

Ensembles Lipschitz normalement plongés

Clotilde Roule Gerbail *

2018

*sous la direction de Anne Pichon

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Singularités et ensembles Lipschitz normalement plongés	3
1.2	Résultats principaux	3
2	Ensembles Lipschitz normalement plongés	5
2.1	Définitions générales	5
2.2	Ensembles Lipschitz normalement plongés	5
3	Cônes Tangents	8
3.1	Définitions et exemples	8
3.2	Lien entre cône tangent et espace tangent	10
3.3	Définition alternative de T_0X dans le cas d'un ensemble analytique complexe.	11
4	Théorème sur les cônes tangents des ensembles Lipschitz normalement plongés et applications	12
4.1	Théorème sur les cônes tangents des ensembles Lipschitz normalement plongés	12
4.2	Applications	15
4.3	Théorème d'Arzelà-Ascoli	17
5	Transformée stricte et applications	19
5.1	Éclatement sphérique à l'origine de \mathbb{R}^n	19
5.2	La transformée stricte	21
5.3	Applications	21
6	Lemme de sélection des chemins	22
6.1	Définitions	22
6.2	Lemme de sélection des chemins	23
7	Points simples, cônes tangents réduits et k_X	24
7.1	Points simples	24
7.2	Cône tangent réduit	26
7.3	k_X , propriétés et applications	26
8	Théorème sur les cônes tangents réduits des ensembles Lipschitz normalement plongés	27
9	Théorème de caractérisations des ensembles semi-algébriques Lipschitz normalement plongés	32
9.1	Définitions préliminaires	32
9.2	Existence d'une distance semi-algébrique d_p [2]	33
9.3	Théorème de caractérisation des ensembles semi-algébriques Lipschitz normalement plongés	36
9.4	Lemme de comparaison d'ordre interne	38

1 Introduction

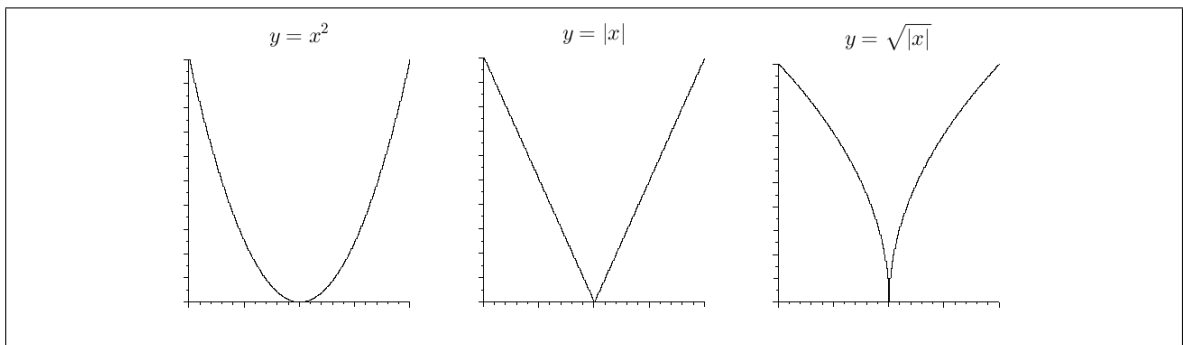
1.1 Singularités et ensembles Lipschitz normalement plongés

Dans le but de comprendre différents phénomènes physiques (formation des planètes, accouchement, éruption volcanique...), on peut les modéliser en posant des systèmes d'équations à plusieurs variables (x_1, x_2, \dots, x_n) . Les variables représentent les différents paramètres (température, vitesse, pression..) régissant l'objet étudié, tandis que les équations formalisent les liens qu'ils entretiennent. En faisant bouger les valeurs de certaines variables on obtient donc l'évolution des différentes propriétés du phénomène concerné.

La plupart du temps lorsque l'on fait une analyse locale, c'est à dire pour des petites modifications du système, l'état de celui-ci varie très peu. Il arrive cependant que pour certaines valeurs, on ait un changement brusque, par exemple une bifurcation. Cette rupture peut représenter, un changement d'état, une explosion, un changement de direction... Ce sont ces points particuliers que l'on nomme singularités, leur étude forme une branche importante des mathématiques.

Dans le travail qui suit on va s'intéresser à la classification des points singuliers qui appartiennent à des ensembles pouvant être plongés dans \mathbb{R}^n (ou \mathbb{C}^n) en fonction de leurs régularités ; on étudiera ainsi les ensembles Lipschitz normalement plongés.

Définition 1.1 (Ensemble Lipschitz normalement plongé [5]). On dit qu'un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ (ou \mathbb{C}^n) est Lipschitz normalement plongé s'il existe un homéomorphisme lipschitzien entre X muni d'une métrique interne, et X muni de la distance euclidienne. On pose l'abréviation LNE qui vient de l'anglais Lipschitz Normally Embedded.



Exemple d'une courbe régulière, une courbe LNE et une courbe non LNE

1.2 Résultats principaux

Tout au long de notre travail, on développera trois principaux théorèmes qui nous permettront notamment de trouver quels sont les ensembles Lipschitz normalement plongés.

Le premier fait le lien entre la régularité des cônes tangents d'un ensemble en un point singulier, et celle de l'ensemble étudié. Le cône tangent d'un ensemble X en un de ces points p , correspond à l'ensemble formé des produits tv où t est un nombre positif et v un vecteur qui est une direction de X en p . [5]