

UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

– MÉMOIRE DE M2 –

Normes d'opérateurs de transition sur les graphes infinis

Quentin Pierre

Encadrant : Christophe Pittet

1^{er} Février 2018 — 31 Mai 2018

Table des matières

Introduction	2
1 Graphes	3
1.1 Définitions	3
1.2 Espace des bouts	3
1.3 Groupe des automorphismes	4
1.4 Graphes de Cayley	6
1.5 Arbres	6
2 Norme d'un opérateur de transition sur un F-ensemble dénombrable	7
2.1 Opérateur de transition	7
2.2 Action $F \curvearrowright X$ compatible avec P	8
2.3 Calcul explicite de la norme de P	9
2.3.1 Cas où l'action $F \curvearrowright X$ est transitive	9
2.3.2 Cas où l'action $F \curvearrowright X$ est quasi-transitive	15
3 Une application aux arbres homogènes	21
4 Une application à un graphe de Cayley de $PSL_2(\mathbf{Z})$	25
Bilan, perspectives	31
Remerciements	33

Introduction

Étant donné un espace dénombrable discret X muni d'une action transitive d'un groupe localement compact F , on considère une marche aléatoire sur X définie par un noyau $P(x, y)$ positif, stochastique, symétrique et F -invariant. Ce noyau induit une contraction de l'espace de Hilbert $\ell^2(X)$, i.e. un opérateur borné $P : \ell^2(X) \rightarrow \ell^2(X)$ de norme au plus 1.

En suivant les travaux de Saloff-Coste et Woess [14, 15], on construit des opérateurs de convolution sur $L^2(F)$ qui permettent d'obtenir une borne supérieure pour la norme de P , atteinte dès que F est moyennable.

Dans le cas où F agit avec un nombre fini d'orbites, on arrive à se ramener au cas précédent en construisant un espace dénombrable muni d'une action transitive de F ainsi qu'un noyau F -invariant. On obtient de nouveau une majoration de la norme de P , avec égalité si F est moyennable. Lorsque X est l'ensemble des sommets d'un graphe infini connexe localement fini Γ , l'idée est de choisir convenablement F parmi les sous-groupes fermés du groupe des automorphismes de Γ pour appliquer les théorèmes précédents.

On détaille ce procédé et les calculs qui en résultent dans deux cas : les opérateurs de marche aléatoire radiale sur un arbre homogène puis l'opérateur de moyenne sur la sphère de rayon n sur un graphe de Cayley de $PSL_2(\mathbf{Z})$.