HOMOLOGIE D'ESPACES STRATIFIES

Karim BEKKA et Claudio MUROLO

Résumé. Nous nous intéressons dans cette note à la représentation de l'homologie des espaces stratifiés par des cycles stratifiés. Nous considérons cette question pour des espaces stratifiés abstraits et des espaces stratifiés (c)-réguliers. Nous obtenons que l'homologie est représentable par des cycles stratifiés abstraits. M. Goresky a conjecturé ce résultat pour les stratifications de Whitney [2, 4].

Homology of stratified spaces.

Abstract. *In this note we are interested in the representation of the homology of stratified sets by stratified cycles. We consider abstract stratified sets and* (c)*-regular stratified spaces. We obtain the representability for abstract stratified sets. M. Goresky conjectured this result for Whitney stratified sets [2, 4].*

Abridged English Version. A natural question concerning the geometric topology of stratified sets satisfying a certain regularity condition is whether its homology is representable by stratified cycles satisfying the same regularity condition. M. Goresky **[2, 4]** studied this problem for Whitney stratifications. He proved, using triangulations, that the homology of a smooth manifold is representable by Whiney stratified cycles and conjectured this result for Whitney stratified spaces. A proof of Goresky's conjecture cannot be obtained by triangulation methods, at least for the moment, because a *"Whitney* (b)*-regular triangulation theorem"* for Whitney stratifications is not yet known: it is another unsolved conjecture of Thom.

We reconsider the homology theory introduced by Goresky, for abstract stratified sets and (c)-regular stratified spaces. We prove in this setting that homology is representable by abstract stratified cycles. An obstruction similar to the Whitney case appears in proving this result for a (c)-regular stratified space (not a manifold); we do not yet have a (c)-regular triangulation theorem either for a (c)-regular stratification .

For $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ an abstract stratified set (A.S.S.) **[5]** of support A or a (c)-regular stratified space **[1]**, we define the *abstract stratified homology* sets $AH_k(\mathcal{X})$ and the (c)*-regular homology* sets $BH_k(\mathcal{X})$ whose elements are equivalence classes of stratified k-cycles $\xi = (\mathcal{V}, z)$ of $\mathcal{X}$ with respect to stratified cobordism.

Recall that a *k-substratified object (S.S.O.)* of $\mathcal{X}$ is a compact A.S.S. $\mathcal{V} = (V, \Sigma_V)$ of dimension k with support $V \subseteq A$ each stratum of which is contained in a unique stratum of $\mathcal{X}$.

An *abstract stratified k-cycle* $\xi = (\mathcal{V}, z)$ of $\mathcal{X}$ is a k-substratified object $\mathcal{V}$ of $\mathcal{X}$ together with an *orientation of* $\mathcal{V}$, that is an element $z = \sum_j g_j V_j^k$ of the free abelian group $C_k(V)$ on the oriented k-strata $\{V_j^k\}_j$ of $\mathcal{V}$, and whose boundary is 0. A cobordism between two stratified k-cycles ξ and ξ' is defined as a $(k+1)$-S.S.O. ζ of $\mathcal{X} \times [0,1]$ ($[0,1]$ stratified by $\{\{0\},]0,1[, \{1\}\}$) with boundary $\partial\zeta = \xi \times \{0\} - \xi' \times \{1\}$ (modulo *reduction*). The (c)-regular homology $BH_k(\mathcal{X})$ is similarly defined by considering $\mathcal{X}$ and its cycles and cobordisms to be (c)-regular. The fundamental reason for which such homology sets exist is that each S.S.O. $\mathcal{V}$ admits a system of control data **[5]**. This allows one to define for all $h \leq k$ a canonical isomorphism $\psi_h : C_h(V_h) \equiv H_h(V_h, V_{h-1})$ with the standard homology ($V_h = h$-skeleton of $\mathcal{V}$), and two *homology representation maps*

$$R_a : AH_k(\mathcal{X}) \to H_k(A) \qquad \text{and} \qquad R_b : BH_k(\mathcal{X}) \to H_k(A)\,.$$

analogues of to the Thom-Steenrod map between differential bordism and singular homology.

