Structure géométrique des variétés stables et instables d'un flot de Morse-Smale

Mémoire de M2

rédigé par

Khadidiatou CISSE

sous la direction de

Pr. David TROTMAN

Département de mathématiques, Aix-Marseille Université

28 novembre 2020

Table des matières

Introduction

Ce mémoire a pour objet l'étude de quelques aspects de la théorie de Morse et des espaces stratifiés. La théorie de Morse a commencé par l'étude du comportement de certaines fonctions bien choisies définies sur des variétés. L'étude de ces fonctions, dites de Morse, nous permet d'obtenir des informations sur la topologie de la variété. Ces fonctions possèdent des points critiques dits non-dégénérés, et le lemme de Morse nous donne la forme locale de la fonction en ces points. Chaque point critique reçoit un entier appelé indice qui donne des informations sur le comportement local de la fonction f autour de ce point. Pour obtenir des informations plus fines, on introduit la notion de pseudo-gradient X de f, un champ de vecteurs dont le flot fait croître f hors des points critiques. Ces pseudo-gradients fournissent des ensembles de trajectoires reliant les points critiques de la fonction de Morse.
La variété stable (resp. instable) de f au point critique p est l'union des courbes intégrales de X qui rejoignent (resp. quittent) p. Si les pseudo-gradients vérifient la condition générique de transversalité des variétés stables et instables, les trajectoires qui relient les points critiques d'indices consécutifs sont en nombre fini. De tels gradients sont dits de Morse-Smale.
L'objet de ce mémoire est l'étude de la structure géométrique de l'adhérence des variétés stable et instable d'un point critique d'une fonction de Morse munie d'un gradient de Morse-Smale. Cette étude, basée sur les travaux de Laudenbach et Nicolaescu, s'appuie sur la théorie des espaces stratifiés. Un espace stratifié est un espace topologique qui peut être décomposé en pièces qui sont des variétés différentiables appelées strates. Pour qu'une telle décomposition soit un espace stratifié, on lui demande en général des conditions minimales telles que la séparabilité, une base dénombrable etc. Le point central de toutes les définitions d'espaces stratifiés est la décomposition d'un espace topologique en parties bien agencées les unes par rapport aux autres. Cet agencement diffère d'une définition à une autre, mais il comporte toujours la condition de frontière : l'adhérence d'une strate est une union de strates. Un exemple simple de stratification est donné par toute triangulation d'un espace ou encore la décomposition d'une variété à bord en son intérieur et son bord. Dans ce mémoire, nous allons présenter l'agencement établi par Laudenbach [3] et Nicolaescu [4] pour décrire l'adhérence des variétés stables et instables.

Pour cela, nous commençons à la section 1 par établir les bases de la théorie de Morse en nous basant sur l'ouvrage de Audin et Damian [1]

La deuxième section introduit deux types d'espaces stratifiés : les espaces stratifiés à singularité conique et les espaces stratifiés de Whitney utilisés respectivement par Laudenbach et Nicolaescu pour décrire les variétés stables/instables.

La troisième section présente une condition suffisante, basée sur la théorie des stratifications, pour obtenir la condition de Smale, d'abord suivant Laudenbach puis suivant Nicolaescu.

C'est à la dernière section que nous décrivons la stratification de l'adhérence des variétés stables/instables d'un flot de Morse-Smale suivant les travaux de Laudenbach et de Nicolaescu avant d'introduire les stratifications de Mather [2] pour établir la relation entre les deux types de stratifications décrites.