

# **PRESENTATION MEMOIRE M2 : HYPERCYCLICITE**

## Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>  | <b>5</b>  |
| <b>2</b> | <b>Hypercyclicité</b>  | <b>5</b>  |
| 2.1      | Inexistence d'opérateurs hypercycliques sur un espace de dimension finie . . . . . | 7         |
| 2.2      | Exemples classiques d'opérateurs hypercycliques . . .                              | 8         |
| 2.2.1    | Exemple 1 : G.D. Birkhoff, 1929 . . . . .  | 8         |
| 2.2.2    | Exemple 2 : G.R. Maclane, 1951 . . . . .   | 8         |
| 2.2.3    | Exemple 3 : S.Rolewicz, 1969 . . . . .   | 8         |
| 2.2.4    | Exemple 4 : Opérateurs de décalage pondéré . . .                                   | 9         |
| <b>3</b> | <b>Ensembles de Vecteurs hypercycliques</b>  | <b>10</b> |
| <b>4</b> | <b>Vecteurs communs hypercycliques</b>   | <b>11</b> |
| 4.1      | Vecteurs communs hypercycliques et transitivité . . . .                            | 12        |
| 4.1.1    | Faits généraux . . . . .   | 12        |
| 4.1.2    | Opérateurs de translations . . . . .   | 13        |
| 4.1.3    | Un critère d'hypercyclicité avec paramètre . . . .                                 | 15        |
| 4.2      | Critère d'hypercyclicité commune . . . . .   | 16        |
| 4.2.1    | Critère de base . . . . .  | 16        |
| 4.2.2    | Le critère de Costakis - Sambarino . . . . .                                       | 17        |
| 4.2.3    | La construction d'Abakumov - Gordon . . . . .                                      | 19        |
| 4.2.4    | Une comparaison . . . . .  | 20        |
| 4.3      | Un résultat négatif sur des ensembles rares des opérateurs de décalage . . . . .   | 21        |

## Remerciements

Je remercie avant tout Alexander Borichev pour m'avoir proposé un sujet de Mémoire de M2. Je tiens également à lui témoigner ma reconnaissance pour sa disponibilité.

Je souhaite remercier sincèrement Claudio Murolo pour sa gentillesse et son enthousiasme communicatif.

Je remercie aussi les professeurs qui ont acceptés de faire parti du jury.

## Résumé

Dans ce mémoire on propose d'étudier quelques opérateurs hypercycliques ( transformations hypercycliques) classiques dont la translation et la dérivation dans l'espace des fonctions entières. Le mémoire est constitué de quatre sections.

La section 1 introduit le concept d'hypercyclicité.

La section 2 présente, d'une part, comment prouver qu'un opérateur est hypercyclique et, d'autre part, des exemples classiques de transformations hypercycliques.

La section 3 présente la structure que peut avoir un ensemble constitué de vecteurs hypercycliques.

Dans la section 4 nous abordons l'hypercyclicité simultanée d'une famille  $(T_\lambda)$  de transformations hypercycliques.

## 1 Introduction

Soit  $X$  un espace vectoriel topologique et  $T$  un opérateur linéaire continu de  $X$  dans lui-même. On dit que l'opérateur  $T$  est hypercyclique lorsqu'il admet un vecteur  $x$  dont l'orbite  $Orb(x) = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$  est dense dans  $X$ .

Alors que les applications linéaires en dimension finie sont bien comprises grâce à leur forme de Jordan, la situation est nettement plus compliquée en dimension infinie, où des phénomènes frappants, comme l'hypercyclicité, apparaissent.

La notion se trouve être directement liée au célèbre problème du sous-espace invariant, toujours ouvert : si  $T$  est un opérateur linéaire borné agissant sur un espace de Banach  $X$  de dimension infinie, est-il vrai qu'il existe toujours un sous-espace fermé  $Y$  de  $X$ , non réduit à zéro et distinct de  $X$  tout entier, tel que  $Y$  soit invariant par  $T$  ?

Etant donné un opérateur linéaire continu sur un espace de Banach séparable, comment prouver qu'il est hypercyclique ?

Pour répondre à cette question nous disposons de plusieurs théorèmes donnant des critères d'hypercyclicité.

## 2 Hypercyclicité

**Théorème 2.1** (Transitivité de Birkhoff). *Soient  $X$  un  $F$ -espace séparable et  $T$  un opérateur linéaire continu sur  $X$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i)  *$T$  est hypercyclique.*

(ii)  *$T$  est topologiquement transitif : pour tous ouverts non-vides  $U$  et  $V$  de  $X$ , il existe un entier  $n$  tel que  $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .*

*De plus, dans ce cas  $HC(T)$  est un sous ensemble  $G_\delta$  dense de  $X$ .*