For the BH_* theory, we show the analogue of the Goresky representability theorem **[4]**:

THEOREM 1. *If $\mathcal{X}$ is a compact smooth manifold then $R_b : BH_k(\mathcal{X}) \to H_k(A)$ is a bijection.*

Goresky proved the bijectivity of $R_w : WH_k(\mathcal{X}) \to H_k(A)$ for $\mathcal{X}$ a manifold and conjectured it $\mathcal{X}$ for a Whitney stratification **[2, 4]**. For the AH_* theory, first we use Goresky's triangulation theorem for A.S.S's **[3]** to show that :

THEOREM 2. *Every A.S.S. $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ equipped with the stratification $\Sigma' = \{f(\sigma^o) \,|\, \sigma \in K\}$ by open simplexes induced by a Goresky triangulation $f : K \to A$ is again an A.S.S.*

Then we use this latter in order to prove the result corresponding to the Goresky conjecture :

THEOREM 3. *If $\mathcal{X}$ is a compact A.S.S. then the map $R_a : AH_k(\mathcal{X}) \to H_k(A)$ is bijective.*

The local structure of the singularities of the cycles is that of A.S.S. of Thom-Mather **[5]**. One obtains thus geometric interpretations for the classical homology operations : the sum is given by the "transverse union" of cycles, the cap product by transverse intersection of a cycle and a cocycle, the Poincaré duality by thinking of a $(n-k)$-cocycle as a k-cycle ($n = \dim\mathcal{X}$), and other similar interpretations hold in the AH^* cohomology for the sum, cup and cross products and the induced morphisms **[9, 10]**. These cover all geometric motivations of the original work of Goresky for the WH theory **[2, 4, 6]**.

In §4 we apply to the AH_* and BH_* theories the transversality methods introduced in **[7]** in order to give to the sets $AH_k(\mathcal{X})$ et $BH_k(\mathcal{X})$ a group operation geometrically represented via *transverse union* of two stratified k-cycles. Thanks to the stratified transversality theorem **[6]**, given two k-cycles ξ_V and ξ_W of an A.S.S. $\mathcal{X}$ one can find a new k-cycle $\xi_{W'}$ cobordant to ξ_W and transverse to ξ_V. We can then give to $V \cup W'$ a natural partition in strata $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}'$ induced by the transverse intersection of the strata of $\mathcal{V}$ and $\mathcal{W}'$. This allows us to define a geometric chain $\xi_V +_t \xi_{W'}$, the *transverse sum* of ξ_V and $\xi_{W'}$, and denoting $EH_* = AH_*$ or BH_* we have:

THEOREM 4. *If $\mathcal{X}$ is the trivial stratification of a smooth manifold, then the sum operation $[\xi_V] +_t [\xi_W] = [\xi_V +_t \xi_{W'}]$ is well defined in the set $EH_k(\mathcal{X})$ and gives it an abelian group structure with which the homological representation map $R_e : EH_k(\mathcal{X}) \to H_k(A)$ is a group isomorphism.*

For $\mathcal{X}$ an arbitrary A.S.S. the above partition in strata $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}'$ of $V \cup W'$ may be not a stratification: the local finiteness and the frontier condition may be not verified (**[6]**, §3). In this case theorem 4 holds again in a weaker sense.

In **[10]** the second author defines the dual theories AH^* and BH^* giving some applications.

1. Introduction. Une question naturelle concernant la topologie géométrique d'un espace stratifié vérifiant une certaine condition de régularité est de savoir si son homologie est représentable par des cycles stratifiés vérifiant la même condition de régularité. M. Goresky **[2, 4]** a étudié ce problème pour les stratifications de Whitney. Il a montré, en utilisant les triangulations, que l'homologie d'une variété lisse est représentable par des cycles de Whitney, et a conjecturé ce résultat pour les stratifications de Whitney. Cette conjecture n'est toujours pas résolue et découlerait de la preuve de l'existence de triangulations de Whitney: une autre conjecture de Thom encore non résolue.

Nous reconsidérons la théorie d'homologie introduite par Goresky, dans le cadre des espaces stratifiés abstraits et des espaces stratifiés (c)-réguliers. On obtient que l'homologie est représentable par des cycles stratifiés abstraits. La difficulté pour montrer ce résultat pour les espaces stratifés (c)-réguliers (non lisses) est similaire au cas Whitney-régulier; on n'a pas encore un théorème de triangulation (c)-régulière pour des espaces stratifiés (c)-réguliers .

