



AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ

Etude du modèle de Broadwell

par

Zakaria Merah

Sous la direction : Mme Anne Nouri

Table des matières

1	Équation de Boltzmann discrète	5
1.1	Équation de Boltzmann discrète	5
1.1.1	Équation de Boltzmann discrète	5
1.1.2	Des hypothèses sur les probabilités de transition A_{ij}^{kl}	6
1.1.3	Équations cinétiques	7
1.2	Grandeurs macroscopique	8
1.2.1	Invariant des collisions	8
1.2.2	Les équations de conservations	10
1.2.3	Théorème H Boltzmann et état Maxwellien	12
1.3	Système normal	14
2	Modèle de Broadwell	18
2.1	Introduction	18
2.2	L'étude du modèle de Broadwell unidimensionnel	19
2.2.1	Existence globale pour des données petites	19
3	Solutions stationnaires du modèle de Broadwell bidimensionnel dans l'espace des fonctions continues positives	23
3.1	Un problème aux limites pour certaines équations différentielles ordinaires	23
3.2	L'opérateur T et ses propriétés	29
4	Solutions stationnaires au modèle bidimensionnel de Broadwell Dans l'espace fonctions intégrables positives	34
4.1	Une approximation	35
4.2	Passage à la limite quand $k \rightarrow +\infty$	43
A	Définition de l'équation de Boltzmann et étude de ses principales propriétés	60
A.1	Dérivation de l'équation de Boltzmann.	60
A.2	Limites fluides de l'équation de Boltzmann.	64
A.2.1	Variabes hydrodynamiques, ou macroscopiques	64
B	Solutions globales de l'équation de Boltzmann	67
B.1	Formulations faibles de l'équation de Boltzmann	69
B.2	la compacité faible de l'interaction normalisée	72
B.3	L^1 Moyennisation par la vitesse et ses applications	75

B.4	Super-solution.	80
B.5	Sous-solution	82
C	Compacité dans les espaces fonctionnels	85
C.1	Compacité dans les espaces des fonctions continues	85
C.2	Compacité dans les espaces L^p	86

Introduction

L'équation de Boltzmann est le modèle mathématique fondamental de la théorie cinétique des gaz, décrivant l'évolution temporelle de la fonction de distribution à une particule d'un gaz raréfié simple, $f = f(x, v, t)$, où $x \in \mathbb{R}^N$, $v \in \mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{R}_+$ sont respectivement la position, la vitesse des particules et le temps. Des méthodes de discrétisation ont été développées sur l'idée de remplacer l'équation de Boltzmann original par un ensemble fini de PDE hyperboliques non linéaires correspondant aux densités liées à un ensemble fini convenable de vitesses. Ce modèle discret introduit pour avoir une équation de Boltzmann relativement simple par rapport à l'équation de Boltzmann continu, plus facile à analyser d'un point de vue mathématique et numérique, certes l'étude de l'équation discrète s'est avéré aussi difficile. Un exemple qui illustre ces difficultés est le modèle bidimensionnel de Broadwell.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + f_1 f_2 = f_3 f_4, \quad f_1(0, y) = \varphi_1(y), \quad (1)$$

$$-\frac{\partial f_2}{\partial x} + f_1 f_2 = f_3 f_4, \quad f_2(a, y) = \varphi_2(y), \quad (2)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} + f_3 f_4 = f_1 f_2, \quad f_3(x, 0) = \varphi_3(y), \quad (3)$$

$$-\frac{\partial f_4}{\partial y} + f_3 f_4 = f_1 f_2, \quad f_4(x, b) = \varphi_4(y). \quad (4)$$

Ce mémoire est divisé en 4 chapitres. Le premier chapitre introduit l'équation de Boltzmann discrète. Le deuxième chapitre introduit un modèle simple et très intéressant soit dans la physique où les mathématiques a été suggéré par Broadwell (en fait, Maxwell fut le premier à étudier un modèle similaire en relation avec les équations de transport). Le troisième chapitre s'intéressera à l'existence d'une solution dans l'espace des fonction positives et continues. Enfin on étudiera le système de Broadwell dans l'espace des fonctions intégrables et positives. Dans la section dédiée aux annexes on étudie l'équation de Boltzmann continue et la solution globale proposée par Diperna et Lions.