

La régularité pour les équations aux dérivées
partielles elliptiques
d'après De Giorgi et Moser

FINOT Aurélie

Août 2013

Table des matières

1	Introduction	3
2	La méthode de Moser pour la régularité höldérienne	3
2.1	Notions élémentaires	3
2.1.1	Continuité höldérienne ou condition de Hölder	4
2.1.2	Injections de Sobolev	4
2.1.3	Inégalité de Poincaré	5
2.2	Contexte du théorème de De Giorgi (hypothèses, notations)	7
2.3	Sous-solutions, sur-solutions et leurs propriétés	9
2.4	Lemmes préliminaires	10
2.5	Théorèmes préalables à la démonstration du théorème de De Giorgi	14
2.6	Enoncé et démonstration du théorème de De Giorgi	19
3	Généralisation de l'inégalité de Harnack	23
3.1	Théorème de Harnack	23
3.2	Généralisation du théorème de Harnack	24
3.2.1	Lemmes de Poincaré, Sobolev et John-Nirenberg	24
3.2.2	Autres résultats préalables à la démonstration du théorème généralisé de Harnack	26
3.2.3	Enoncé et démonstration du théorème de Harnack généralisé	33
3.3	Démonstration de la continuité höldérienne des solutions faibles d'EDP elliptiques utilisant le théorème de Harnack généralisé	34
3.4	Autres applications du théorème de Harnack généralisé	36
3.4.1	Comportement des solutions à l'infini	36
3.4.2	Application aux problèmes de calcul variationnel	38
4	Conclusion	39

1 Introduction

Ce mémoire est basé sur l'étude des articles [1] et [2] de Jürgen Moser.

Il présente différents résultats relatifs à la régularité des solutions d'équations différentielles elliptiques, notamment la continuité hölderienne des solutions faibles d'équations différentielles elliptiques linéaires, établie tout d'abord par E. De Giorgi dans [3] et J. Nash dans [4], dont J. Moser a donné une nouvelle preuve en 1960 et que J. Moser a ensuite présenté comme une conséquence d'un théorème de Harnack généralisé l'année suivante.

Dans une première partie, nous étudierons cette preuve nouvelle du théorème de De Giorgi apportée par J. Moser.

La deuxième partie de ce mémoire est consacrée, quant à elle, au second article de J. Moser.

Enfin, dans la dernière partie, nous aborderons les applications des résultats de régularité présentés.

2 La méthode de Moser pour la régularité hölderienne

Une nouvelle démonstration du théorème de De Giorgi établissant la continuité hölderienne des solutions faibles de certaines équations différentielles elliptiques linéaires (cf (2) ci-dessous) a tout d'abord fait l'objet d'un premier article de J. Moser en 1960. C'est cet éclairage nouveau que nous allons étudier dans la première partie de ce mémoire.

2.1 Notions élémentaires

La présente section constitue un rappel de notions élémentaires intervenant dans l'énoncé du théorème ainsi que dans la preuve rédigée par J. Moser.