Dans le §2, on donne la notion de *chaîne stratifiée abstraite et/ou (c)-régulière* de $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un ensemble stratifié abstrait (E.S.A.) **[5]** et/ou (c)-régulier **[1]** (de support A et de stratification Σ) et on introduit les *k-cycles*, les *ensembles d'homologie $AH_k(\mathcal{X})$ et $BH_k(\mathcal{X})$* et les applications de *représentation homologique* $R_a : AH_k(\mathcal{X}) \to H_k(A)$ et $R_b : BH_k(\mathcal{X}) \to H_k(A)$. Pour l'*homologie (c)-régulière* nous démontrons l'analogue du théorème de Goresky **[4]** *"Si $\mathcal{X}$ est une variété, l'application de représentation $R_b : BH_k(\mathcal{X}) \to H_k(A)$ est une bijection* (Théorème 1).

Dans le §3 on considère l'homologie AH_* d'un ensemble stratifié abstrait $\mathcal{X}$. Goresky a démontré en 1978 que tout E.S.A. est triangulable **[3]**. Nous montrons en premier lieu que $\mathcal{X}$ muni de la stratification en simplexes ouverts induite par une triangulation de Goresky est encore un E.S.A. (Théorème 2), puis nous utilisons cette propriété pour montrer que *"la représentation homologique $R_a : AH_k(\mathcal{X}) \to H_k(A)$ est une bijection"* (Théorème 3). On obtient ainsi que la conjecture de Goresky **[2, 4]**, énoncée pour $WH_k(\mathcal{X})$, est vraie pour $AH_k(\mathcal{X})$.

Dans le §4 nous appliquons aux théories $AH_*(\mathcal{X})$ et $BH_*(\mathcal{X})$ les idées de **[7]** et les résultats de transversalité de **[6]** pour munir les *ensembles* $AH_k(\mathcal{X})$ et $BH_k(\mathcal{X})$ d'une opération de groupe géométriquement représentée par la *réunion transversale* de deux k-cycles et avec laquelle les représentations homologiques $R_a : AH_k(\mathcal{X}) \to H_k(A)$ et $R_b : BH_k(\mathcal{X}) \to H_k(A)$ deviennent des isomorphismes de groupes (Théorème 4). Dans **[10]** le second auteur définit les théories duales AH^* et BH^* en donnant quelques applications.

2. Les ensembles d'homologie stratifiée $AH_*(\mathcal{X})$ et $BH_*(\mathcal{X})$.

2.1. L'homologie stratifiée abstraite $AH_k(\mathcal{X})$. Soit $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un ensemble stratifié abstrait. Un *k-objet sous-stratifié (O.S.S.)* de $\mathcal{X}$ est un E.S.A. compact $\mathcal{V} = (V, \Sigma_V)$ de dimension k, de support $V \subseteq A$ dont chaque strate est contenue dans une unique strate de $\mathcal{X}$ **[4]**. Notons $\Sigma_V = \{V_j^h \mid j \in J_h ,h = 0, \ldots, k \}$ (où $\forall j,\ h = \dim V_j^h$) la partition en strates de $\mathcal{V}$. Dans la suite, dans quelques notations, en sous-entendant la stratification nous écrirons V au lieu de $\mathcal{V}$.

Definition 1. Soit G un groupe abélien. Une *k-orientation (à coefficients dans G)* de $\mathcal{V}$ est un élément $z = \sum_{j \in J_k} g_j V_j^k$ du groupe abélien libre $C_k(V)$ sur G engendré par l'ensemble des k-strates G-orientées $\{V_j^k\}_{j \in J_k}$ de V et dans lequel on identifie les éléments dont les orientations et les multiplicités sont opposées dans G.

