Aix-Marseille Université

Mémoire de Master 2ème année

Mathématiques générales.

Ensembles sous-analytiques bi-Lipschitz, leurs cônes tangents et Invariance bi-Lipschitz de la multiplicité.

Saussard Zhor Ariane

Année 2017

Sous la direction de : Mr David Trotman

I

Table de matières

Remerciements ... **4**

Introduction. ... **5**

1. Ensembles Semi-algébriques. ... **7**

1.1. Propriétés des ensembles semi-algébriques. ... 7

1.2. Décomposition cylindrique algébrique. ... 8

1.3. Le saucissonnage de Cohen. ... 9

Théorème de Tarski-Seidenberg. ... 10

2. Système de Tarski sur $\mathbb{R},+,.$ ... **11**

2.1. Propriétés du système de Tarski. ... 11

3. Ensembles semi-analytiques ... **13**

3.1 Propriétés des ensembles semi-analytiques. ... 13

4. Ensembles sous-analytiques. ... **14**

4.1. Théorème du complément pour les ensembles sous-analytiques. ... 14

Théorème Gabrielov. ... 14

4.2. Autres propriétés des ensembles sous-analytiques. ... 15

5. Ensembles globalement sous-analytiques. ... **15**

Théorème de Lou Van Den Dries. ... 16

Théorème du choix définissable. ... 16

Théorème de la monotonie. ... 16

6. Lemme de sélection de courbe ... **17**

7. Distances - Théorèmes d'extensions. ... **18**

7.1. Fonctions de distance et quasi-convexité. ... 18

Théorème de McShane-Whitney et Kirszbraun [JH]. ... 19

Théorème de Kirszbraun. ... 19

8. Fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}n$. ... **21**

Théorème de l'identité analytique. ... 24

10. Propriétés élémentaires des ensembles algébriques réels ou complexes. ... **24**

10.1. Conditions de chaine descendante. 24

Théorèmes des points non singuliers de Whitney. 25

10.2. Théorème de finitude de Whitney pour les ensembles algébriques. 28

***11. Expression algébrique des cônes tangents.* 29**

***12. Propriétés Lipschitz des cônes tangents.* 33**

Théorème de Sampaio. 33

***13. Applications.* 34**

Théorème de Prill. 35

Théorème de Koike - Paunescu. 36

***14. Multiplicité des singularités analytiques d'hypersurface sous homéomorphismes* 37**

***bi-Lipschitz.* 37**

14.1. Cône tangent. 37

14.2. Nombre de Lelong. 38

14.3. Invariance bi-Lipschitz de la multiplicité. 39

Théorème de Fernandes-Sampaio 39

***15. Transversalité* 39**

15.1. Théorème de transversalité de sous-variétés. 40

15.2. Homotopie et transversalité. 40

15.3. Nombre d'orientations d'une Application. 40

15.4. Nombre d'intersections. 40

15.5. Invariance du nombre d'intersections par rapport à L'homotopie. 40

15.7. Caractéristique d'Euler. 41

***16. Les points fixes de Lefschetz.* 41**

***17. Stratification.* 42**

17.1. Conditions de Whitney (a) et (b). 42

***18. Notion de submersion contrôlée.* 43**

Premier lemme d'isotopie de Thom. 44

Premier lemme d'isotopie relative. 44

***19. Fibration de Milnor.* 44**

Théorèmes de Milnor. 45
19.1. Nombres des cycles évanouissants. 46
19.2. Équivalence topologique. 47
Théorème Teissier- Lê. 47
19.3. Structure cylindrique à l'infini d'ensembles algébriques. 48
20. Applications du théorème de Fernandes - Sampaio. 48

Remerciements

Je tiens à remercier particulièrement mon Directeur de recherche M. David Trotman qui m'a proposé de travailler sur un thème d'actualité concernant le comportement bi-Lipschitz des ensembles sous-analytiques et la multiplicité des singularités des surface analytiques complexes en $\mathbb{C}^3$.

La disponibilité et les conseils de mon Directeur de recherche M. David Trotman m'ont permis d'élaborer des hypothèses et d'envisager des solutions.

Je remercie sincèrement M. Claudio Murolo qui tout au long de mon cursus au sein de l'Université Aix Marseille, a toujours été disponible pour m'apporter les réponses et conseils aux questions posées.

Mes remerciements s'adressent aussi à l'ensemble de l'équipe professorale pédagogique de l'Université d'Aix Marseille.

Introduction.

Dans les paragraphes, 1 et 2 nous distinguons la classe des ensembles semi-algébriques qui présente des propriétés de stabilité, dont la plus importante est celle de la stabilité par projection. Nous justifions cette propriété et ses résultats à l'aide d'un outil classique qui est « la décomposition cylindrique algébrique.»

