INSTITUT de MATHÉMATIQUES de MARSEILLE

Aix-Marseille université

Etude du temps d'endormissement de grenouilles sur le tore en dimension 1

Etudiante :
Zoé DAUTRICHE

Responsable :
A. Gaudillière.

Mémoire de Master
2019/2020
Aix-Marseille Université Master CEPS.

Merci...

Ma gratitude va à Dieu pour Sa douce guidance et Ses bienfaits, apparents ou cachés.
Je remercie du fond du coeur mon directeur de mémoire, Mr Gaudillière, pour sa patience, sa disponibilité et ses encouragements. Son énergie communicative a été une grande motivation tout au long de la rédaction de ce mémoire et a augmenté mon intérêt pour la recherche mathématique. Ca a été une belle expérience. Merci.
Je remercie Mme Nouri, ma responsable de Master 2, toujours disponible et flexible, tout cela avec une grande touche de gentillesse.
Merci également à tous mes professeurs depuis le début de mon cursus, l'UPMC de Paris, l'UPS de Toulouse et l'AMU de Marseille, qui m'ont permis de faire mes études à distance.
A Dominique Tourte du CROUS de Paris qui m'a tant aidé.
A mon mari qui me soutient depuis le début de ce parcours en ayant toujours confiance en moi.
Enfin je remercie ma mère, toujours à l'écoute et aux petits soins, et mon petit frère Arthur, grâce à qui ces mois de confinement ont été si chaleureux.

There is in human heart a quality of intelligence which surpasses that attributed to the mind.

Aberjhani

Table des matières

Contexte et motivations du modèle

En laissant s'écouler un flux lent constant de grains de sable au centre d'un disque on verra se former un tas. La pente augmente lentement jusqu'à l'ajout d'un grain qui entrainera une avalanche. Après cette première avalanche l'ajout progressif de grains de sable va mener la structure au même point critique et il y aura une autre avalanche, etc... La configuration du système oscille autour d'un état critique.
De ce modèle du "tas de sable" est né en 1987 le concept de *criticité auto-organisée* grâce aux physiciens Bak, Tang et Wiesenfeld.[1][2]

La *criticité* caractérise les systèmes qui changent de phase, c'est à dire, dont le comportement macroscopique change qualitativement, lorsqu'un paramètre dit critique dépasse un certain seuil. Par exemple, la température est un paramètre critique pour l'eau qui passe de l'état liquide à gazeux quand elle dépasse 100°C. On parle d'état critique quand le système est au point critique. Tous ses éléments s'influencent mutuellement. Il peut alors bifurquer, et changer brutalement de configuration.

Le terme *auto-organisation* désigne la capacité des éléments d'un système à produire et maintenir une forme particulière d'organisation à l'échelle du système sans que cette structure n'apparaisse au niveau des composantes et sans qu'elle ne résulte de l'intervention d'un agent extérieur (même si le système reste ouvert sur son environnement). Il y a émergence et maintien d'un ordre global sans qu'il y ait de chef d'orchestre.

La criticité auto-organisée concerne les systèmes qui évoluent vers un état critique sans intervention extérieure et sans paramètre de contrôle. L'amplification d'une petite fluctuation interne (dans notre exemple, l'ajout de grains de sables) dépasse un état critique et provoque un changement brutal de toute l'organisation du système. En d'autres termes ces systèmes possèdent un état critique intrinsèque autour duquel ils tendent spontanément à se maintenir. Tant que l'on fournit de la matière, le système va évoluer de telle sorte qu'il se rapproche de son seuil critique ; dès que ce seuil est dépassé, le système relaxe rapidement et évolue de nouveau vers le point critique jusqu'à la prochaine "avalanche", à l'instar du tas de sable.
Ces modèles ont beaucoup d'applications concrètes : Les mécanismes déclenchant les avalanches, tremblements de terre, vols d'oiseaux, mouvement de panique dans une foule, intention de vote...