Proposition 1. *Pour tout E.S.A. $\mathcal{V} = (V, \Sigma_V)$ de dimension k, il existe des isomorphismes canoniques $\psi_h : C_h(V_h) \to H_h(V_h, V_{h-1})$, $\forall\, h \leq k = \dim V$, où H_k désigne l'homologie singulière.*

Definition 2. Chaque couple $\xi = (V, z)$ avec $z \in C_k(V)$ est dit une *k-chaîne (stratifiée abstraite à coefficients dans G)* de $\mathcal{X}$. A partir de $\xi = (V, z)$ on peut définir une nouvelle k-chaîne de $\mathcal{X}$ *la réduction* $\xi_{/} = (V_{/z}, z)$ *de* ξ obtenue par restriction du support de V à sa "partie essentielle" $V_{/z} = \cup_{g_j \neq 0} \overline{V_j^k} = \overline{\cup_{g_j \neq 0} V_j^k}$ considérée avec la stratification induite par celle de V. Cette notion sera utilisée pour introduire le "bord" et le "cobordisme" de chaînes stratifiées (définitions 3 et 4).

La raison fondamentale pour laquelle une théorie de l'homologie stratifiée peut être développée pour $\mathcal{X}$ est que le bord d'une chaîne $\xi = (V, z)$ peut se définir à l'aide d'un système de données de contrôle de l'E.S.A. V (structure caractéristique par définition des E.S.A. [**5**]). On pourrait introduire une telle notion de manière très géométrique, mais elle ne s'adapterait pas à une théorie complexe comme celle envisagée; c'est pourquoi nous utilisons la définition équivalente suivante:

Definition 3. Soit $\xi = (V, z)$ une k-chaîne de $\mathcal{X}$, alors le *bord de* ξ est défini comme la chaîne $\partial\xi = \big(V_{k-1/\partial z}, \partial z\big)$ obtenue en considérant la réduction du $(k-1)$-squelette V_{k-1} de V par rapport à la $(k-1)$-orientation ∂z et où l'opérateur $\partial_k : C_k(V) \to C_{k-1}(V_{k-1})$ est défini par :

$$\partial = \partial_k \ : \ C_k(V) \overset{\psi_k}{\to} H_k(V_k, V_{k-1}) \overset{\partial_k}{\to} H_{k-1}(V_{k-1}, V_{k-2}) \overset{\psi_{k-1}^{-1}}{\to} C_{k-1}(V_{k-1}) \ .$$

Une k-chaîne ξ est dite un *k-cycle (stratifié abstrait)* si $\partial\xi$ est la $(k-1)$ *chaîne nulle* $0 = (\emptyset, 0)$. Donc $\xi = (V, z)$ est un k-cycle de $\mathcal{X}$ si $\partial\xi = 0$ et ceci arrive si et seulement si $\partial z = 0 \in C_k(V)$.

L'ensemble $AZ_k(\mathcal{X}) = \{\xi \,|\, \xi \text{ est un } k\text{-cycle}\}$ est muni de la relation d'équivalence suivante qui identifie chaque k-cycle à sa réduction :

Definition 4. Deux k-cycles $\xi = (V, z)$ et $\xi' = (V', z')$ de $\mathcal{X}$ sont dits *cobordants* s'il existe une $(k+1)$-chaîne $\zeta = (U, u)$ de $\mathcal{X} \times [0, 1]$ telle que :

a) il existe $\epsilon > 0$ tel que $U \cap (\mathcal{X} \times [0, \epsilon[) = V \times [0, \epsilon[$ et $U \cap (\mathcal{X} \times]1-\epsilon, 1]) = V' \times]1-\epsilon, 1]$;

b) $\partial\zeta = (\xi \times 0 - \xi' \times 1)_{/}$, c.à.d. $\partial\zeta$ coïncide avec la réduction de $(\xi \times 0 - \xi' \times 1)$.

On notera cette relation par $\equiv$.

Le quotient $AH_k(\mathcal{X}) = AZ_k(\mathcal{X})/\!\equiv$ sera appelé $k^{\text{ème}}$ *ensemble d'homologie stratifié de* $\mathcal{X}$.

