C.M.I. – Université de Provence – Marseille

THESE de DOCTORAT

Semidifférentiabilité, Transversalité, et Homologie de Stratifications Régulières

présentée par

CLAUDIO MUROLO

en vue de l'obtention du

Doctorat de Mathématiques de l'Université de Provence

soutenue le 8 octobre 1997 devant le ***Jury :***

LE DUNG TRANG : Président du Jury, Examinateur
Directeur de Recherche au C.N.R.S., *C.M.I. Université de Provence, Marseille*

ANDREW DU PLESSIS : Rapporteur, Examinateur
Professeur *Aarhus University, Danemark*

CLINT MCCRORY : Rapporteur
Professeur, *Georgia University, Athens, Georgia, U.S.A.*

KARIM BEKKA : Examinateur
Maître de Conférence, *Université de Rennes*

JEAN-PAUL BRASSELET : Examinateur
Directeur de Recherche au C.N.R.S., *Institut de Mathmatiques de Luminy*

DENIS CHENIOT : Examinateur
Maître de Conférence, *C.M.I Université de Provence, Marseille*

ROBERT D. MAC PHERSON : Examinateur
Professeur, *M.I.T. et Institute for Advanced Study, Princeton, U.S.A.*

DAVID TROTMAN : Directeur de Thèse , Examinateur
Professeur, *C.M.I. Université de Provence, Marseille*

A mia Madre

L' Infinito

M' inebria l' ondosa sorgente
irradiata da un sasso cadente
lanciato in mezzo al laghetto,

per quell' eterno inseguirsi
di cerchi concentrici,
uguali e perfetti ;
fra poco invisibili :
laggiù sempre più estesi
e al centro minuscoli . . .

Ed in un brivido
rivedo i pianeti come atomi
d'un Universo più immenso ;
poi gli atomi come pianeti,
di mondi paurosamente minuti.
In un ciclo senza fine,
nel vasto e nel piccino !

. . . . .

E allora mi scopro sul viso
deciso, e compiaciuto un sorriso . . .

sicuro e beffardo,
dedicato all' uomo superbo,
o all' uomo razzista,
e a quello potente,
oppure corrotto : . . .

. . . che in fondo s' illude di brutto !

. . . che preda del mito di *farsi* importante,
non vede in quel sasso cadente
quanto ci somigliamo tutti comunque ;

plasmati da un grave Destino
con la stessa identità :

. . . effimeri microbi nell' immensità.

23/10/1988

REMERCIEMENTS

C'est une habitude saine que de remercier au début d'un tel travail tous ceux qui, plus ou moins directement, ont contribué à le rendre possible. Même si dans mon cas, cette liste peut sembler plus longue que de coutûme, c'est avec mon enthousiasme le plus vif et le plus sincère que je voudrais rendre mérite à tous ceux qui (plus ou moins récemment) à leur manière m'ont aidé à mener à bien cette thèse. Je désire alors exprimer ma profonde gratitude:

au Professeur et ami David Trotman pour avoir accepté de me diriger patiemment, pour son soutien constant pendant la rédaction de cette thèse, mais aussi spécialement car, en m'acceptant à l'*Université de Provence* il m'a permis de sortir d'une "léthargie" mathématique, grâce à sa disponibilité et sa générosité exceptionnelles.

au Professeur Lê Dũng Tràng qui m'a honoré en acceptant d'être Président de ce jury mais également pour tous ses conseils toujours pertinents et attentifs et pour son cours de *D.E.A.* de 1994 précieux pour améliorer ma formation Doctorale.

aux Professeurs Andrew du Plessis et Clint McCrory pour avoir accepté la charge d'être Rapporteurs de ma thèse. Merci à Andrew pour avoir suivi l'évolution de ma thèse et pour ses remarques mathématiques essentielles et à Clint pour les conseils amicaux donnés à la suite de notre rencontre à l'*I.C.M. Zürich 1994*.

aux Professeurs Karim Bekka, Jean-Paul Brasselet, Denis Cheniot, Robert MacPherson qui m'ont honoré en acceptant d'être Examinateurs dans ce jury et d'être présents ici aujourd'hui. Chacun d'eux mérite un remerciement plus particulier :

Karim pour toutes ses remarques mathématiques, les suggestions, les conseils amicaux et les invitations à l'Université de Rennes. Cela m'a beaucoup encouragé; en un mot, merci pour son amitié précieuse.

le Professeur Jean-Paul Brasselet pour son cours de *D.E.A.* de 1992, pour ses nombreux séminaires précieux pour ma formation Doctorale et pour ses conseils importants et judicieux.

à Denis pour sa disponibilité, ses encouragements généreux et la confiance en moi qu'il m'a souvent transmise grâce à son caractère chaleureux : ils m'ont été très précieux.

le Professeur Robert MacPherson, pour le *grand honneur* qu'il me fait en étant présent dans ce jury. Il a été l'inspirateur (en dirigeant la Thèse de Mark Goresky pendant les années 1972-76) des idées d'une théorie de l'*homologie stratifiée* qui ont motivé toutes mes recherches de Thèse ainsi que les précédentes et je rêve qu'elles puissent en devenir une digne continuation. *Rare* est l'émotion qu'il m'offre aujourd'hui.

Je tiens à remercier également tous les mathématiciens auxquels j'ai posé des questions, et particulièrement : Augustin Banyaga, Karim Bekka, Jean-Paul Brasselet, James Damon, Albrecht Dold, Paul Donato, Andrew du Plessis, David B.A. Epstein, Edmond Fedida, Massimo Ferrarotti, Etienne Ghys, Tzee Char Kuo, Clint McCrory, Pierre Molino, Adam Parusinski, Masashiro Shiota, Mihay Tibar.

