Programmes des UE 2018-19 du M2 CEPS.

SMACUF4T-MA-CEPS 1 (TE), intitulée "Equations aux dérivées partielles: aspects théoriques, introduction aux problèmes hyperboliques et à leur discrétisation ", enseignée par Anne Nouri.

Programme.
Le premier chapitre sera consacré à l'étude des espaces de Sobolev en dimension 1. On étudiera en particulier les espaces H^1, H^2, les injections de Sobolev, les résultats de densité et de prolongement, et les règles de dérivation au sens faible.
Le deuxième chapitre portera sur la résolution des problèmes elliptiques par des méthodes variationnelles. On rappelera les notions de produit scalaire, d'espace de Hilbert, ainsi que le théorème de projection sur un convexe fermé. On fera appel au théorème de Lax-Milgram.
Le troisième chapitre sera dédié aux équations de transport. Après quelques exemples, on étudiera les équations de transport à coefficients constants (solutions fortes et faibles). On considérera également les équations de transport à coefficients variables, en introduisant la notion de flot caractéristique. On étudiera les solutions fortes et faibles, dans le cadre L^p, en faisant appel à la méthode des caractéristiques.
Le quatrième chapitre introduira les équations aux dérivées partielles et systèmes d'équations aux dérivées partielles hyperboliques. On étudiera les solutions classiques et leurs courbes caractéristiques, les solutions faibles et les conditions de Rankine Hugoniot. On déterminera les solutions faibles entropiques, ainsi que leurs propriétés et caractérisations.
Le cinquième chapitre sera consacré aux schémas numériques pour les équations scalaires hyperboliques en une dimension d'espace. On introduira des schémas à flux monotones et on mettra en évidence de la diffusion numérique. On esquissera la convergence d'approximations à variations bornées. On donnera des éléments sur des schémas numériques d'ordre supérieur, type "MUSCL". Dans le cas d'équations scalaires sur un ouvert borné, on prendra en compte des conditions aux limites. On terminera par des éléments sur des schémas numériques pour des équations hyperboliques scalaires multi-dimensionnelles.

SMACUF5T-MA-CEPS 2 (TE), intitulée "Equations aux dérivées partielles: aspects numériques, calcul scientifique ", enseignée par Philippe Angot.

Programme.
La partie "Equations aux dérivées partielles: aspects numériques" de ce cours sera constituée de deux parties. Dans une première partie on présentera le principe général des méthodes de Galerkin pour la résolution d'équations aux dérivées partielles elliptiques linéaires; on commencera par introduire formellement les espaces de Sobolev multi-dimensionnels, puis la formulation variationnelle approchée (bien posée) qui se ramène à la résolution d'un système linéaire avec de bonnes propriétés, et le lemme de Céa. On verra enfin que la question centrale reste celle de l'approximation d'une fonction dans l'espace de dimension fini choisi. On étudiera ensuite en détail le cas d'éléments

finis P1 1D. On commencera par voir comment l'usage des fonctions de forme permet d'obtenir dans ce cas un système tridiagonal. On établira des estimations d'erreurs en norme H^1 puis en norme L^2 grâce au problème dual. On implémentera ces éléments finis P1 1D et on tracera les courbes d'erreurs correspondantes. On présentera ensuite un ou plusieurs exemples plus complexes, différentes conditions aux bords, le cas P2 1D...
Dans une seconde partie on s'intéressera à la discrétisation de l'équation de transport 1D. On commencera par l'étude des schémas aux différences finies centrés dans le cas d'une vitesse et d'une condition initiale régulières, puis décentrés, de la convergence du schéma décentré amont et de la non-stabilité au sens de Von Neumann des autres schémas. On s'intéressera ensuite au cas d'une vitesse constante et d'une donnée initiale L^∞ et on étudiera la convergence du schéma volume fini décentré amont : estimations uniformes et variation bornée faible, compacité faible * séquentielle , et enfin convergence.

La partie "Calcul scientifique" de ce cours sera centrée sur l'étude d'équations en une dimension d'espace: retours/compléments sur l'équation de transport (stabilité de Von Neumann, décentrement, condition CFL), équation d'advection-diffusion stationnaire ou instationnaire. Ce sera l'occasion de découvrir ou d'approfondir certaines propriétés des schémas numériques (stabilité, convergence,. . .) qui n'auront pas été traitées dans les autres cours. Les schémas seront essentiellement des schémas de type volumes finis. Une grande partie du temps sera consacrée à l'élaboration de la démarche de calcul scientifique : cas-tests académiques pour validation, courbes d'erreur, avant des tests dans des cas plus généraux. Les schémas seront programmés sous Scilab/Mathlab.