Remarque 1. *Pour tout $k > \dim\mathcal{X}$, on a $AH_k(\mathcal{X}) = \{[0]\}$.*

2.2. La représentation homologique. Nous allons définir une application de représentation $R_a : AH_k(\mathcal{X}) \to H_k(A)$ complètement analogue à l'application de Thom-Steenrod entre le bordisme différentiel d'un espace et son homologie singulière. La signification géométrique de R_a est alors claire, [**2, 4**], cependant nous avons besoin d'une définition plus formelle (comme dans [**7**]) :

Si $\xi = (V, z)$ est un k-cycle stratifié abstrait, on a $\partial z = 0$ et donc $\partial_k \psi_k(z) = 0$. De l'exactitude du couple (V_k, V_{k-1}) en homologie singulière et de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
H_k(V_{k-1}) \arrow[r] & H_k(V_k) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "I_*"'] & H_k(V_k,V_{k-1}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[rr, bend left, "\partial_k"] & H_{k-1}(V_{k-1}) \arrow[r, "j_*"] & H_{k-1}(V_{k-1},V_{k-2}) \\
 & H_k(A) & C_k(V_k) \arrow[u, "\psi_k"] \arrow[rr, "\partial"] & & C_{k-1}(V_{k-1}) \arrow[u, "\psi_{k-1}"']
\end{tikzcd}$$

on déduit $0 = \partial_k \psi_k(z) = j_* \partial \psi_k(z)$ et $\partial\psi_k(z) = 0$. Alors $\psi_k(z) \in \ker \partial = Im\, i_*$ et donc il provient d'un unique élément $i_*^{-1}(\psi_k(z))$ dont l'image $R_a([\xi]) = I_* i_*^{-1}(\psi_k(z))$ dans $H_k(A)$ est dite la *classe fondamentale* de ξ et l'application ci-dessous est dite la *représentation homologique* de l'E.S.A. $\mathcal{X}$:

$$R_a : AH_k(\mathcal{X}) \to H_k(A) \qquad , \qquad R_a([\xi]) = I_* i_*^{-1}(\psi_k(z))\,.$$

2.3. L'homologie (c)-régulière $BH_k(\mathcal{X})$. Soit $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ un espace stratifié (c)-régulier. $\mathcal{X}$ admet alors un système de données de contrôle [**1**], de même que tout objet sous-stratifié (c)-régulier $\mathcal{V}$ de $\mathcal{X}$ et une théorie BH_* analogue à la théorie AH_* peut être obtenue en prenant pour $\mathcal{X}$, ses cycles $\mathcal{V}$ et ses cobordismes, des stratifications (c)-régulières.

Proposition 2. *Si $\mathcal{X}$ est un espace stratifié (c)-régulier et G un groupe abélien alors:*

1) Pour tout O.S.S. (c)*-régulier* $\mathcal{V} = (V, \Sigma_V)$ *de* $\mathcal{X}$*, toutes les définitions de k-chaîne, de k-ème opérateur de bord* $\partial : C_k(V) \to C_{k-1}(V_{k-1})$*, de k-cycle, de cobordisme* (c)*-régulier, et celles des ensembles* $BZ_k(\mathcal{X}) = \{\xi \mid \xi$ *est un k-cycle* (c)*-régulier de* $\mathcal{X}$ $\}$ *et* $BH_k(\mathcal{X}) = BZ_k(\mathcal{X})/\equiv$ *peuvent encore être données pour* $\mathcal{V}$ *en remplaçant chaque fois "stratifié abstrait" par "*(c)*-régulier".*

2) Avec les mêmes notations qu'au §2.2, il existe une application de représentation homologique

$$R_b : BH_k(\mathcal{X}) \to H_k(A) \qquad , \qquad R_b([\xi]) = I_* i_*^{-1}(\psi_k(z)) \, .$$

Remarque 2. *Pour tout* $k > \dim \mathcal{X}$, $BH_k(\mathcal{X}) = \{[0]\}$.

