

CLASSIFICATION DES ALGEBRES DE LIE  
COMPLEXES SEMI SIMPES DE DIMENSION  
FINIE

Pierre HAUZE

25 juillet 2014

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Algèbres de Lie</b>  | <b>2</b>  |
| 1.1 Idéaux-Représentations . . . . .                              | 2         |
| 1.1.1 Idéaux . . . . .  | 2         |
| 1.1.2 Morphismes d'algèbres de Lie . . . . .                      | 5         |
| 1.1.3 Modules . . . . .   | 6         |
| 1.2 Algèbres de Lie nilpotentes . . . . .                         | 7         |
| 1.3 Algèbres de Lie résolubles . . . . .                          | 11        |
| 1.3.1 Critère de Cartan . . . . .                                 | 16        |
| 1.4 Algèbres de Lie semi-simples . . . . .                        | 22        |
| 1.4.1 Définitions . . . . .                                       | 22        |
| 1.4.2 Décomposition abstraite de Jordan . . . . .                 | 23        |
| 1.5 Algèbres simples . . . . .                                    | 25        |
| 1.6 Représentations des algèbres semi-simples . . . . .           | 27        |
| 1.6.1 Le théorème de Weyl . . . . .                               | 27        |
| 1.6.2 Une application du théorème de Weyl . . . . .               | 33        |
| 1.6.3 Représentations de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . . . . . | 34        |
| <b>2 Systèmes de racines d'une algèbre de Lie semi-simple</b>     | <b>39</b> |
| 2.1 Décompositions de Cartan d'une algèbre semi-simple . . . . .  | 39        |
| 2.1.1 Sous-algèbres toriques maximales H-Racines de L . . . . .   | 39        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 2.1.2    | Le centralisateur de $H$ . . . . .                             | 41        |
| 2.2      | Etude des systèmes de racines . . . . .                        | 51        |
| 2.2.1    | Definition . . . . .   | 51        |
| 2.2.2    | Premiers exemples . . . . .                                    | 54        |
| 2.2.3    | Position relative de deux racines . . . . .                    | 55        |
| 2.2.4    | Bases . . . . .  | 57        |
| 2.2.5    | Propriétés des bases . . . . .                                 | 60        |
| 2.2.6    | Matrices de Cartan . . . . .                                   | 63        |
| 2.2.7    | Systèmes irréductibles . . . . .                               | 64        |
| 2.2.8    | Diagrammes de Coxeter et de Dynkin . . . . .                   | 66        |
| 2.2.9    | Classification des systèmes irréductibles de racines . . . . . | 68        |
| 2.3      | Constructions de systèmes de racines irréductibles . . . . .   | 75        |
| 2.4      | Conclusion . . . . .   | 81        |
| <b>3</b> | <b>Théorèmes d'isomorphisme et de conjugaison</b>              | <b>83</b> |
| 3.1      | Isomorphismes . . . . .  | 83        |
| 3.2      | L'algèbre semi-simple $L$ "seule" détermine $\Phi$ . . . . .   | 88        |
| 3.2.1    | Groupes de Lie-Algèbres de Lie . . . . .                       | 88        |
| 3.2.2    | Les sous-algèbres de Cartan . . . . .                          | 92        |
| 3.2.3    | Conjugaison des sous-algèbres de Cartan . . . . .              | 96        |

# Introduction

Ce mémoire a pour sujet la classification des algèbres semi-simples complexes de dimension finie.

Dans le premier chapitre on définit toutes les notions et résultats nécessaires à cette étude, on rappelle des définitions de base assez générales telles que celles d'algèbre de Lie, d'idéal, de module et de représentation. On étudie ensuite les algèbres de Lie nilpotentes qui sont des cas particuliers d'algèbres de Lie résolubles pour en venir à la notion centrale de l'étude : les algèbres de Lie semi-simples. Une algèbre de Lie est semi-simple si son plus grand idéal résoluble est nul. On montrera que toute algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie s'écrit comme somme directe d'algèbres (plus précisément d'idéaux) de Lie simples, ramenant par là la classification des algèbres semi-simples à celles des algèbres de Lie simples.

Dans le chapitre 2, un rôle central est joué par les sous-algèbres toriques maximales pour l'étude d'une algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie  $L$ . Ce sont des sous-algèbres ne contenant que des éléments semi-simples, c'est-à-dire des éléments  $x$  de  $L$  tels que l'endomorphisme de  $L$   $\text{ad } x : y \longrightarrow [xy]$  soit diagonalisable. On met en évidence grâce à ces sous-algèbres la décomposition de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie  $L : L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_{\alpha}$ , où  $H$  est une sous-algèbre torique maximale de  $L$ , et  $L_{\alpha} = \{x \in L, [hx] = \alpha(h)x, \text{ pour tout } h \in H\}$ , où les  $\alpha$  sont des formes linéaires non nulles sur  $H$  telles que  $L_{\alpha}$  n'est pas réduit au vecteur nul.