Je remercie aussi très vivement, Michel Domergue, Jimmy Elhadad, Yves Mathieu, Michel Richardot, Hamish Short, ainsi que tous les autres membres du *C.M.I.* qui m' ont accueilli de manière très chaleureuse au *Département de Mathématiques* de l'*Université de Provence*.

Merci à mes amis et camarades du Doctorat, Assef, Ben, Christian, Christophe, Daniel, Georges, Issam, Jianyi, Laurent, Michal, Nabil, Stéphane, Victoria pour l'affectueuse amitié dont ils ont toujours fait preuve. Un merci tout particulier à Georges Comte et à Stéphane Simon, pour nos discussions mathématiques (et personnelles) passionnées et une pensée très affectueuse pour Victoria qui a fait de moi une personne heureuse. Son soutien et son aide m'ont été indispensables.

Je remercie également Aline, Annie, Claude, Giselle, Jo, Noelle, Marie-Antoinette qui m'ont toujours amicalement assisté surtout au début quand je faisais mes premiers pas à l'*Université de Provence*. Je remercie Mlle Evelyne Henry pour le travail d'impression de cette thèse.

Je veux remercier aussi vivement Monsieur Charles Pinero et Mme Pinero, pour m'avoir accueilli dans les Cités Universitaires *G. Berger* et *Madagascar* alors qu'ils en étaient les Directeurs.

Remerciements Italiens. La réalisation de cette thèse a demandé une longue période d'éloignement envers mes engagements pédagogiques à l'*Università di Napoli*; c'est donc avec la plus profonde gratitude que je veux remercier toutes les personnes et institutions qui y ont plus ou moins directement contribué.

Tous mes collègues de la *Facoltà di Ingegneria* qui m'ont soutenus, convaincus de mes possibilités, m'ont permis d'obtenir trois ans de congé afin de mener à bien ce Doctorat. Je dois et j'adresse un remerciement tout particulier, avec toute mon affection et ma reconnaissance, aux Professeurs Teresa Bruno et Giustina Pica.

Je tiens également à remercier :

– le *Consiglio Nazionale delle Ricerche (ROME)* dont la bourse de recherche m'a fourni les financements nécessaires pour me soutenir à Marseille pendant les Années Académiques 1994 et 1995.

– les membres de l'*Ufficio Ricercatore dell'Università di Napoli* pour leur assistance sans faille me permettant ainsi de dépasser les difficultés bureaucratiques et administratives rencontrées pour l'obtention de longues périodes de congé.

En ce qui concerne mes recherches précédentes et ma formation scientifique, je désire exprimer ma reconnaissance à Sandro Buoncristiano, pour avoir dirigé mes premiers pas dans l'*Univers de la Topologie* il y a douze ans quand il m'a introduit aux problèmes dont les développements successifs auront constitué le contenu de cette thèse.

Je réserve un remerciement chaleureux au Professeur-ami Renzo Piccinini qui en plus des mathématiques qu'il m'a enseignées à travers ses *cours d'été* (Perugia, Aout 1987 et Cortona, Juillet 1991), m'a beaucoup encouragé dans des moments très difficiles de mon parcours de jeune mathématicien.

Je remercie aussi les professeurs Giuseppe Di Maio, Maria Dedò, James Kister, Luciano Lomonaco, Guglielmo Lunardon, Antonio Pasini, Carlo Pucci pour leur influence positive sur mon chemin de jeune mathematicien ainsi que toutes les autres personnes qui m'ont apporté leur aide et que je ne peux citer ici.

Je dois un *grand merci* à mes chers amis et collègues Enzo Di Gennaro, Giuliano Gargiulo et Marco Mamone, dont les études poursuivies en commun à l'*Università di Napoli* ont beaucoup influencé ma formation mathématique et m'ont apporté la confiance dont j'avais besoin pour continuer à parcourir cette aventure de rêve . . .

Je ne pourrais jamais oublier le soutien et l'aide des personnes chères de ma nombreuse et *merveilleuse* famille. Je réserve une reconnaissance particulière à Zia Letizia avec la grande douleur de ne plus l'avoir parmi nous, pour le soin incomparable dont elle a fait preuve malgré son mal.

Un "Grazie infinito" à tous, pour la patience avec laquelle vous vous êtes chargés de tous mes interminables "devoirs italiens" pendant la période de préparation de cette thèse.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.

1. Les motivations qui nous ont conduit à ce travail. **i**
2. Le contenu et les résultats de la thèse. **vi**

CHAPITRE I :

LA DISTRIBUTION CANONIQUE ET LES RELEVEMENTS CONTINUS CONTROLES DE CHAMPS DE VECTEURS.

§1. Introduction. **1**
§2. La distribution canonique locale et le théorème de relèvement continu. Caractérisation de la (a)-régularité en termes de distribution continue. **2**
§3. Le théorème de relèvement continu. **5**
§4. Relèvement sur des stratifications (au moins) (c)-régulières. **9**
§5. La distribution canonique globale. **12**
5.1 : Le cas (c)-régulier **12**
5.2 : Le cas (w)-régulier et lipschitzien **14**
BIBLIOGRAPHIE. **17**

CHAPITRE II :

SEMIDIFFERENTIABILITE DES MORPHISMES STRATIFIES ET LA "WHITNEY FIBERING CONJECTURE".

