Table des matières

Introduction

Le point de départ de ce mémoire est l'étude du début d'un article de Sznitman [8], qui s'intéresse à la notion de propagation du chaos, initiée par Kac. On considère un système de N particules, dont on étudie l'évolution au cours du temps. A l'instant initial, ces particules sont décorrélées, autrement dit on suppose que leurs positions sont indépendantes. Mais au fur et à mesure que le temps passe, les particules entrent en collisions les unes contre les autres, de sorte qu'elles interagissent et perdent ainsi leur indépendance initiale. Etudier la dynamique d'une particule au sein d'un très grand nombre de particules devient rapidement une tâche très difficile. Cependant, si l'on considère un nombre fixé k de particules, et que l'on fait maintenant tendre la taille du système N vers l'infini, intuitivement ces k particules ont peu de chance d'interagir entre elles. Par conséquent, il est naturel de penser que lorsque le nombre de particules tend vers l'infini, les positions des particules à un instant t donné sont indépendantes. Le chaos initial du système se propage donc dans le temps, et tout se passe comme si les positions des particules devenaient autant de copies indépendantes d'une position limite aléatoire.

Le premier chapitre rassemble des résultats qui seront utilisés par la suite, notamment le lemme de Gronwall, qui sera d'un emploi fréquent.

Le deuxième chapitre présente la distance de Wasserstein, qui est au centre de la théorie du transport. Cette dernière s'intéresse à un problème de recherche opérationnelle, celui de la minimisation du coût lié à un transport d'unités.

Dans le troisième chapitre, on étudie le début de l'article [8] sur le modèle de McKean de diffusions en interaction. A un instant t donné, la particule numéro i du système interagit avec la particule numéro j à travers un terme $b(X_t^{i,N}, X_t^{j,N})$. On suppose aussi que chaque particule est soumise à un aléa représenté par un brownien, et que tous ces bruits sont indépendants. On présente et démontre alors, sous certaines hypothèses de régularité de la fonction b, un résultat de convergence de la position d'une particule vers une position limite, puis nous démontrons que ces positions limites sont des copies indépendantes les unes des autres. Ces résultats sont ceux exposés dans l'article de Snitzman. Nous démontrons qu'ils demeurent en affaiblissant légèrement les hypothèses de régularité sur le terme d'interactions b.

Dans le quatrième et dernier chapitre, nous supposons que les bruits qui impactent les particules ne sont plus indépendants entre eux. Une manière de supposer cela est de considérer chaque bruit comme la somme de deux browniens : un brownien propre à la particule, comme dans le chapitre précédent, et un brownien commun à l'ensemble des particules du système. C'est dans ce cadre que nous travaillerons, et nous allons montrer que les résultats obtenus dans [8] s'étendent, conditionnellement au bruit commun considéré.