Pour $\mathcal{X}$ une variété nous obtenons l'analogue du théorème de représentabilité de Goresky [**4**]:

Theoreme 1. *Si* $\mathcal{X}$ *est une variété compacte, alors* $R_b : BH_k(\mathcal{X}) \to H_k(A)$ *est bijective.*

3. La conjecture de Goresky pour des E.S.A. Goresky a démontré en 1978 que tout E.S.A. compact $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ est triangulable [**3**]. Il existe donc un complexe simplicial (K, Σ_K) et un homéomorphisme $f : K \to A$. Nous prouvons d'abord que :

Theoreme 2. *Tout E.S.A.* $\mathcal{X}$ *muni de la stratification en simplexes ouverts* $\Sigma' = \{f(\sigma^o) \mid \sigma \in \Sigma_K\}$ *induite par une triangulation de Goresky* $f : K \to A$ *est encore un E.S.A.*

Ensuite à l'aide du théorème 2, nous démontrons pour $\mathcal{X}$ un E.S.A. et dans la théorie $AH_k(\mathcal{X})$, le résultat correspondant à une conjecture de Goresky (1976 [**2**] et 1981 [**4**]). Goresky, après avoir introduit pour des espaces stratifiés de Whitney $\mathcal{X}$ l'ensemble $WH_k(\mathcal{X})$ et l'application de représentation $R_w : WH_k(\mathcal{X}) \to H_k(A)$ avait montré la bijectivité de R_w pour $\mathcal{X}$ une variété lisse et l'avait conjecturée pour $\mathcal{X}$ un espace stratifié de Whitney arbitraire.

Theoreme 3. *Si* $\mathcal{X}$ *est un E.S.A. compact, alors* $R_a : AH_k(\mathcal{X}) \to H_k(A)$ *est bijective.*

La théorie AH_* coïncide avec l'homologie ordinaire. La structure locale des singularités des cycles est celle des E.S.A. de Thom-Mather [**5**]. On retrouve alors pour les opérations classiques de l'homologie des interprétations géométriques importantes : la somme s'obtient par l' "union transverse" de cycles (§4), le produit cap par l'intersection transverse d'un cycle et d'un cocycle, la dualité de Poincaré en interprétant un $(n-k)$-cocycle comme un k-cycle ($n = \dim \mathcal{X}$) et d'autres interprétations géométriques analogues s'obtiennent en cohomologie AH^* pour les produits cross et cup et les morphismes induits [**9, 10**]. Ces interprétations géométriques recouvrent toutes les motivations originelles de Goresky pour la théorie WH [**2, 4, 6**].

Remarque 3. On ne peut pas obtenir une preuve de la conjecture de Goresky par des méthodes de triangulation car on ne dispose pas d'un théorème de *triangulation de Whitney* : c'est une autre conjecture (de Thom) encore non-résolue. De même si $\mathcal{X}$ est une stratification (c)-régulière arbitraire, nous ne savons pas si R_b est bijective et une telle généralisation du théorème 1 pourrait être obtenue si l'on démontre un théorème de triangulation (c)-régulière pour $\mathcal{X}$.

4. L'opération de "somme transversale". Nous donnons une application significative du théorème de transversalité 3.8 [**6**]. Quand $R_a : AH_k(\mathcal{X}) \to H_k(A)$ et $R_b : BH_k(\mathcal{X}) \to H_k(A)$ sont bijectives, les *ensembles* $AH_k(\mathcal{X})$ et $BH_k(\mathcal{X})$ admettent une opération de groupe héritée de $H_k(A)$ via R^{-1} qui est la seule rendant R_a et R_b des isomorphismes. Nous montrons que cette opération se représente par la réunion de deux cycles transversaux dans $\mathcal{X}$. Dans la suite, par abus de notation, on note les stratifications par le même symbole que leur espaces stratifiés.

Definition 5. Soient $\mathcal{X}$ un E.S.A., $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ deux O.S.S. transversaux dans $\mathcal{X}$ et notons $c.c.(U) =$ *"la famille des composantes connexes de U"*. Les partitions de $V \cap W$ et de $V \cup W$:

$$\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W} = \bigcup_{A \in \mathcal{V}, B \in \mathcal{W}} c.c.(A \cap B) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{V} \cup_t \mathcal{W} = \bigcup_{A \in \mathcal{V}} c.c.(A - W) \bigcup_{B \in \mathcal{W}} c.c.(B - V) \quad \bigcup_{A \in \mathcal{V}, B \in \mathcal{W}} c.c.(A \cap B)$$

sont dites *l'intersection transversale* et *la réunion transversale* de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{X}$.