§1. Introduction. **20**
§2. Quelques conditions de régularité pour les morphismes stratifiés. **23**
2.1 : Morphismes semidifférentiables **25**
2.2 : Morphismes stratifiés horizontalement-C^1 **29**
2.3 : Morphismes faiblement semidifférentiables **33**
2.4 : Morphismes stratifiés $\mathcal{F}$-semidifférentiables **36**
2.5 : Morphismes fortement semidifférentiables **38**

§3. **Le cas du flot d'un champ relevé.** 43
§4. **Le cas où la distribution canonique est involutive.** 48
4.1 : $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}$ est horizontalement-C^1 49
4.2 : $\mathcal{H}$-semidifférentiabilité de $\phi = \{\phi_Y : Y \to Y\}$ 54
§5. **Quelques propriétés significatives des champs $\{H_{*(t_1,\ldots,t_l,y_0)}(E_i)\}_i$ tangents au feuilletage horizontal $\mathcal{H}$.** 58
5.1 : Sur l'involutivité de la distribution canonique $\mathcal{D}_X$ 62
5.2 : Sur la (a)-régularité sur X du feuilletage $\mathcal{H}$ 63
5.3 : Sur une certaine rigidité du feuilletage $\mathcal{H}$ 66
§6. **Quelques caractérisations de l'involutivité de $\mathcal{D}_X$.** 68
§7. **Le cas général quand $\mathcal{D}_X$ n'est pas nécessairement involutive.** 70
7.1 : Régularité horizontalement-C^1 71
7.2 : $\mathcal{H}$-semidifférentiabilité 79
§8. **Feuilletages stratifiés et "rétractions adaptées".** 81
8.1 : Rétractions "extrèmement adaptées" et feuilletages stratifiés (a)-réguliers 83
§9. **La conjecture de fibration de Whitney.** 86
§10. **Systèmes de données de contrôle feuilletés totalement compatibles.** 89
BIBLIOGRAPHIE. 92

CHAPITRE III :

UN THEOREME DE TRANSVERSALITE-ISOTOPIE POUR DES STRATIFICATIONS REGULIERES.

§1. **Introduction.** 95
§2. **Image de l'application exponentielle et extension d'homéomorphismes stratifiés.** 98
2.1 : L'image de l'application exponentielle de l'intérieur S d'une variété compacte à bord engendre $Diff_0^r(S,S)$ 98
2.2 : Un théorème d'extension forte d'homéomorphismes stratifiés 101
§3. **Le Théorème de Transversalité.** 110
3.1 : Le théorème de transversalité. Cas des ensembles stratifiés abstraits 112
3.2 : Le théorème de transversalité. Cas (w)-régulier et lipschitzien 115
3.3 : Le théorème de transversalité. Transversalité d'applications stratifiées 116
§4. **Sur la préservation de la régularité pour les sous-objets déformés.** 121
4.1 : Le cas des stratifications (c)-régulières 121
4.2 : Le cas rugueux et lipschitzien 124
BIBLIOGRAPHIE. 126

CHAPITRE IV :

Homologie des Espaces Stratifies Structuree par la “Somme Transversale”.

§1. Introduction. **129**

1.1 : Les théorèmes de Goresky **130**

1.2 : Autres contributions **130**

1.3 : Arguments essentiels **131**

1.4 : Contenu du chapitre **131**

§2. Le cobordisme stratifié et la “Représentation de Goresky” pour des Ensembles Stratifiés Abstraits. **133**

2.1 : Chaînes stratifiées abstraites **133**

2.2 : Le bord **134**

2.3 : L'application de représentation homologique $R_a : AH_k(X) \to H_k(X)$ **136**

2.4 : L'homologie (c)-régulière $BH_k(X)$ **136**

§3. Bijectivité de l'application de représentation homologique pour des Ensembles Stratifiés Abstraits. **138**

§4. L'opération de “somme transversale” dans $AH_k(\mathcal{X})$ et $BH_k(\mathcal{X})$. **142**

4.1 : Le cas où $\mathcal{X} = \{M\}$ est une variété **145**

4.2 : Le cas où $\mathcal{X}$ est un ensemble stratifié abstrait arbitraire **146**

§5. Homomorphismes induits en homologie stratifiée. Fonctorialité. **149**

5.1 : Le cas de l'homologie AH_k **149**

5.2 : Le cas de l'homologie BH_k **155**

5.3 : Inverse de l'isomorphisme de raffinement **157**

§6. La cohomologie stratifiée $AH^k(\mathcal{X})$ et $BH^k(\mathcal{X})$. **159**

6.1 : Condition de π-fibre. Costrates. Coorientations. **160**

6.2 : Cochaînes et cocycles stratifiés abstraits. L'ensemble $AH^k(\mathcal{X})$. **162**

6.3 : L'application de représentation cohomologique $R^a : AH^k(\mathcal{X}) \to H^k(\mathcal{X})$ **163**

6.4 : La cohomologie (c)-régulière $BH^k(\mathcal{X})$ **163**

6.5 : Transversalité de cocycles stratifiés abstraits et morphismes contrôlés **164**

6.6 : Produits en cohomologie stratifiée **167**

6.7 : Bijectivité des applications de représentation cohomologique **169**

6.8 : La somme transversale et les homomorphismes induits **170**

6.9 : Fonctorialité de AH^k et BH^k **171**

6.10 : Dualité de Poincaré en cohomologie stratifiée **172**

6.11 : Résumé des contenus géométriques de la cohomologie stratifiée **174**

BIBLIOGRAPHIE. **176**

HISTORIQUE & MOTIVATIONS

L'histoire donnant lieu à la rédaction de cette thèse est presque aussi longue que toute mon activité de recherche.

