CLASSIFICATION DES ALGEBRES DE LIE COMPLEXES SEMI SIMPES DE DIMENSION FINIE

Pierre HAUZE

25 juillet 2014

Table des matières

Introduction

Ce mémoire a pour sujet la classification des algèbres semi-simples complexes de dimension finie.

Dans le premier chapitre on définit toutes les notions et résultats nécessaires à cette étude, on rappelle des définitions de base assez générales telles que celles d'algèbre de Lie, d' idéal, de module et de représentation. On étudie ensuite les algèbres de Lie nilpotentes qui sont des cas particuliers d'algèbres de Lie résolubles pour en venir à la notion centrale de l'étude : les algèbres de Lie semi-simples. Une algèbre de Lie est semi-simple si son plus grand idéal résoluble est nul. On montrera que toute algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie s'écrit comme somme directe d'algèbres (plus précisemment d'idéaux) de Lie simples, ramenant par là la classification des algèbres semi-simples à celles des algèbres de Lie simples.

Dans le chapitre 2, un rôle central est joué par les sous-algèbres toriques maximales pour l'étude d'une algébre de Lie semi-simple complexe de dimension finie L. Ce sont des sous-algèbres ne contenant que des éléments semi-simples, c'est-à-dire des éléments x de L tels que l'endomorphisme de L ad x : y $\longrightarrow$ [xy] soit diagonalisable. On met en évidence grâce à ces sous-algèbres la décomposition de Cartan d'une algébre de Lie semi-simple complexe de dimension finie L : $L = H \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha$, où H est une sous-algèbre torique maximale de L, et $L_\alpha = \{x \in L, [hx] = \alpha(h)x,$ pour tout h $\in H\}$, où les α sont des formes linéaires non nulles sur H telles que L_α n'est pas réduit au vecteur nul.