MÉMOIRE DU MASTER IMM

Parcours Probabilités et Statistiques

MOUVEMENT BROWNIEN MATRICIEL ET LA FONCTION ZÊTA DE RIEMANN

présenté par Etty AZOULAY

sous la direction de M. Sébastien DARSES

11 septembre 2015

AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ

Table des matières

Introduction

La notion de matrices aléatoires a été introduite dans les années 1920-1930 par des statisticiens comme Wishart et a connu un nouvel essor dans les années 1950-1960 par les travaux de Wigner, Mehta et Dyson en physique nucléaire. La théorie s'est aujourd'hui considérablement développée tant par ses nombreuses applications (telles que la finance, la physique quantique, l'étude des réseaux de télécommunications...) que par ses multiples liens dans divers domaines, notamment en théorie des nombres, sous l'influence de Dyson, dans l'étude de la fonction zêta de Riemann.
Dans ce mémoire, on s'intéressera principalement aux mouvements browniens matriciels, obtenus en remplaçant les variables aléatoires des matrices aléatoires par des mouvements browniens.
Ils apportent une dimension dynamique aux études statiques de matrices aléatoires de grandes tailles.
En se basant sur l'étude des textes de Biane [1] et de Biane, Pitman et Yor [2], nous allons montrer sur quelques exemples comment le mouvement brownien et la fonction zêta de Riemann, deux domaines qui sont apparemment très éloignés l'un de l'autre peuvent en réalité entretenir des relations étroites.
Dans la 1re partie, nous donnerons une description géométrique du mouvement des valeurs propres d'un mouvement brownien avec valeurs dans certains espaces matriciels : l'espace des matrices hermitiennes, l'espace des matrices complexes inversibles et l'espace des matrices unitaires. Nous utiliserons pour cela, la transformée h - de Doob.
Dans la 2e partie, après avoir rappelé quelques résultats classiques sur la fonction zêta de Riemann, nous étudierons des notes de Pólya où il introduit une fonction proche de la fonction ξ de Riemann qui satisfait les hypothèses de Riemann.
On donnera dans la 3e partie, une interprétation probabiliste de la fonction ξ de Riemann et de la fonction de Pólya. On montrera que chacune de ces deux fonctions peut être représentée comme une transposée de Mellin et être ainsi liée à un mouvement brownien dans un des espaces symétriques étudiés à la section 1.
On donnera également dans cette partie, une interprétation probabiliste du critère de Li pour l'hypothèse de Riemann.