En 1985, en conclusion de mes études universitaires et dirigé par Sandro Buoncristiano, j'écrivais un mémoire intitulé *"Omologia e oggetti di Whitney"* dans lequel je reconsidérais les travaux de thèse de Mark Goresky : la première partie était dédiée à l'étude du théorème de triangulation d'un ensemble stratifié de Thom-Mather *"Triangulation of abstract stratified sets"* (Proc. AMS, 1978) et la deuxième partie concernait l'homologie d'une stratification de Whitney. Cette partie se basait sur l'article de Goresky *"Whitney stratified chains and cochains* (TAMS, 1981) contenant la plupart des résultats de sa thèse de Ph.D. *"Geometric cohomology and homology of stratified objects* (Brown University 1976).

Goresky avait démontré que *"si $\mathcal{X}$ est une stratification de Whitney, alors il existe une bijection $R^w : WH^k(\mathcal{X}) \to H^k(\mathcal{X})$ "* où $WH^k(\mathcal{X})$ est un ensemble obtenu à partir de cochaînes stratifiées de Whitney (i.e. (b)-régulières) contenues dans $\mathcal{X}$ en passant au quotient par rapport à une relation de *cobordisme (b)-régulier*. Il avait aussi démontré dans une théorie homologique $WH_k(\mathcal{X})$ parallèle que le même théorème restait valable mais seulement dans le cas où $\mathcal{X}$ était une variété lisse. Il avait alors formulé la *conjecture* suivante : *"it is almost certainly true that ..." l'application R est une bijection pour $\mathcal{X}$ une stratification de Whitney arbitraire* (thèse, p. 52) ou encore que : *". . . the Theorem 3.4. may even be true if $\mathcal{X}$ is any Whitney object"* (1981, p. 178).

La deuxième partie de mon mémoire concernait l'utilisation d'un théorème de transversalité stratifiée, le *Transversality Lemma* (Goresky 1981), valable seulement pour les cocycles, lequel me permettait d'introduire sur l'ensemble $WH^k(\mathcal{X})$ une opération de groupe correspondant géométriquement à la réunion transverse de deux cochaînes et par laquelle l'application de représentation cohomologique $R^w : WH^k(\mathcal{X}) \to H^k(\mathcal{X})$ devenait un isomorphisme. Le même résultat restait valable pour l'homologie $WH_k(\mathcal{X})$ quand $\mathcal{X}$ était la stratification triviale d'une variété.

Ces recherches et les tentatives de démonstration de la *conjecture de Goresky* ont influencé par la suite toute mon activité en me permettant de publier deux articles (1994 et 1996) sur ce que j'appelle les groupes d'homologie $WH_k(\mathcal{X})$ (quand $\mathcal{X}$ est une variété) et de cohomologie $WH^k(\mathcal{X})$ de Whitney (pour $WH^k(\mathcal{X})$ j'étudie aussi la réalisation géométrique des opérations cohomologiques "les carrés" et "les p-puissances de Steenrod").

Mes recherches m'avaient persuadé que la validité d'un théorème de transversalité stratifiée correspondant au *Transversality Lemma* de Goresky mais valable cette fois pour des cycles (b)-réguliers, m'aurait permis d'introduire d'abord une opération de groupe dans $WH_k(\mathcal{X})$ pour $\mathcal{X}$ une stratification de Whitney arbitraire, puis, grâce à cette structure algébrique d'obtenir une preuve de la conjecture de Goresky. D'autre part, je considérais autant intéressante l'utilité indépendante d'un théorème de mise en position generale dans un contexte stratifié par lequel j'étais réellement très fasciné.

Mon objectif principal devenait donc la démonstration d'un théorème de mise en position générale de deux stratifications $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ de Whitney contenues dans une stratification de Whitney ambiante $\mathcal{X}$ (ou bien plus généralement de deux applications stratifiées à valeurs dans $\mathcal{X}$).

La difficulté fondamentale qui se présentait était la suivante :

(1) : *"Quelle condition de régularité faut-il demander à un homéomorphisme stratifié (difféomorphisme sur les strates) transversalisant* $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, *pour que la sous-stratification déformée* $\mathcal{W}' = \Phi(\mathcal{W})$ *de* $\mathcal{W}$ *dans* $\mathcal{X}$ *soit encore une stratification* (b)*-régulière ?"*

Mes recherches étaient lentement arrêtées sur cette difficulté quand à la fin de 1991, (conseillé par Sandro) j'écrivais à David Trotman en lui demandant d'accepter de me diriger pour effectuer une thèse dont le programme de recherche originel visait à établir un théorème de transversalité (b)-régulière et à répondre à la conjecture de Goresky sur l'homologie de Whitney WH_k.

Je précise tout de suite qu'aucun de ces deux projets initiaux n'est à présent réalisé dans cette thèse. Cependant, il ne me semble pas exagéré d'affirmer que nous avons saisi *toutes* les difficultés qui les concernaient et que tous les théorèmes contenus dans la thèse dérivent de ce projet initial.

Rappelons alors le théorème de transversalité (b)-régulière de Goresky :

Transversality lemma. (Goresky 1981). *Soient* $\mathcal{X}_1$ *et* $\mathcal{X}_2$ *deux stratifications* (b)*-régulières contenues respectivement dans les variétés* M_1 *et* M_2*. Fixons deux systèmes de données de contrôle* $\mathcal{T}_1$ *et* $\mathcal{T}_2$ *respectivement de* $\mathcal{X}_1$ *et* $\mathcal{X}_2$ *et soit* $f : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ *une application stratifiée. Supposons que l'une des deux hypothèses suivantes (au moins) soit vérifiée :*

(a) : f *est contrôlée par rapport à* $\mathcal{T}_1$ *et* $\mathcal{T}_2$*;*

(b) : f *est la restriction d'une application lisse* $\tilde{f} : M_1 \to M_2$.

