Mémoire de M2 sur les systèmes dynamiques
– 2014 –

La conjecture de Pisot en dynamique des substitutions binaires

par

Pierre TONG

Sous la direction de Pierre Liardet

Remerciements

J'ai eu le plaisir de travailler avec M. Liardet pour ce mémoire. J'ai beaucoup appris, en particulier sur la manière de transmettre aux autres les Maths que l'on connaît, en essayant de donner le plus de sens possible aux choses. Il m'a dirigé avec simplicité et bienveillance, il s'est investi avec passion malgré un contexte personnel difficile, je tenais à le remercier.

Table des matières

Introduction

Une substitution ζ sur un alphabet fini $\mathcal{A}$ fait correspondre à chaque lettre a de $\mathcal{A}$ le mot $\zeta(a)$. La substitution se prolonge naturellement aux mots finis et infinis et sous l'hypothèse naturelle que la suite des longueurs des mots $\zeta^n(a)$ tende vers l'infini, il est possible de définir une partie compacte X de l'espace produit $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, invariante pour le décalage σ sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Cette dynamique est étroitement liée à la matrice M_ζ dont le coefficient $(M_\zeta)_{a,b}$ (pour $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$) est égal au nombre de fois que la lettre a apparaît dans le mot $\zeta(b)$.
Une substitution est alors dite de Pisot si la plus grande des valeurs propres de M_ζ est strictement plus grande que 1 et toutes les autres de module strictement plus petit que 1 et strictement positif. Le système dynamique (X, σ) associé à une telle substitution peut être muni d'une (unique) mesure μ invariante par le décalage (c'est-à -dire telle que $\mu(\sigma^{-1}(B)) = \mu(B)$ pour tout borélien B de $\mathcal{B}(X)$).
La conjecture de Pisot affirme que toute substitution de Pisot est à spectre discret, c'est-à-dire que le système $(X, \sigma, \mathcal{B}, \mu)$ associé est métriquement isomorphe à une translation sur un groupe abélien compact métrisable.
Cette conjecture a été résolue principalement dans le cas d'un alphabet à deux lettres. L'objectif de ce mémoire est de présenter les notions et les résultats qui ont permis de démontrer cette conjecture dans le cas binaire.

Dans le chapitre 1, on présente les notions générales utiles dans ce mémoire. Nous commençons par présenter les notions générales relatives aux substitutions : on définit en particulier les substitutions ζ dites expansives (dont la suite des longueurs des mots $\zeta^n(a)$ tende vers l'infini pour toute lettre $a \in \mathcal{A}$), qui admettent un point cyclique u qui vérifie $\zeta^k(u) = u$ pour un certain entier k, il s'agira d'un point fixe $u = \zeta(u)$ dans certains cas (chapitre 2). On rappelle quelques généralités sur les systèmes dynamiques topologiques (X, F) (X étant un espace topologique métrisable compact), aussi appelés flots : le cas des flots (X_u, σ) construits à partir d'une suite u à valeurs dans un compact K (appelés flots orbitaux de u, suivant le décalage σ) nous intéresse tout particulièrement. La notion de minimalité d'un flot (X, F) est une propriété de densité des orbites $Orb_F(x) = \{F^n x; n \in \mathbb{N}\}$ $(x \in X)$, elle se traduit dans le cas des flots orbitaux (X_u, σ) par une propriété d'apparition des facteurs de u, propriété qui sera essentielle pour la preuve du chapitre 4. Après quelques rappels sur les mesures, nous expliquons pourquoi un flot (X, T) peut être muni d'une mesure invariante μ (nous obtenons alors un système dynamique métrique standard $(X, T, \mathcal{B}, \mu)$), nous discutons ensuite de l'unicité d'une telle mesure, notamment dans le cas des flots orbitaux. Nous finissons ce chapitre en étudiant les systèmes dynamiques $(X, T, \mathcal{B}, \mu)$ à spectre discret : le caractère discret est en fait lié à l'opérateur sur $L^2(X, \mu)$ $V_T : f \mapsto f \circ T$ et à l'existence de base hilbertienne de fonctions propres associées à V_T. On associe à chaque fonction f de $L^2(X, \mu)$ une mesure ν_f dite spectrale, on explique alors (succinctement) pourquoi un système $(X, T, \mathcal{B}, \mu)$ est à spectre discret si et seulement si les mesures spectrales sont discrètes. Cela permet ensuite de caractériser les systèmes $(X_u, \sigma, \mathcal{B}(X_u), \mu)$ à spectre discret provenant d'une suite u directement par une propriété sur la suite u.

Dans le chapitre 2, on étudie la dynamique des substitutions : on se place dans le cadre où la substitution expansive ζ donne un point fixe $u = \zeta(u)$. Elle peut a priori avoir plusieurs points fixes, et pour éviter qu'elle donne naissance à plusieurs flots, on considère les substitutions dites primitives (pour lesquelles il existe un entier k tel que pour toute lettre $a \in \mathcal{A}$, $\zeta^k(a)$ contient tout l'alphabet $\mathcal{A}$). On notera alors (X_ζ, σ) un tel système (à la place de (X_u, σ)). On démontre qu'elles sont minimales et uniquement ergodique (c'est-à-dire que le flot (X_ζ, σ) admet une unique mesure invariante par le décalage). Pour obtenir cette dernière propriété, il nous faut étudier davantage la matrice M_ζ de la substitution (définie plus haut) : on démontre le théorème de Perron-Frobenius et on tire des conséquences sur la fréquence d'apparition des lettres et des mots dans le point fixe u. Nous finissons par étudier les substitutions de Pisot mentionnées dans la conjecture.

Le chapitre 3 est consacré au théorème de M. Dekking qui caractérise les systèmes $(X_\zeta, \sigma, \mathcal{B}, \mu)$ à spectre discret associés à une substitution de longueur constante. Nous commençons par préciser le groupe des propres $\Gamma(\zeta)$. On explique pourquoi l'étude des systèmes à spectre discret nous amène à la notion fondamentale de coïncidence. Nous montrons que si ζ vérifie la condition de coincidence, alors le système $(X_\zeta, \sigma, \mathcal{B}, \mu)$ associé est discret. L'étude de la réciproque est bien plus délicate, il est nécessaire de développer la notion délicate de hauteur. Un idée essentielle du théorème de M. Dekking pour montrer l'existence de coincidence est de montrer que la densité (naturelle) d'un certain ensemble d'entiers pour lesquels la condition de coincidence n'est pas vérifiée est petite.

Dans le chapitre 4, on passe au cas général des substitutions de longueur non constante, mais on se restreint au cas Pisot sur un alphabet à deux lettres. L'utilisation de la notion de densité (naturelle) dans la preuve du théorème de M. Dekking est reprise dans ce cadre, le lien avec les systèmes à spectre discret est donné par le théorème de B. Host. Ensuite, A. N. Livshits donne une nouvelle approche de la notion de coincidence en introduisant la notion de paire équilibrée et démontre une nouvelle caractérisation des systèmes à spectre discret avec une propriété de coincidence sur des paires équilibrées. Ce résultat est en fait vrai sous une condition de finitude sur les paires équilibrées. M. Hollander et B. Solomyak montrent que cette condition de finitude est toujours vérifiée dans le cas Pisot sur un alphabet à deux lettres : on donnera la preuve de théorème. Enfin M. Barge et B. Diamond montrent que la propriété sur les paires équilibrées du théorème de A. N. Livshits est aussi toujours vérifiée dans le cas Pisot sur un alphabet à deux lettres. Tout cela permet de prouver la conjecture de Pisot dans le cas binaire.