Le cas où $\mathcal{X}$ se réduit à une variété lisse est réglé par le théorème suivant :

THEOREME (Bekka [**1**]). *Si $\mathcal{X}$ est une variété et $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont deux O.S.S. (resp. (c)-réguliers) transversaux dans $\mathcal{X}$, alors $\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W}$ et $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}$ sont deux O.S.S. (resp. (c)-réguliers) de $\mathcal{X}$.*

REMARQUE 4. Quand $\mathcal{X}$ est un E.S.A. (non une variété) $\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W}$ et $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}$ ne définissent pas en général des stratifications car ils peuvent ne pas vérifier la *locale finitude* et la *condition de frontière* ([**6**], §3).

PROPOSITION 3. *Soient $\mathcal{V}$, $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{X}$ des E.S.A. (resp. (c)-réguliers) transversaux dans $\mathcal{X}$ tels que (a) : "$\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W}$ et $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}$ vérifient la locale finitude et la condition de frontière". Alors :*
1) $\mathcal{V} \cap_t \mathcal{W}$ et $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}$ sont des O.S.S. (resp. (c)-réguliers) de $\mathcal{X}$.
2) Si $\xi_V = (V, z_V)$ et $\xi_W = (W, z_W)$ sont deux k-chaînes il existe une k-chaîne stratifiée

$$\xi_V +_t \xi_W = \big(V \cup W\,,\, \beta_V(z_V) + \beta_W(z_W)\big)$$

définie par des immersions canoniques $\beta_V : C_k(V) \to C_k(V \cup W)$ et $\beta_W : C_k(W) \to C_k(V \cup W)$. De plus $\partial\big(\xi_V +_t \xi_W\big) = \partial\xi_V +_t \partial\xi_W$ et en particulier, la somme de deux cycles est encore un cycle.

DEFINITION 6. Nous appelons $\xi_V +_t \xi_W$ *la somme transversale de ξ_V et ξ_W dans $\mathcal{X}$.*

4.1. Le cas où $\mathcal{X}$ est une variété. Si $\mathcal{X}$ est la stratification triviale d'une variété, d'après un théorème du premier auteur, la condition (a) de la proposition 3 découle de la transversalité de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$. Si ξ_V et ξ_W sont deux k-cycles, selon le théorème de transversalité [**6**], il existe un k-cycle $\xi_{W'} = (W', z_{W'})$ de $\mathcal{X}$ transverse à ξ_V dans $\mathcal{X}$ et (isotope et donc) cobordant à ξ_W.

$EH_k(\mathcal{X})$ notera l'ensemble $BH_k(\mathcal{X})$ ou $AH_k(\mathcal{X})$ et de même R_e notera l'application R_b ou R_a.

THEOREME 4. *Si $\mathcal{X}$ est une variété, l'opération $[\xi_V] +_t [\xi_W] = [\xi_V +_t \xi_{W'}]$ est bien définie dans l'ensemble $EH_k(\mathcal{X})$ et le munit d'une structure de groupe abélien pour laquelle l'application de représentation homologique $R_e : EH_k(\mathcal{X}) \to H_k(A)$ est un isomorphisme de groupes.*

4.2. Cas général. Si $\mathcal{X}$ est un E.S.A. le théorème de transversalité 3.8 [**6**] implique encore que "*$\forall\, [\xi_W], [\xi_V] \in AH_k(\mathcal{X})$, il existe un k-cycle $\xi_{W'}$ tel que $\xi_{W'} \equiv \xi_W$ et transverse à ξ_V* ", mais ceci ne suffit pas pour que $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}'$ soit une stratification ([**6**], §3). L'opération de *"somme transversale"* pourrait *a priori* ne pas exister sur tout $AH_k(\mathcal{X})$. Cependant sur les couples de $AH_k(\mathcal{X})$ où elle est définie, elle coïncide avec l'opération héritée de $H_k(A)$ via la bijection R_a.