Alors pour tout objet sous-stratifié, vérifiant la condition de π*-fibre et* (b)*-régulier* $\mathcal{W}$ *de* $\mathcal{X}_2$*, il existe une déformation par isotopie* $\mathcal{W}'$ *de* $\mathcal{W}$*, vérifiant la condition de* π*-fibre et* (b)*-régulière, telle que* $\mathcal{W}'$ *est transverse à* f*.*

La condition qui limite aux cocycles la validité de ce théorème est la *condition de* π*-fibre* qui par définition est valable pour des cocycles mais pas pour des cycles.

Le théorème de Goresky est démontré en construisant $\mathcal{W}'$, en déformant $\mathcal{W}$ par récurrence croissante sur le k-squelette $\mathcal{X}_k$ de $\mathcal{X}$ de sorte qu'à chaque étape de récurrence la transversalité de $\mathcal{W}'$ à f soit vérifiée sur le k-squelette $\mathcal{X}_k$.

Le déformé $\mathcal{W}'$ transverse à f était défini par $\mathcal{W}' := \Phi_1(\mathcal{W})$ où la déformation "transversalisante" $g : \mathcal{X}_2 \to \mathcal{X}_2$, s'obtient à chaque étape de récurrence comme la "section au temps $t = 1$" $g = \Phi_1$ d'un flot stratifié contrôlé $\Phi : \mathcal{X} \times \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ (nous disons alors que g *habite* dans Φ) d'un champ de vecteurs ζ prolongé du k-squelette $\mathcal{X}_k$, sur $\mathcal{X}$ tout entier.

Cette méthode était bien convenable pour Goresky, car elle lui permettait de prolonger le difféomorphisme de déformation transversalisante g, défini sur $S = \mathcal{X}_k - \mathcal{X}_{k-1}$, à la stratification $\mathcal{X}$ (et ainsi de suite jusqu'à déterminer par récurrence $\mathcal{W}'$ comme la n-ème déformation de $\mathcal{W}$, $n = \dim \mathcal{X}$). En fait, pour prolonger le difféomorphisme sur $\mathcal{X} - \mathcal{X}_k$ il devenait suffisant de relever (prolonger) le champ de vecteurs associé(1).

---

(1) En réalité, dans son raisonnement, il y a des imprécisions que nous corrigerons et sur lesquelles nous reviendrons ensuite.

Les méthodes de *relèvement contrôlé* introduites par Mather (1970) lui permettaient de cette manière de disposer d'un *théorème d'extension* sur un voisinage tubulaire de toute k-strate X de A[2] d'homéomorphismes stratifiés de certains difféomorphismes donnés sur un squelette $\mathcal{X}_k$ de $\mathcal{X}$; puis la condition de π-fibre sur $\mathcal{W}$ assurait la préservation de la condition (b) de Whitney pour $\mathcal{W}'$ après chaque déformation.

Les cycles de Whitney, qui représentent les classes d'équivalence dans $WH_k(\mathcal{X})$, ne sont pas définis comme vérifiant la condition de π-fibre et au contraire sont des stratifications (b)-régulières complètement générales. Si on considère alors un cycle de $\mathcal{X}$ ayant une stratification (b)-régulière $\mathcal{W}$, la difficulté (1) devient :

– *"Que faut-il demander au champ de vecteurs ζ pour que son flot Φ_1 préserve la (b)-régularité des objets sous-stratifiés $\mathcal{W}$ de $\mathcal{X}$?".*

La (b)-régularité se préserve par difféomorphisme C^1, cependant le relèvement contrôlé des champs de vecteurs est bien loin de donner des flots Φ_1 de classe C^1 (Whitney, 1965).

En revanche, dans les années comprises entre 1984 et 1988, les techniques de relèvement contrôlés des champs de vecteurs introduites par Mather avaient bien progressé grâce à K. Bekka, A. du Plessis et M. Shiota, qui avaient montré que les relèvements pouvaient être obtenus contrôlés et <u>continus</u>. En particulier, Karim Bekka, pendant qu'il était en thèse sous la direction de D. Trotman, avait introduit une nouvelle condition de régularité caractérisée précisément par la propriété que les champs de vecteurs pouvaient être relevés de manière <u>continue</u> et contrôlée. C'était la *(c)-régularité* de Bekka, condition plus faible que la condition (b) de Whitney, plus forte que la condition (a) et qui impliquait de même que pour les stratifications (b)-régulières le théorème d'isotopie de Thom.

– *Quelles améliorations peut-on attendre au niveau de la régularité du flot stratifié relevé si son champ de vecteurs est de plus relevé de manière continue ?*

C'est sur l'élan de cette question que D. Trotman à mon arrivée à Marseille en 1992 m'a poussé à l'étude des relèvements continus de champs de vecteurs qui aurait occupée ma première année de thèse. En fin d'année, j'avais trouvé qu'une condition de régularité à mi-chemin plus forte que la continuité et plus faible que la régularité C^1 et que j'appelle (au chapitre II) la *semidifférentiabilité* était suffisante pour qu'un homéomorphisme stratifié $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ préserve la (a) et la (c)-régularité des sous-stratifications $\mathcal{W}$ de $\mathcal{X}$ par image dans $\mathcal{Y}$.

