Ensembles Lipschitz normalement plongés

Clotilde Roule Gerbail *

2018

*sous la direction de Anne Pichon

Table des matières

1 Introduction

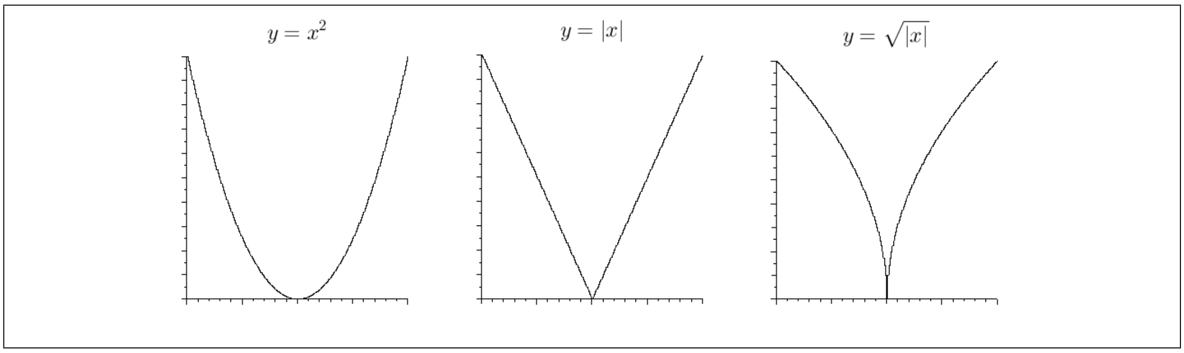
1.1 Singularités et ensembles Lipschitz normalement plongés

Dans le but de comprendre différents phénomènes physiques (formation des planètes, accouchement, éruption volcanique...), on peut les modéliser en posant des systèmes d'équations à plusieurs variables $(x_1, x_2, ...x_n)$. Les variables représentent les différents paramètres (température, vitesse, pression..) régissant l'objet étudié, tandis que les équations formalisent les liens qu'ils entretiennent. En faisant bouger les valeurs de certaines variables on obtient donc l'évolution des différentes propriétés du phénomène concerné.

La plupart du temps lorsque l'on fait une analyse locale, c'est à dire pour des petites modifications du système, l'état de celui-ci varie très peu. Il arrive cependant que pour certaines valeurs, on ait un changement brusque, par exemple une bifurcation. Cette rupture peut représenter, un changement d'état, une explosion, un changement de direction... Ce sont ces points particuliers que l'on nomme singularités, leur étude forme une branche importante des mathématiques.

Dans le travail qui suit on va s'intéresser à la classification des points singuliers qui appartiennent à des ensembles pouvant être plongés dans $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) en fonction de leurs régularités ; on étudiera ainsi les ensembles Lipschitz normalement plongés.

Définition 1.1 (Ensemble Lipschitz normalement plongé [5]). On dit qu'un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) est Lipschitz normalement plongé s'il existe un homéomorphisme lipschitzien entre X muni d'une métrique interne, et X muni de la distance euclidienne. On pose l'abréviation LNE qui vient de l'anglais Lipschitz Normally Embedded.



Exemple d'une courbe régulière, une courbe LNE et une courbe non LNE

1.2 Résultats principaux

Tout au long de notre travail, on développera trois principaux théorèmes qui nous permettrons notamment de trouver quels sont les ensembles Lipschitz normalement plongés.

Le premier fait le lien entre la régularité des cônes tangents d'un ensemble en un point singulier, et celle de l'ensemble étudié. Le cône tangent d'un ensemble X en un de ces points p, correspond à l'ensemble formé des produits tv où t est un nombre positif et v un vecteur qui est une direction de X en p. [5]