Chapitre 1

Introduction

La théorie des distributions est une théorie dont les premiers premiers rudiments ont d'abord émergé dans les sciences physiques au XIX ième siècle, et qui a ensuite été introduite dans les sciences mathématiques au XX ième siècle, principalement sous l'influence de mathématiciens russes et du mathématicien français Laurent Schwartz.
De par l'utilisation du calcul fonctionnel par les physiciens et ingénieurs, il est apparu que l'utilisation des fonctionnelles, c'est-à-dire l'utilisation d'applications définies non pas sur des ensembles de points mais plutôt sur des ensembles de fonctions, s'avérait beaucoup plus souple et beaucoup plus puissant que les simples évaluations classiques de fonctions en des points.
La puissance de ces méthodes, notamment de par l'obtention de résultats spectaculaires mais dont la justification laissait beaucoup à désirer a poussé les mathématiciens à aller voir s'il n'y avait pas la possibilité de fonder une théorie dans laquelle ces méthodes pourraient avoir une justfication solide.
Donnons avant d'aller plus loin un exemple de raisonnement, utilisant le calcul fonctionnel, dans lequel un raisonnement sans aucune justification rigoureuse peut permettre d'obtenir très aisément la solution à un problème. Nous donnerons ici un exemple très simple.
On cherche une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, qui soit de classe C^1 et telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0. \tag{1}$$

Il est classique qu'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = h(x+y).$$

Nous allons retrouver ce résultat par une méthode utilisant du calcul fonctionnel.
Si dans l'équation (1), nous remplaçons l'opérateur $\frac{\partial}{\partial y}$ par un réel λ, l'équation (1) devient

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \lambda f(x,y) = 0. \tag{2}$$

En particulier, si nous fixons $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x,y)$ est solution de l'équation différentielle

$$\varphi' - \lambda\varphi = 0,$$

ce qui nous donne $\varphi(x) = e^{\lambda x}\varphi(0)$.
Revenons à la fonction f, nous avons

$$f(x,y) = e^{\lambda x} f(0,y).$$

Enfin, reprenant $\lambda = \frac{\partial}{\partial y}$ et posant $h(y) = f(0,y)$, nous obtenons formellement

$$f(x,y) = e^{x\frac{\partial}{\partial y}} h(y).$$

Toujours formellement, grâce au fait que pour un réel μ, $e^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!}$, l'équation précédente se réécrit

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} h^{(n)}(y) \tag{3}$$

Et la dernière expression n'est rien d'autre que la série formelle de Taylor de la fonction h et coïncide avec l'expression $h(x+y)$.
Nous voyons bien sur cet exemple simple quelles sont les étapes à clarifier afin de donner un sens à toute cette suite d'inexactitude. En plus du fait qu'il faut donner un sens à l'équation (3), il faut aussi être capable de donner un sens à l'expression $e^{x\frac{\partial}{\partial y}}$ ou plus généralement donner un sens à une expression de la forme $\varphi(T)$ où φ est une fonction définie sur un ensemble de réels ou de complexes et T est un opérateur dans un sens que l'on précisera ($T = \partial/\partial y$ en l'occurence ici).
Le but ultime serait de pouvoir écrire que, si g est une fonction et que si on cherche une fonction f telle que

$$\varphi(T)f = g,$$

alors on peut écrire

$$f = \frac{1}{\varphi(T)} g.$$

A la lumière de ceci, on voit qu'il est plus intéressant de s'intéresser à la correspondance $\varphi \mapsto \varphi(T)f(x)$ à x fixé qu'à la correspondance $x \mapsto \varphi(T)f(x)$ à φ fixée.
Ce point de vue fonctionnel est à la base de plusieurs théories justifiant le calcul fonctionnel. Il y a la théorie les distributions, mais pas que puisque d'autres théories coexistent. Nous pouvons, par exemple, citer en vrac la théorie du calcul fonctionnel de Mikusinski, la théorie de Fourier, la théorie des fonctionnelles analytiques, la théorie des hyperfonctions.
Nous nous intéresserons dans cet ouvrage à la théorie des distributions et à la théorie à la transformation de Fourier de ces distributions.
La théorie des distributions s'est à l'heure actuelle clairement imposée dans la majeure partie des mathématiques et est considérée comme une théorie de base, connue par tout mathématicien professionnel, que ce soit en analyse appliquée ou fondamentale ou en géomètrie algébrique ou

différentielle (où la théorie des distributions donne lieu ici à une légère variante qui est la théorie des courants).

Par ailleurs, la théorie des distributions est aussi beaucoup employée dans les sciences physiques, ceci à cause du fait que la modélisation des phénomènes via ces distributions est physiquement beaucoup plus réaliste.

