Mémoire M2 : Nombre de points rationnels des courbes sur les corps finis

En 1936, Hasse publie une démonstration du théorème suivant : le nombre de points rationnels $N_E(\mathbb{F}_q)$ d'une courbe elliptique E sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ vérifie la majoration $|N_E(\mathbb{F}_q) - (q+1)| \leq 2\sqrt{q}$. En 1948, Weil généralise ce résultat à toute courbe algébrique, absolument irréductible, projective, lisse C, de genre g et définie sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ en établissant l'inégalité $|N_C(\mathbb{F}_q) - (q+1)| \leq 2g\sqrt{q}$.

À la suite de l'introduction par Goppa en 1981 de codes-correcteurs nécessitant des courbes ayant de nombreux points rationnels, cette borne fut améliorée, entre autre par Ihara et Oesterlé. Nous présenterons dans ce mémoire une approche de l'étude de ces bornes supérieures due à Hallouin et Perret, qui fournie également de nouvelles bornes, meilleures que celles connues jusqu'à présent pour les courbes ayant un genre assez grand par rapport au cardinal de leur corps de base.

Table des matières

I Pré-requis de Géométrie algébrique 2

1 Schéma 3

1.1 Définitions 4

1.2 Avantages de la théories des schémas 5

1.3 Quelques notions importantes en théorie des schémas 7

1.3.1 Fibrés vectoriels 7

1.3.2 Immersion fermée 8

1.4 Objet d'étude 8

2 Diviseurs **9**
2.1 Diviseur principaux et Équivalence linéaire 10
2.2 Faisceau inversible associé et diviseurs amples 10
2.3 Diviseur Canonique 11
2.4 Cohomologie des faisceaux 11

3 Théorie de l'intersection **12**
3.1 Formule d'adjonction 13
3.2 Formule de Riemann-Roch pour les surfaces 14
3.3 Lemme principal 14
3.4 Théorème de l'index de Hodge 15

II Bornes d'Hallouin-Perret **15**
3.5 Fonction zêta 16
3.6 Borne de Ihara 18

4 Bornes d'Hallouin-Perret **19**
4.1 L'espace euclidien fondamental F_X^n 20
4.1.1 L'espace $Num(X)_{\mathbb{R}}$ 20
4.2 Morphismes de Frobenius 20
4.2.1 L'espace F_X^n 21
4.3 Matrice d'intersection 21
4.4 Matrice d'Hallouin-Perret 22
4.5 La contrainte géométrique et le domaine de Weil 23
4.6 La contrainte arithmétique 24
4.7 Théorème d'Hallouin-Perret 25

5 Problèmes d'optimisations **26**
5.1 Problème de Weil 26
5.2 Problème de Oesterlé 26
5.3 Reformulation conique 27
5.4 La solution d'Oesterlé 27

6 Solution du problème d'Hallouin-Perret **29**