En perfectionnant les méthodes de Bekka, du Plessis et Shiota, j'avais alors introduit un sous-fibré du fibré tangent à chaque strate X, *la distribution canonique* $\mathcal{D}_X$, sur laquelle tout relevement était automatiquement continu sur X.

Mes recherches m'avaient aussi convaincu que la continuité du relèvement suffisait pour obtenir la semidifférentiabilité des flots relevés[3]. Ceci équivalait à l'existence d'un "bon" *feuilletage (a)-régulier* (i.e. $C^{0,1}$) d'un voisinage tubulaire local d'une strate dans $\mathcal{X}$ avec lequel, à l'aide de la méthode de triangulation de Goresky, nous envisageons la possibilité d'obtenir une preuve de la *conjecture de la triangulation de Whitney*; cette dernière aurait directement impliqué, pour d'autres raisons, la preuve de la conjecture de Goresky pour l'homologie WH_k.

Toutes les études de thèse de l'année 1993-94 ont alors été dédiées à la conjecture de la triangulation de Whitney. Cependant les résultats partiels obtenus ne seront pas dans cette thèse et nous (David et moi) souhaiterions les compléter dans le futur.

(2) Rien n'est justifié à propos de l'extension à la stratification $\mathcal{X}$ toute entière.

(3) Ce n'était pas le cas. Si cela était vrai, probablement aujourd'hui un théorème de transversalité préservant la (b)-régularité aurait déjà été obtenu.

Pendant ce temps, les précisions attentives de Trotman et celles de Bekka et de du Plessis (toujours au courant de mes recherches), m'auraient montré que des arguments bien plus subtils et difficiles à contrôler intervenaient pour obtenir la semidifférentiabilité des flots des champs relevés continus contrôlés; il aurait fallu une hypothèse supplementaire: *"l'involutivité de la distribution canonique"*.

D'autre part, l'involutivité de la distribution canonique $\mathcal{D}_X$ étant équivalente à l'existence du "bon" feuilletage (a)-régulier, rappelait une propriété conjecturée par H. Whitney en 1965 en termes de *fibering conjecture* pour des stratifications analytiques de variétés analytiques et pouvait se réinterpréter comme une version lisse de la conjecture de fibration de Whitney.

Pendant toute ma troisième année de thèse à l'aide de du Plessis et de Trotman j'orientais alors mes recherches vers la démonstration (de l'involutivité d'une distribution canonique et/ou) de l'existence du bon feuilletage (a)-régulier, lequel, également à cause des différentes fois où il nous *a semblé être aboutir*, allait devenir la *conjecture de Trotman* (1994).

En même temps je reprenais le travail en étudiant les implications de la semidifférentiabilité des flots relevés. Comme les théorèmes d'isotopie de Thom peuvent être obtenus par composition de flots de champs de vecteurs relevés, il me paraissait plus ou moins clair que la semidifférentiabilité de tels flots aurait impliqué de plus l'amélioration de la régularité des homéomorphismes de trivialisations topologiques en permettant d'obtenir une version semidifférentiable du *premier théorème d'isotopie de Thom*. Cela m'aurait porté alors à la rédaction du chapitre II.

Dans les deux dernières années de thèse, j'ai eu beaucoup moins de temps pour chercher (à cause de mes devoirs pédagogiques en Italie). Cependant, il y avait encore un point *obscur* dans la démonstration du "Transversality lemma" de Goresky qui m'intriguait et m'inquiétait en même temps.

(2) : *Comment obtient-on qu'un difféomorphisme (transversalisant) $g : S \to S$ proche de l'identité dans $Diff(S,S)$ avec $S = \mathcal{X}_k - \mathcal{X}_{k-1}$ "habite" dans un flot ?"*

Il s'agissait d'une question importante intervenant dans un passage crucial de la preuve du *"Transversality lemma"* qui entraînait la validité d'un théorème d'extension stratifié de g à tout $\mathcal{X}$, dont j'avais besoin de même que Goresky.

La réponse à cette question est la suivante :

"il n'est pas vrai en général que tout difféomorphisme $g : S \to S$ arbitrairement proche de l'identité habite dans un flot Φ (i.e. dans un groupe à un paramètre), même dans le cas où g est à support compact (Freifeld 1967), donc g ne provient pas nécessairement d'un champ de vecteurs défini sur S".

Cette remarque signifie que dans la preuve de Goresky, on ne dispose plus d'un "théorème d'extension" sur un voisinage tubulaire T_S dans $\mathcal{X}$ du difféomorphisme "transversalisant" g défini sur les k-strates $S = \mathcal{X}_k - \mathcal{X}_{k-1} = \bigcup_{\dim X = k} X$ de $\mathcal{X}$.

Dans un premier temps je pensais alors dépasser cette difficulté en éclaircissant une remarque faite par J. Milnor (1984) et en étendant aux variétés non compactes S, difféomorphes à l'intérieur d'une variété compacte à bord non vide, un théorème connu pour les variétés compactes sur la simplicitié de la composante connexe entière $Diff_0(S,S)$ de l'identité dans $Diff(S,S)$:

"L'image $Exp(S)$ de l'application exponentielle engendre comme groupe de difféomorphismes la composante connexe entière $Diff_0(S,S)$ de l'identité dans $Diff(S,S)$".

Le difféomorphisme transversalisant $g : S \to S$ peut alors être obtenu comme composition $g = \phi_1^1 \circ \cdots \phi_1^s$ de tels flots et donc par relèvement de chacun de ces flots (champs), on peut reconstruire le relevement $\Phi_1 = \Phi_1^1 \circ \cdots \Phi_1^s$ de g dans T_S (*mais pas sur A toute entière*).