PROPOSITION 4. *Si $\mathcal{X}$ est un E.S.A. et $\xi_V = (V, z_V)$ et $\xi_W = (W, z_W)$ sont deux k-cycles de $\mathcal{X}$ tels que $\mathcal{V} \cup_t \mathcal{W}$ soit une stratification alors : $[\xi_V] +_t [\xi_W] = R_a^{-1}(R_a([\xi_V] + [\xi_W]))$.*

DEFINITION 7. La R_a-somme de $AH_k(\mathcal{X})$ étant l'unique prolongement naturel de la somme transversale sur tout $AH_k(\mathcal{X})$ on peut confondre les deux opérations et appeler le groupe $AH_k(\mathcal{X})$ *le $k^{\text{ème}}$-groupe d'homologie stratifiée abstraite de $\mathcal{X}$* et de même $BH_k(\mathcal{X})$ (quand $\mathcal{X}$ est une variété) *le $k^{\text{ème}}$-groupe d'homologie (c)-régulière de $\mathcal{X}$*

L'opération de somme transversale redonne les opérations classiques des groupes d'homologie. Elle respecte aussi bien les stratifications que la somme dans $C_k(V)$. Quand deux cycles ξ_V et ξ_W ont les strates soit égales soit disjointes, $V \cup W$ admet la stratification naturelle $\mathcal{V} \cup \mathcal{W} = \{V_j^k\}_{g_j \neq 0} \cup \{W_s^k\}_{f_s \neq 0}$ et il suffit de sommer les k-orientations z_V et z_W dans $C_k(V \cup W)$.

COROLLAIRE 1. *Si $\mathcal{X}$ est un E.S.A., le groupe $AH_k(\mathcal{X})$ muni de la somme transversale vérifie:*
1) Si $V \cup W$ se stratifie par la réunion des strates de V et de W, alors :

$$[(V, z_V)] + [(W, z_W)] = [(V \cup W, z_V + z_W)].$$

2) L'élément opposé d'un élément $[(V, z_V)] \in AH_k(\mathcal{X})$ est donné par : $-[(V, z_V)] = [(V, -z_V)]$.

3) Le zéro de $AH_k(\mathcal{X})$ se représente par le cycle nul : $0 = [(\emptyset, 0)]$.

COROLLAIRE 2. *Le corollaire 1 reste valable pour le groupe $BH_k(\mathcal{X})$ quand $\mathcal{X}$ est une variété.*

Dans l'homologie simpliciale ou cellulaire, la somme de deux cycles s'obtient par la réunion ensembliste des simplexes des deux cycles en la munissant de la somme algébrique de leurs coefficients. Selon les corollaires 1 et 2 la somme transversale dans $AH_k(\mathcal{X})$ et $BH_k(\mathcal{X})$ est compatible avec les opérations de ces théories géométriques usuelles de l'homologie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Bekka, *(c)-régularité et trivialité topologique*, Singularity theory and its applications, Warwick 1989, Part I, Lecture Notes in Math. 1462 (Springer, Berlin 1991), 42-62.

[2] M. Goresky, *Geometric Cohomology and Homology of Stratified objects*, Ph. D. Thesis, Brown University, 1976.

[3] M. Goresky, *Triangulation of stratified objects*, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), 193-200.

[4] M. Goresky, *Whitney stratified chains and cochains*, Trans. Amer. Math. Soc., **267**(1981), 175-196.

[5] J. Mather, *Notes on topological stability*, Mimeographed notes, Harvard University, (1970).

[6] C. Murolo, A. du Plessis and D. Trotman, *Stratified transversality by isotopy*, preprint de l'Université de Provence, Marseille, 1999.

[7] C. Murolo, *Whitney homology, cohomology and Steenrod Squares*, Ricerche di Matematica, Univ. Naples, Vol XLIII, (1994), 175-204.

[8] C. Murolo, *The Steenrod p-powers in Whitney cohomology*, Topology and Its Applications, Vol 68, (1996), 133-151.

[9] C. Murolo, *Semidifférentiabilité, transversalité et homologie de stratifications régulières*, Thèse, Université de Provence, Octobre 1997, 176 pages.

[10] C. Murolo, *Cohomologie des espaces stratifiés*, preprint.

Karim Bekka: Institut Mathématique de Rennes Université de Rennes 1 Campus de Beaulieu 35042 Rennes, France.

Email : bekka@univ-rennes1.fr

Claudio Murolo: Università di Napoli - Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Via Claudio 21, 80125 Naples, Italie

emails : murolo@cds.unina.it murolo@gyptis.univ-mrs.fr