Mémoire de master 2
du CTES de l'AMU

Spécialité
Mathématiques Générales
Parcours
Mathématiques Fondamentales

Présenté par :
M. Saloly BA

Sujet de mémoire :
Points périodiques des $\beta-$transformations, avec β nombre de Pisot ou de Salem.

Soutenu le 14 septembre 2015 devant le jury suivant :

(Membres du jury)

Remerciements :

J'exprime toute ma reconnaissance à Madame Pascale ROESCH qui a beaucoup donné de son temps pour m'encadrer et me diriger dans ce travail. Sa disponibilité et ses conseils ont été d'un apport capital pour la réalisation de ce document. Elle m'a fait beaucoup bossé de par sa rigueur et ses exigences. C'est un honneur pour moi de l'avoir comme directrice de mémoire.

Un grand merci à Monsieur Claudio MUROLO pour ses conseils utiles, ses encouragements et ses motivations pour tous les étudiants du CTES. Sans lui, je n'irai pas jusqu'au bout de mes études de master 2.

Merci à tout le personnel administratif et technique du CTES de l'Université d'Aix Marseille, pour leur disponibilité.

Je remercie toute ma famille qui malgrè mon manque de temps et mes humeurs, m'a soutenu tout au long de mes études.

A mon père disparu..

Résumé

Soit $\beta > 1$ un nombre réel donné et

$$\begin{array}{rcl} T_\beta & : & [0,1[\longrightarrow [0,1[\\ & & \alpha \longmapsto \beta\alpha - [\beta\alpha] \end{array}$$

L'itération de cette transformation donne lieu à un $\beta-$développement de α en base β noté $d_\beta(\alpha)$. Il y a beaucoup de résultats liés aux propriétés de ce $\beta-$développement et de sa dépendance par rapport à β. Parmi ces résultats on peut citer ceux de K. Schmidt dans [4] , *(l'objet de notre travail)* où il caractérise les nombres de Pisot et ceux de Salem à partir de l'ensemble des points périodiques $Per\,(T_\beta)$ par les deux résultats suivants que nous démontrons dans ce document.

(1) Si $\mathbb{Q} \cap [0,1[\subset Per\,(T_\beta)$ alors β est soit un nombre de Pisot, soit un nombre de Salem.

(2) Si β est un nombre de Pisot alors $Per\,(T_\beta) = \mathbb{Q}\,(\beta) \cap [0,1[$.

Où $\mathbb{Q}$ désigne l'ensembles des nombres rationnels et $\mathbb{Q}\,(\beta)$ la plus petite extention de corps contenant $\mathbb{Q}$ et β et $Per\,(T_\beta)$ désigne l'ensemble des points périodiques sous T_β.

- Un nombre de Pisot est un entier algébrique $\beta > 1$ dont tous ses conjugués de Galois sont de module < 1.
- Un nombre de Salem est un entier algébrique $\beta > 1$ dont tous ses conjugués de Galois sont de module ≤ 1 et dont au moins un d'entre eux est de module 1.

Il a toujours été question de savoir si les nombres de salem vérifie la propriété (2). Une réponse incomplète à cette conjecture fut donnée par K. Schmidt dans [4], avec le théorème suivant :

Soit β un entier algébrique > 1. Si β n'est ni un nombre de Pisot, ni un nombre de Salem alors $Per(T_\beta) \cap \mathbb{Q}$ n'est pas dense dans $[0,1[$.

La conjecture $Per\,(T_\beta) = \mathbb{Q}\,(\beta) \cap [0,1[$ pour tout nombre de salem reste toujours un problème ouvert même si elle est vraie pour une certaine famille de nombres de Salem.

Introduction

La notion de $\beta-$transformation

$$\begin{aligned} T_\beta \ : \ & [0,1[\longrightarrow [0,1[\\ & x \longmapsto \beta x - [\beta x] = \{\beta x\} \end{aligned}$$

a été introduite par Réyni dans [1] puis par Parry dans [2]. Elle agit comme un $\beta - shift\ S_\beta$, pour tout réel $\beta > 1$ et il est de type fini si et seulement si $\left\{T_\beta^k(1)\ ;\ k \geq 0\right\}$ est fini. Bertrand [3] et Schmidt [4] ont prouvé séparément que si β est un nombre de Pisot alors l'ensemble des réels ayant un $\beta-$développement fini ou ultimement périodique coincide avec $\mathbb{Q}(\beta)$.

Le rôle important que joue ce résultat, nous conduit à identifier l'ensemble des points périodiques sous T_β. Désignons par $Per(T_\beta)$ l'ensemble des points périodiques sous T_β, par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels et par $\mathbb{Q}(\beta)$ la plus petite extension de corps contenant $\mathbb{Q}$ et β. Il est trivial que pour tout réel $\beta > 1$, $Per(T_\beta) \subseteq [0,1[\cap \mathbb{Q}(\beta)$ et que $Per(T_\beta) = [0,1[\cap \mathbb{Q}(\beta)$ si $\beta > 1$ est un entier. Qu'en est -il pour un réel $\beta > 1$? Est-il possible de décrire l'ensemble des points périodiques si $\beta > 1$ n'est pas un entier ? Voilà un certains nombres de questions auxquelles Klaus SCHMIDT tente de donner des réponses dans son article " ON PERIODIC EXPANSIONS OF PISOT NUMBERS AND SALEM NUMBERS" où il anonce les résultats cités dans le résumé du mémoire et qui font l'objet de notre travail.

Nous parlerons d'abord de ß-transformation et dynamique symbolique. Cette partie contient des exemples introductifs permettant de comprendre les $\beta-$représentations, de pouvoir les comparer lexicographiquement pour aboutir aux $\beta-$développements en passant par l'algorithme "*greedy algorithm"*. Un rappel bref des propriétés du $\beta - shift$, nous permettra d'introduire la notion de sous-shift et de systèmes dynamiques topologiques. Ensuite, nous aborderons la partie Nombres de Pisot et nombres de Salem qui contient les résultats essentiels du travail. Nous parlerons de nombres algébriques et d'entiers algébriques pour pouvoir définir les nombres de Pisot (*un nombre de Pisot est un entier algébrique* $\beta > 1$ *dont tous les conjugués de Galois* $\theta \neq \beta$ *vérifient* $|\theta| < 1$) et les nombres de Salem (*un nombre de Salem est un entier algébrique* $\beta > 1$ *dont tous les conjugués de Galois* $\theta \neq \beta$ *vérifient* $|\theta| \leq 1$ *et au moins un d'entre eux vérifie* $|\theta| = 1$).Nous introduirons la notion d'orbites finis (en particulier sous T_β où $\beta > 1$ est un entier algébrique) pour caractériser l'ensemble $Per\,(T_\beta)$. Nous passerons enfin par des lemmes pour démontrer les résultats suivants :

(1) Si

$$\mathbb{Q} \cap [0,1[\subset Per(T_\beta)$$

alors β est soit un nombre de Pisot soit un nombre de Salem.

(2) Si β est un nombre de Pisot alors

$$Per(T_\beta) = \mathbb{Q}(\beta) \cap [0,1[\,.$$

Table des matières