Mémoire de mastère 2 en mathématique

Présenté à la Université de Aix-Marseille
par

Mohamed Taher SAMAALI

Approximation des ensembles sous-analytiques par des cônes normaux.

30 novembre 2020

Sous la direction de Prof. David TROTMAN

Remerciement :

Mes remerciements s'adressent en premier lieu à mon directeur, Prof. David Tortman, pour sa disponibilité, ses conseils et ses aides techniques, ainsi que pour ses qualités humaines.

Je tiens aussi à remercier tous mes professeurs de l'université d'Aix-Marseille, pour cette opportunité, d'apprentissage à distance, disponibilité des enseignants et les supports pédagogiques et je salut leurs qualités scientifiques.

Je remercie également mes chers collègues et je leurs souhaite une bonne continuation.

Je souhaite ici témoigner mon affection profonde à mes parents pour leurs sacrifices et pour leurs encouragements constants tout au long de mes études.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

La théorie des ensembles semi-analytiques et sous-analytiques a été introduite par Lojasiewicz dans les travaux [10, 11, 12], ensuite pour les ensembles sous-analytiques a été élaborée par Gabrielov [13], Hironaka en [14, 15], a utilisé ses théorèmes de désingularisation et d'applatissement local pour prouver les résultats fondamentaux suivants : Soient M une variété analytique réelle et X un sous-ensemble sous-analytique de M. alors il existe une variété analytique réelle N et une application ϕ ? tel que $X = \phi(N)$.

Soit A un sous-ensemble sous-analytique fermé de $\mathbb{R}^n$. Le cône tangent $C_x(A)$ à A en un point $x \in A$ est l'union des rayons qui sont les limites des rayons de x à $x_m \in A$ lorsque x_m tend vers x. Le cône $C_x(A)$ est une bonne approximation de A près de x au sens suivant : si S_x^r désigne la sphère de rayon r centré en x, puis la distance de Hausdorff entre $A \cap S_x^r$ et $C_x(A) \cap S_x^r$ tend vers zéro aussi rapidement que r. Cela peut être interprété comme disant que si vous voyez A et $C_x(A)$ sur un écran d'ordinateur, puis après avoir effectué un zoom avant à x suffisamment de fois, A et $C_x(A)$ seront identiques.

Si X est une sous-variété contenue dans A (par exemple une strate d'une certaine stratification de A), le remplacement évident du cône tangent est le cône normal $N_X(A)$ à A le long de X. Il a une longue histoire d'utilisation pour des ensembles analytiques complexes (voir [4]) et a été étudiée dans le cas réel par Orro et Trotman (voir [6]). Nous considérons la question suivante : le cône normal approche-t-il A le long de X d'une manière analogue à celle des cônes tangents ?

Dans cette mémoire, nous nous intéressons particulièrement par l'approximation d'ordre s entre deux sous-ensembles sous-analytiques le long d'une sous-variété commune X, que nous appelons s-équivalence le long de X.

On montre que le cône normal $N_X(A)$ est 1-équivalent à A le long de X, en supposant que X est une strate d'une stratification de A satisfaisant la condition de Verdier (w). Puisque chaque ensemble sous-analytique admet une stratification (w) -régulière, ce n'est pas une forte restriction. Nous donnons des exemples montrant que l'approximation de A

par le cône normal n'est pas satisfaisante au sens décrit ci-dessus si l'on remplace l'hypothèse de (w) -régularité par des hypothèses plus faibles possibles (mais on remarque que (w) peut être remplacé par la condition de Whitney (b)). Nous montrons également que si le cône normal se rapproche de A le long de X et si X est une strate d'une stratification de A satisfaisant celle de Whitney condition (a), alors chaque fibre du cône normal est le cône tangent de la fibre de A. De plus, nous prouvons que le cône normal est un invariant complet pour les classes de 1-équivalence des ensembles sous-analytiques le long d'une strate commune. Ce résultat d'approximation est fort assez pour qu'il ne soit pas toujours possible d'approximer un ensemble analytique le long d'une sous-variété par moyen d'un algébrique.