AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ

Etude du modèle de Broadwell

par

Zakaria Marah

Sous la direction : Mme Anne Nouri

Table des matières

Introduction

L'équation de Boltzmann est le modèle mathématique fondamental de la théorie cinétique des gaz, décrivant l'évolution temporelle de la fonction de distribution à une particule d'un gaz raréfié simple, $f = f(x, v, t)$, où $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $t \in \mathbb{R}_+$ sont respectivement la position, la vitesse des particules et le temps. Des méthodes de discrétisation ont été développées sur l'idée de remplacer l'équation de Boltzmann original par un ensemble fini de PDE hyperboliques non linéaires correspondant aux densités liées à un ensemble fini convenable de vitesses. Ce modèle discret introduit pour avoir une équation de Boltzmann relativement simple par rapport à l'équation de Boltzmann continu, plus facile à analyser d'un point de vue mathématique et numérique, certes l'étude de l'équation discrète s'est avéré aussi difficile. Un exemple qui illustre ces difficultés est le modèle bidimensionnel de Broadwell.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + f_1 f_2 = f_3 f_4, \qquad f_1(0, y) = \varphi_1(y), \tag{1}$$

$$-\frac{\partial f_2}{\partial x} + f_1 f_2 = f_3 f_4, \qquad f_2(a, y) = \varphi_2(y), \tag{2}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} + f_3 f_4 = f_1 f_2, \qquad f_3(x, 0) = \varphi_3(y), \tag{3}$$

$$-\frac{\partial f_4}{\partial y} + f_3 f_4 = f_1 f_2, \qquad f_4(x, b) = \varphi_4(y). \tag{4}$$

Ce mémoire est divisé en 4 chapitres. Le premier chapitre introduit l'équation de Boltzmann discrète. Le deuxième chapitre introduit un modèle simple et très intéressant soit dans la physique où les mathématiques a été suggéré par Broadwell (en fait, Maxwell fut le premier à étudier un modèle similaire en relation avec les équations de transport). Le troisième chapitre s'intéressera à l'existence d'une solution dans l'espace des fonction positives et continues. Enfin on étudiera le système de Broadwell dans l'espace des fonctions intégrables et positives. Dans la section dédiée aux annexes on étudie l'équation de Boltzmann continue et la solution globale proposée par Diperna et Lions.