Cependant, afin d'obtenir une isotopie finale $\Phi_1 : A \to A$ de A étendant g *continuement sur ∂S*, l'hypothèse que les champs ζ^i des flots ϕ^i vérifient la propriété $\lim_{x\to\partial S} \zeta^i = 0$ semble nécessaire et cela ne découle pas directement de nos méthodes. En suivant une suggestion de Andrew du Plessis nous avons alors montré que :

"Il existe un voisinage B de 1_S dans $Diff_0(S,S)$ tel que tout difféomorphisme $g \in B$ s'écrive comme le flot $g = \Phi_1$ au temps $t = 1$ d'un champ de vecteurs dépendant du temps".

Cela n'est pas trop différent de la méthode envisagée par M. Goresky en 1981, mais pour que tout $g \in B$ habite dans un flot Φ d'un champ ζ sur S il faut la précision *fondamentale* que $\zeta \in \Gamma^\infty(\pi_S^* TS)$, i.e. : que ζ est un champ de vecteurs *dépendant du temps* (autrement la propriété reste *fausse*, Freifeld 67) c'est à dire il faut que Φ soit le flot d'un champ de vecteurs de $S \times [0,1]$ tangent à la sous-variété $S \times \{t\}$ pour tout $t \in [0,1]$ (chapitre III, §2.2).

Ceci nous permet d'obtenir un *théorème d'extension d'homéomorphismes stratifiés* en corrigeant en même temps la preuve du *transversality lemma* de Goresky lequel reste donc valable. D'autre part, notre preuve du *théorème d'extension* dépend de manière essentielle (chap. III, §2.2 étape 3) de la continuité du relèvement du champ de vecteurs (théorème paru en 1988 et dont Goresky ne disposait pas).

Avec cette modification, nous démontrons alors (chapitre III) plusieurs versions de ce théorème qui généralisent le *Transversality Lemma* de Goresky dans des manières différentes. En particulier, notre théorème est valable pour toutes les stratifications $\mathcal{X}$ vérifiant l'un des types de régularité suivants : être un ensemble stratifié abstrait de Thom-Mather (E.S.A.), vérifier la condition (c) de Bekka, ou la condition (w) de Verdier (1978) ou la condition lipschitzienne de Mostowski.

Enfin, n'ayant pas obtenu un théorème de transversalité (b)-régulier mais plutôt un théorème de transversalité qui préserve la condition d'être un E.S.A. et la condition (c) de Bekka (sous l'hypothèse de semidifférentiabilité de Φ), notre étude de l'homologie de Whitney $WH_k(\mathcal{X})$ représentée par des cycles (b)-réguliers s'est orienté de façon naturelle vers l'étude de l'homologie et de la cohomologie de $\mathcal{X}$, où pour $\mathcal{X}$ et ses cycles nous considérons des stratification (c)-régulières et/ou des E.S.A.

En réutilisant les idées de Goresky, dont presque la totalité était valable pour des E.S.A. (catégorie contenant les espaces (c)-réguliers), nous introduisons alors l'homologie $BH_k(\mathcal{X})$ d'une stratification (c)-régulière $\mathcal{X}$ et l'homologie $AH_k(\mathcal{X})$ stratifiée abstraite d'un E.S.A. Pour ces théories, la plupart de résultats analogues à ceux de Goresky restent valable (à l'aide des théorèmes de transversalité stratifiée), ainsi qu'un résultat analogue *faible* de la conjecture de Goresky concernant la bijectivité de l'application de représentation homologique $R_a : AH_k(\mathcal{X}) \to H_k(\mathcal{X})$.

CONTENU DE LA THESE

La thèse introduit de nouvelles conditions de régularité pour des applications stratifiées, étudie des problèmes d'extension relatifs à ces applications et établit des théorèmes de transversalité et de représentation de l'homologie et de la cohomologie pour un espace stratifié.

Dans le chapitre I, on reprend et on améliore légèrement les théorèmes de relèvement continu et contrôlé de champs de vecteurs dûs à Bekka, du Plessis et Shiota, pour une stratification $\mathcal{X} = (A, \Sigma)$ au moins (c)-régulière.

Pour tout système de données de contrôle $\mathcal{T} = \{(\pi_X, \rho_X) : T_X \to X \times \mathbb{R}\}$ et pour toute strate X de $\mathcal{X}$, on introduit la notion de distribution canonique $\mathcal{D}_X : T_X \to \mathbb{G}_l^n$ (associée à la strate X) comme une distribution d'espaces tangents prolongeant de manière continue l'application de Gauss $\mathcal{D}_{XX} : X \to \mathbb{G}_l^n$ utile pour obtenir des relèvements continus contrôlés de champs de vecteurs de type *canonique*, ce qui jouera un rôle fondamental dans la suite.

Dans le chapitre II, on introduit et étudie la *semidifférentiabilité*, la régularité *horizontalement-*C^1 et d'autres conditions de régularité, à mi-chemin entre la continuité et la régularité C^1, pour un morphisme stratifié f. On montre toutes les implications valables entre elles et on étudie sous quelles conditions un morphisme stratifié f peut ou non vérifier ces conditions de régularité. On étudie plus particulièrement le cas où le morphisme f est le flot, à l'instant t, d'un champ de vecteurs relevé *continu* contrôlé.