Un des modèles mathématiques les plus intéressants pour aborder la criticité auto-organisée est le suivant :
On dispose d'un lac de dimension finie représenté par n nénuphars. On y dispose une certaine densité p de grenouilles, $p \leq 1$. A $t = 0$ toutes les grenouilles sont éveillées. A chacune d'entre elles est associée une horloge dont les sonneries sont espacées par des temps exponentiels indépendants de moyenne $\frac{1}{\alpha}$. On dira qu'elle sonne à taux α. Quand cette horloge de saut sonne elle saute sur l'un des nénuphars voisins choisi selon une loi uniforme. Chaque grenouille s'endort suivant une autre horloge qui sonne à taux λ, indépendante de la première.

Elle se réveille :
→ Instantanément si le nénuphar sur lequel elle devait s'endormir est déjà occupé.
→ Si une autre grenouille saute sur son nénuphar.
Soit un lac avec des nénuphars représenté par un tore de dimension 1. Il y a une différence de comportement des grenouilles selon leur densité. Si la taille n du tore est infinie, Rolla et Sidoravicius [6] ont montré qu'à faible densité les grenouilles finissent par s'endormir, alors qu'à haute densité elles ne s'endorment jamais. Pour le modèle de taille n fini toutes les grenouilles vont finir par s'endormir (cf paragraphe 3.1). Et de récentes recherches [4] montrent qu'à très faible densité la moyenne de ce temps d'endormissemnt croît en n de façon polynomiale, alors qu'à haute densité cette durée croît de manière exponentielle en n. On pense qu'il existe une densité critique p_c pour ce modèle induisant deux réponses différentes du système.
Sous réserve de prouver l'existence d'une telle densité critique (on ne sait pas le montrer pour le moment), on aurait alors un modèle dynamique simple faisant émerger une auto-organisation en passant à un système ouvert : des grenouilles sont ajoutées lentement dans le lac et celles qui sont au bord peuvent en sortir et ne reviennent pas. Un tel modèle va de lui même osciller autour de sa densité critique. Tant que la densité de grenouilles est inférieure à p_c les grenouilles s'endorment en un temps polynomial en n et auront peu tendance à sortir : p augmente. Une fois p_c dépassée les grenouilles ont de plus en plus de mal à trouver le sommeil, elles sortent plus du lac : p diminue.

Le temps d'endormissement des grenouilles (T_{endor}) à haute densité peut être long. Pour α en sec^{-1} et de valeur proche de 1, selon n il peut être supérieur à l'âge de l'univers... Durant ce laps de temps les grenouilles sont dans un état d'équilibre apparent, dit *métastable*. Un système métastable est un système qui a la possibilité de rejoindre un état qui semble stationnaire mais qui n'est pas un état d'équilibre, celui ci n'étant atteint qu'après une transition tardive et abrupte. Ici il finira par atteindre l'état stable qui est que toutes les grenouilles dorment.

Afin de mieux cerner ce modèle de grenouilles on s'intéresse à la métastabilité dans le cas de p élevée et à la loi de probabilité de T_{endor}.

Ce mémoire décrit notre raisonnement, pour le moment infructueux, afin de **montrer que sur un lac fini, représenté par un tore en dimension 1, et une densité de grenouille élevée, le temps d'endormissement suit asymptotiquement une loi exponentielle**.
Pour étudier ce modèle markovien, nous présenterons tout d'abords certains outils que nous avons appris à manipuler au cours de ce stage, comme la distance en variation totale, les temps de mélange, et les couplages.
Puis nous étudierons un modèle modifié, ergodique, où la dernière grenouille éveillée ne peut pas s'endormir, c'est une veilleuse. Nous essaierons de trouver une borne supérieure pour le temps de mélange de ce modèle qui soit inférieure à une exponentielle en n grâce aux couplages. Nous construirons plusieurs couplages, du plus simple au plus complexe afin d'obtenir cette majoration. Cela afin de montrer l'exponentialité en loi du temps d'endormissement dans le modèle sans veilleuse.