CONTRÔLABILITÉ À ZÉRO D'UNE ÉQUATION DE LA CHALEUR DANS UN DOMAINE CYLINDRIQUE

El Hadji SAMB

MÉMOIRE DE MASTER 2
Sous le tutorat de : Assia Benabdallah

Septembre 2014

Table des matières

Résumé

La théorie du contrôle est censée modéliser des problèmes d'ingénierie. Étant donné un système physique régi par une équation d'évolution, on considère que l'on peut agir et modifier ce système, par exemple en rajoutant une source sur un sous domaine, ou en changeant l'information sur la frontière, afin de l'amener dans un état ciblé. Ainsi, nous pouvons considérer des problèmes de stabilisation de solutions stationnaires instables. Par exemple, considérons un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, un temps T et une équation d'évolution sur $u : \Omega \times (0,T) \longrightarrow \mathbb{R}^k$

$$\begin{cases} \partial_t u - Au = Bv_1 & dans\, \Omega \times (0,T) \\ \\ u = Cv_2 & sur\, \partial\Omega \times (0,T) \\ \\ u(t=0) = u_0 & dans\, \Omega \end{cases}$$

où A, B et C sont des opérateurs indépendants du temps, $u_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est la condition initiale, et les fonctions $v_1 : \Omega \times (0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v_2 : \partial\Omega \times (0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ sont les contrôles. On suppose que cette équation est bien posée pour un choix d'espaces V_1, V_2, U_0 avec $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ et $u_0 \in U_0$, la solution de cette équation décrivant alors un espace naturel U, et que sa trace $u(T)$ parcourt alors un espace U_T , la norme de sa trace dépendant continûment des données. En général, ou B ou C est l'opérateur nul : Lorsque $B = 0$, on parle de contrôle frontière, et lorsque $C = 0$, de contrôle distribué. Remarquons qu'ici, nous avons choisi une équation d'évolution avec conditions aux bords type Dirichlet, mais on aurait très bien pu choisir aussi des conditions au bord type Neumann ou même Robin.

En notant v la donnée du couple (v_1, v_2), on peut alors se poser la question suivante : Peut-on trouver un élément v, pour tout $u_0 \in U_0$, tel que la solution u vérifie $u(t = T) = 0$? Autrement dit, peut-on atteindre la trajectoire nulle en un temps T ? Cette notion de contrôlabilité est appelée "contrôlabilité à zéro", que nous nous restreindrons à étudier tout au long de ce manuscrit.

Ce mémoire fait l'étude de la contrôlabilité à zéro d'une équation de la chaleur dans un domaine cylindrique de la forme $\Omega = (0,1) \times \Omega_2$ où $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N-1}$, $N > 1$, est un domaine borné et régulier, et lorsque le contrôle est exercé sur $\{x_0\} \times \omega_2$ avec $x_0 \in (0,1)$ et $\omega_2 \subseteq \Omega_2$ un ouvert, on se trouve donc dans la situation où $B = \delta_{\{x_0\}\times\omega_2}$ et $C = 0$. Ce travail s'appuie sur un travail relativement ancien de SZYMON DOLECKI [5], qui donne une caractérisation de la contrôlabilité ponctuelle de l'équation de la chaleur monodimensionnelle. L'objectif étant maintenant d'étendre ce résultat à la dimension supérieure, en se restreignant aux ouverts cylindriques et en considérant des contrôles exercés sur une coupe horizontale.

On aura donc deux parties à traiter dans ce mémoire. On commencera par montrer la contrôlabilité du problème monodimensionnel sous conditions d'un temps minimal de contrôle. Ensuite, on essaiera d'élargir ce résultat lorsque le domaine d'étude devient un cylindre N-dimensionnel.