Introduction à la théorie des Singularités de fonctions et à la Théorie des Catastrophes.

Farouk Mangat.

15 septembre 2016

Sous la direction de Monsieur David Trotman.

Remerciements :

Je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur David Trotman pour m'avoir proposé ce passionnant travail sur la théorie des catastrophes. Sa disponibilité et sa bienveillance m'ont permis de progresser dans de très bonnes conditions et j'ai pu ainsi apprendre beaucoup notamment grâce à son article [4] dont la rédaction limpide fut d'une très grande aide.

L'étude de la théorie fut longue puisqu'il a fallu assimiler, pour ma part, de nombreuses notions nouvelles. L'étape suivante qui consiste à en faire un tout cohérent fut difficile mais enrichissante encore une fois.

Enfin, mes nombreuses lectures me laissent sur un sentiment d'inachèvement et je n'ai donc pas eu le temps de tout rédiger et il y a inéluctablement des manques que je compte combler très rapidement ; je pense bien entendu à la théorie des singularités et les nombreux résultats obtenus par les grands noms : V. I. Arnold, J. Mather, M. Morse et H. Whitney. J'en oublie certainement.

Je dédie ce travail à ma mère ainsi qu'à mon père.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction.

1.1 Apparition de catastrophes.

La théorie des catastrophes est la production du mathématicien René Thom (1923-2002).

Ce dernier a formalisé une synthèse entre la théorie des classifications des singularités génériques de fonctions $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n; m \geq 2n-1$ et $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ étudiées par Hassler Whitney (1907-1989) et la théorie de Marston Morse (1892-1977) qui permet d'étudier ces singularités pour les fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

- Morse a donné la forme normale que possède une fonction lisse en un point critique non dégénéré. De plus, on démontre grâce à la théorie développée par Thom, que ces fonctions occupent un espace non négligeable, dans un sens à définir, dans l'ensemble des fonctions lisses.

- Whitney a réussi à classer les fonctions lisses du plan dans lui-même en fonction du type de singularités et en parallèle à donner les formes normales correspondantes.

Enfin Arnold a étudié les singularités dites lagrangiennes et legendriennes. Sa classification des points critiques des applications lagrangienne va au-delà de celle de R. Thom.

La théorie des catastrophes a pour but d'expliquer les comportements discontinus observés (tels changements brutaux ou catastrophes) apparaissant dans un système à l'aide de modèles mathématiques dans lesquels on a fait varier les paramètres dits de contrôles de façon continu (on dira que l'on s'est donné une perturbation de la fonction étudiant le système).

Ces domaines d'applications ont largement dépassés ceux de la physique. Ainsi peut on voir des applications en biologie et dans les sciences sociales.

La théorie des Catastrophes est à la fois restreinte et universelle dans le sens suivant :