La théorie des ensembles semi-analytiques et sous-analytiques a été développée par Łojasiewicz [Lo1], [Lo2] et [Lo3] et celle des ensembles sous-analytiques a été élaborée par Gabrielov [G], Hironaka [H1] et [H2] et Hardt [Ha1] et [Ha2].
Hironaka a, à partir de ses théorèmes de désingularisation et d'aplatissement local, élaboré et prouvé deux théorèmes fondamentaux qui sont d'une part le théorème d'uniformisation et d'autre part celui de rectilinéarisation. Ainsi, dans les paragraphes 3, 4, 5 et 6 nous observerons qu'un ensemble sous-analytique est localement une projection d'un ensemble semi-analytique relativement compact. De ce point de départ, le théorème d'uniformisation voir [H1] ou [BM] nous permet de prouver la stabilité sous-analytique par passage au complément établi par Gabrielov. Tout comme le lemme de sélection de courbe pour les ensembles sous-analytiques peut être également prouvé à l'aide de la notion de l'o-minimalité et le théorème de Lou Van Den Dries.

Dans les paragraphes 11, 12, 13, 14 et 19 nous étudierons les cônes tangents et leur comportement par une application bi-Lipschitz. Ainsi nous rappellerons la définition du cône tangent et nous mentionnerons certaines de ses propriétés. Puis, nous présenterons le résultat principal, à savoir : « si deux ensembles sous-analytiques sont homéomorphes bi-Lipschitz, leurs cônes tangents sont également bi-Lipschitz homéomorphes » Après, nous évoquerons quelques-unes des applications d'un résultat principal proposé par Sampaio et nous apporterons une preuve du résultat de Koike et Paunescue sur l'invariance bi-Lipschitz de la dimension directionnelle dans [K-P].

Fernandes et Sampaio ont apporté des réponses partielles à une version métrique de la conjecture de multiplicité de Zariski. En particulier, ils ont prouvé que la multiplicité des singularités analytiques complexes (pas nécessairement isolées) dans $\mathbb{C}^3$ est un invariant bi-Lipschitz. Ainsi, dans le paragraphe 20, nous traiterons des aspects métriques liés aux questions de Zariski mentionnées ci-dessous.

Soit $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ le germe d'une fonction holomorphe réduite à l'origine, soit $(V(f), 0)$ le germe de l'ensemble des zéros de f à l'origine. Nous rappelons que la multiplicité de $V(f)$ à l'origine notée par $\mathrm{m}(V(f), 0)$, est définie comme suite, écrivons :

$$f \;=\; f_m + f_{m+1} + \cdots + f_k + \cdots,$$

où chaque f_k est un polynôme homogène de degré k et $f_m \neq 0$, alors $m\,(V(f), 0) \coloneqq m$.

En 1971 (voir [0Z]), Zariski a proposé les problèmes suivants :

Question A *:* S'il existe un homéomorphisme $\phi : (\mathbb{C}^n, V(f), 0) \to (\mathbb{C}^n, V(g), 0)$ alors $m(V(f), 0) = m(V(g), 0)$?

Question B *:* S'il existe un homéomorphisme $\phi:(\mathbb{C}^n,V(f),0)\to(\mathbb{C}^n,V(g),0)$, alors, les cônes tangents projetés de $V(f)$ et $V(g)$ sont-ils homéomorphes ?

En 2005 (dans [B1]) Bobadilla a donné une réponse négative à la question B et a montré l'existence d'une famille de germes de fonctions

$$f_t:(\mathbb{C}^5,0)\longrightarrow(\mathbb{C},0),$$

Ces derniers présentent des singularités isolées telles que, pour $t\neq 0$, il existe un homéomorphisme

$$\varphi_t:(\mathbb{C}^5,V(f),0)\longrightarrow(\mathbb{C},V(g),0)$$

alors que les projectifs respectifs des cônes tangents ne sont pas homéomorphes.
Bien que de nombreux auteurs aient présenté plusieurs résultats partiels, cette question A reste ouverte. Pour en savoir plus sur la question de la multiplicité de Zariski, voir, par exemple, [E], [G], [Lê2] et [I].

Dans ce travail, nous traitons des aspects métriques liés aux questions de Zariski ci-dessus. Plus précisément, nous examinons les questions ci-dessous énumérées :

Question $\widetilde{A}_1$: S'il existe un homéomorphisme bi-Lipschitz
$\phi:(\mathbb{C}^n,V(f),0)\to(\mathbb{C}^n,V(g),0)$, alors $m(V(f),0)=m(V(g),0)$?
L'objectif est donc de donner des réponses positives partielles pour la question $\widetilde{A}_1$.

Question $\widetilde{A}_2$: Soient $f,g:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ deux polynômes irréductibles homogènes. S'il existe un homéomorphisme bi-Lipschitz
$\phi:(\mathbb{C}^n,V(f),0)\to(\mathbb{C}^n,V(g),0)$, alors est ce que $m(V(f),0)=m(V(g),0)$?

Le Théorème 14.8 affirme que la question $\tilde{A}_1$ apporte une réponse positive si et seulement si, la question $\widetilde{A}_2$ a un résultat positif. Nous présentons deux applications de ce théorème dans le paragraphe 20.
La première : Théorème 20.1, montre que la question $\tilde{A}_1$ a une réponse positive pour la Singularités d'hypersurface dont les cônes tangents ont tous des composantes irréductibles avec une singularité isolée en 0.
La seconde : Théorème 20.2, prouve l'invariance bi-Lipschitz de la multiplicité des singularités analytiques complexes (pas nécessairement isolées) en $\mathbb{C}^3$.