai Math. J., **3** (1980) 1-7.
- [No] L. Noirel, *Plongements sous-analytiques d'espaces stratifiés de Thom-Mather*, Thèse, 1996, Université de Provence, Marseille, France.
- [SE] N.Steenrod and D.Epstein, *Cohomology operations*, Ann. of Math. Studies 50, Princeton Univ. Press. 1962.
- [Sp] E.H.Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966.
- [Te] M. Teufel, *Abstract stratified sets are (b)-regular*, Journal of Diff. Geom., **16** (1981), 529-536.
- [Ve] A. Verona, *Triangulation of stratified fiber bundles*, Manuscripta Math. **30** (1980), 425-445.
- [Wh] H.Whitney, *Geometric Methods in Cohomology*, Proc.Nat.Acad.Sci., U.S.A. **33** (1947), 7-9.