On remarque qu'une telle régularité des flots des champs relevés dépend de conditions de régularité sur la stratification $\mathcal{X}$, lesquelles rappellent une propriété conjecturée par Whitney en 1965 dans le contexte de stratifications (analytiques) de variétés analytiques, la *"fibering conjecture"*. Celle-ci entraîne l'existence d'un feuilletage stratifié $C^{0,1}$ autour de tout point de $\mathcal{X}$, compatible avec la stratification.

On relie ces notions avec les notions de *rétractions adaptées* de Andrew du Plessis et Terry Wall (1995).

On prouve enfin que pour une stratification admettant un tel "bon" feuilletage, on peut améliorer dans le premier théorème d'isotopie de Thom, la régularité de l'application de trivialisation topologique H d'une submersion stratifiée propre $f : \mathcal{X} \to M$, de sorte que H devienne *horizontalement-*C^1.

Dans le chapitre III, en éclaircissant une remarque faite par Milnor, on généralise aux variétés difféomorphes à l'intérieur S d'une variété compacte à bord un théorème connu pour les variétés compactes concernant la simplicité du groupe des difféomorphismes proches de l'identité $Diff_0(S, S) \subseteq Diff(S, S)$. Comme corollaire nous en déduisons un *théorème d'extension faible* sur un voisinage tubulaire T_X de chaque strate X de A, d'homéomorphismes stratifiés donnés sur X. Ensuite par d'autres méthodes nous démontrons un *théorème d'extension forte* permettant de prolonger en un homéomorphisme stratifié de la stratification A tout difféomorphisme $g \in Diff_0(S, S)$, $S = \mathcal{X}_k - \mathcal{X}_{k-1}$, suffisamment proche de l'identité 1_S, défini sur un squelette X_k de X et égal à l'identité sur $\mathcal{X}_{k-1}$.

On utilise alors ce résultat pour démontrer un théorème de transversalité-isotopie, qui généralise aux ensembles stratifiés abstraits (E.S.A.) de Thom-Mather le *Transversality Lemma* de Goresky (1981). Dans ce cas, l'homéomorphisme transversalisant est obtenu comme composition de flots de champs de vecteurs *dépendant du temps* relevés de manière *continue* et contrôlée par les méthodes introduites au chapitre I.

Pour des stratifications ayant des conditions de régularité supplémentaires, on prouve que la préservation de la régularité d'un sous espace $\mathcal{W}$ stratifié de $\mathcal{X}$ après une déformation par isotopie est soumise à la *semidifférentiabilité* (introduite au chapitre II) de la déformation transversalisante.

Le théorème de transversalité et ces résultats sur la préservation de la régularité après déformation concernent aussi bien les stratifications (c)-régulières, (w)-régulières que lipschitziennes.

Dans le chapitre IV, on considère l'homologie d'un espace stratifié et on montre que la plupart des résultats de Goresky sur l'homologie $WH_k(\mathcal{X})$ et la cohomologie $WH^k(\mathcal{X})$ d'une stratification de Whitney (1976 thèse, 1981 TAMS), peuvent être étendus afin de définir des nouvelles théories $\{AH_k(\mathcal{X}), AH^k(\mathcal{X})\}$ (resp. $\{BH_k(\mathcal{X}), BH^k(\mathcal{X})\}$) où pour $\mathcal{X}$, ses cycles et cocycles, on considère des ensembles stratifiés abstraits (E.S.A.) (resp. des stratifications (c)-régulières) au lieu de stratifications de Whitney.

En utilisant le théorème de triangulation des E.S.A. de Goresky, on démontre l'analogue d'une conjecture de Goresky : *"l'application de représentation homologique R_a : $AH_k(\mathcal{X}) \to H_k(\mathcal{X})$ est une bijection"*.

On utilise le théorème de transversalité pour des E.S.A. (resp. pour des stratifications (c)-régulières) du chapitre III pour démontrer que *"la représentation cohomologique R^a : $AH^k(\mathcal{X}) \to H^k(\mathcal{X})$ (resp. $R^b : BH^k(\mathcal{X}) \to H^k(\mathcal{X})$) est une bijection"*, résultat analogue au théorème de Goresky.

De plus, nous montrons que les ensembles $AH^k(\mathcal{X})$ et $BH^k(\mathcal{X})$ peuvent être munis d'une opération de somme géométriquement représentée par la "réunion transverse" de cocycles de $\mathcal{X}$ et de sorte que les ensembles $AH^k(\mathcal{X})$ et $BH^k(\mathcal{X})$ deviennent des groupes et les applications de représentation cohomologique $R^a : AH^k(\mathcal{X}) \to H^k(\mathcal{X})$ et $R^b : BH^k(\mathcal{X}) \to H^k(\mathcal{X})$ des isomorphismes. Le théorème analogue est démontré pour l'homologie quand $\mathcal{X}$ est une variété.

De nouveau grâce au théorème de transversalité, on retrouve d'autres interprétations géométriques importantes pour les opérations standards de cohomologie.

Le produit cup est donné par l'intersection transverse de deux cocycles, le produit cap se représente par l'intersection transverse d'un cycle et d'un cocycle et les homomorphismes induits f^* sont représentables comme la préimage transverse $W \mapsto f^{-1}(W)$ d'un cocycle par rapport à une fonction contrôlée f. Le produit cross est donné par le produit cartésien de deux cocycles et quand $\mathcal{X}$ est une variété, l'isomorphisme de dualité de Poincaré s'exprime par une application qui est l'identité sur les cocycles représentatifs.

Nous concluons enfin en remarquant que les résultats donnant pour la cohomologie de Whitney WH^* la réalisation géométrique des opérations cohomologiques *les carrés et les p-puissances de Steenrod* peuvent également être obtenus (Murolo 1994 et 1996).