Par exemple, si dans un problème physique, on cherche à matérialiser la température $f(x)$ en un point x de l'espace, on n'obtient pas en pratique la mesure de cette température en un point x étant donnée que la notion physique de point n'a pas de sens et que la mesure de cette température est donnée physiquement par un thermomètre qui occupe un espace qui ne peut être considéré comme étant un point. D'une manière plus précise, si $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ désigne une fonction qui "matérialise" le thermomètre placé en $x \in \mathbb{R}^3$, on ne mesure pas $f(x)$ mais plutôt $\int_{\mathbb{R}^3} f(t)\varphi(t)dt$, c'est-à-dire la moyenne de la température de tous les "points" constituants le thermomètre. Le thermomètre sera d'autant plus précis que le "support" de φ (c'est-à-dire l'ensemble des points où φ est non nul, ce qui correspond physiquement à l'espace occupé par le thermomètre) sera "réduit", idéalement réduit au seul point x, et qu'on aura aussi

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(t)\varphi(t)dt = f(x).$$

Or, sous des hypothèses raisonnables, l'égalité ci-dessus n'a pas de sens. En effet, si par exemple la fonction f est continue et φ est une fonction nulle partout, sauf au point x, la fonction $f\varphi$ est alors nulle presque partout, et l'intégrale de gauche est forcément nulle, ce qui est absurde.

On voit bien là encore que, la démarche naturelle est de considérer non pas la valeur de f en x, mais plutôt de considérer la valeur de la fonctionnelle T en f définie par

$$T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t)\varphi(t)dt$$

pour toute fonction φ continue, ayant un support fermé et borné (correspondant à l'instrument de mesure).

Cette remarque sera notre point de départ de la théorie des distributions. Sans se préoccuper de notions d'ordre topologique, une distribution sera dans un premier temps une fonctionnelle linéaire, c'est-à-dire une forme linéaire sur un espace vectoriel constitué de fonctions.

Si E est un tel espace vectoriel de fonctions sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, T sera donc une application de E dans $\mathbb{K}$ telle que

$$\forall f_1, f_2 \in E, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad T(f_1 + \lambda f_2) = T(f_1) + \lambda T(f_2).$$

Dans les différentes théories de distributions, fonctions, hyperfonctions, etc..., ce qui varie à chaque fois sont les espaces fonctionnels E ainsi que des notions de continuité des fonctionnelles T.

Dans les toutes premières formalisation des distributions, notamment réalisées par l'école russe dans les années 20-50, les notions de continuité des fonctionnelles T en question étaient souvent très faibles, voire absentes. On pourra se reporter à titre d'exemples au tout premier tome de la merveilleuse série d'ouvrages rédigés par Gelfand et Shilov (traduits en français aux éditions Dunod). Cette théorie, déjà très intéressante, était toutefois limitée par le fait qu'il devenait difficile de prendre des limites de distributions, d'approcher des distributions par d'autres distributions ou seulement par des fonctions.

Laurent Schwarz fut alors un des grands fondateurs de la théorie moderne des distributions telle qu'elle est la plus utilisée actuellement. Le point de départ est à peu près le même que le point de départ de l'école russe, hormis qu'il définit de manière très rigoureuse une topologie à la fois sur l'espace vectoriel E des fonctions (qu'il nomme "fonctions test") ainsi qu'une topologie sur l'espace des distributions. Ces topologies sont définies à l'aide d'une famille de semi-normes qui définissent une topologie dite de "limite inductive d'espaces de Fréchets". Avec cette topologie, il montre notamment qu'une limite simple de distributions est une distribution. Ce résultat, très puissant, est un des résultats qui montrent l'extrême souplesse d'utilisation des distributions. On renvoie à ce propos au magnifique ouvrage de Laurent Schwarz "Les distributions".

Par après, l'école russe a, dans un style nettement moins bourbakiste que Schwarz, défini une notion beaucoup plus élémentaire de topologie sur l'espace des distributions. Avec cette topologie, il devient alors possible de retrouver "à la main" le théorème des limites simples de distributions de L. Schwartz. Ceci est notamment fait dans l'ouvrage de Vladimirov (éditions Mir Moscou, traduit en français). Le point de vue de notre ouvrage sera donc exactement ce dernier point de vue, nous éviterons tout recours à des topologies complexes et l'exposé sera complètement élémentaire et self-contained. Il est à remarquer que Hörmander a cherché lui aussi à exposer les distributions sous cet angle élémentaire dans son ouvrage "The Analysis of Linear Partial Differential Operators" qui date des années 50-60.

Enfin, et c'est un des aspects les plus intéressants des distributions, cette souplesse au niveau de la définition des distributions en fait finalement des objets plus naturels d'un point de vue physique que les fonctions et ceci apporte plus de propriétés aux distributions qu'aux fonctions. En particulier, on verra que toute distribution est indéfiniment dérivable dans un sens que l'on précisera, et que si une suite de distributions converge vers une distribution, alors la suite des dérivées converge vers les dérivées de la limite. Ces propriétés qui sont bien entendues fausses pour les fonctions confèrent aux distributions une grande souplesse d'utilisation dans les applications pratiques.

En revanche, on verra qu'il n'est pas possible en général de multiplier entre elles des distributions. Ceci clôt l'introduction très générale à la théorie des distributions.