SMACUF6T-MA-CEPS 3 (TE), intitulée "Equations aux dérivées partielles avancées, équations cinétiques et applications pour Iter ", enseignée par Mihai Bostan.

Programme.
La modélisation mathématique de phénomènes complexes en physique, mécanique, biologie, etc, s'effectue au moyen d'équations aux dérivées partielles (edp). L'objectif de ce cours est de se familiariser avec les équations aux dérivées partielles les plus connues. Nous aborderons les équations de transport, les équations de Laplace et de Poisson, ainsi que les équations paraboliques (équations de la chaleur, de réaction-diffusion). Les pré-requis pour ce cours sont d'un niveau relativement modeste. Il s'agit principalement de formules d'intégration par parties (Gauss- Ostrogradski, Green), qui sont rappelées dans l'introduction.
Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des équations de transport. Ce sont des edp du premier ordre, intervenant dans le trafic routier, les modèles cinétiques des gaz, la biologie, etc. On traite les solutions fortes/faibles et on distingue les cas à coefficients constants et variables. On établit le caractère bien posé de ce problème par la méthode des caractéristiques, dont l'outil principal est la notion de flot caractéristique. Une application importante porte sur les équations cinétiques. Il s'agit d'étudier la dynamique d'une population de particules chargées, sous l'action d'un champ électromagnétique donné. Afin d'étudier la fusion par confinement magnétique, on s'intéresse au comportement de la densité de présence des particules dans l'espace des phases, lorsque le champ magnétique devient très intense. On sépare les échelles de temps, et on en déduit des approximations (dites gyrocinétiques), en moyennant par rapport au mouvement rapide de rotation autour des lignes de champ magnétique.
Dans le troisième chapitre on étudie les équations de Laplace et de Poisson. Ce sont des edp linéaires du deuxième ordre qui modélisent des phénomènes d'équilibre : potentiel électrostatique, membrane en équilibre, champ gravitationnel. Dans un premier temps on considère les solutions fortes (classiques). Dans un deuxième temps on s'intéresse aux solutions faibles, en introduisant les

espaces de Sobolev et en faisant appel à la théorie variationnelle (Lax-Milgram).
Dans le quatrième chapitre on s'intéresse à l'équation de la chaleur, qui modélise des phénomènes d'évolution: propagation de la chaleur, répartition de substances chimiques, mélanges d'espèces, etc. On étudie la solution fondamentale, on justifie l'existence de solution classique pour le problème de Cauchy dans l'espace tout entier, on établit la formule de la moyenne pour l'équation de la chaleur (sur les boules dites de chaleur) et on en déduit le principe du maximum.

SMACUF7T-MA-CEPS 4 (TE), intitulée "Statistique mathématique et méthodes d'ondelettes ", enseignée par Jean-Marc Freyermuth et Oleg Lepski.

Programme.
1) Estimation d'une densité de probabilité en un point fixé et dans la norme $\mathbb{L}_p, 1 \leq p \leq \infty$ sur la classe de Nikol'skii. Méthode à noyau. Estimation d'une densité multivariée.
2) Modèle du bruit blanc gaussien. Estimation d'un signal dans $\mathbb{L}_2$ sur la classe de Sobolev. Méthode par projection. Estimation d'un signal dans $\mathbb{L}_p, 1 \leq p \leq \infty$ sur la classe d'Hölder. Méthode polynomiale par morceaux.
3) Bornes inférieures pour les risques minimax.
4) Analyse multirésolution, base de Haar, construction de bases d'ondelettes.
5) Inconditionalité et représentation parcimonieuses de classes de fonctions usuelles.
6) Application pour l'estimation dans le modèle du bruit blanc Gaussien, résultats d'optimalité de type maxiset, illustration in silico et sur données réelles avec python.

SMACUF8T-MA-CEPS 5 (TE), intitulée "Modèles markoviens, mouvement brownien et laplacien", enseignée par Sebastian Mueller.

Programme.
Le début du cours est consacré à l'étude de chaînes de Markov discrètes et leur comportement asymptotique, à travers de nombreux exemples. On introduira le mouvement brownien via les marches aléatoires, donnera sa définition mathématique rigoureuse et ses premières propriétés. On continuera l'étude des propriétés du mouvement Brownien (régularité des trajectoires, temps de sortie,$\cdots$). Le cours se terminera avec l'étude du lien du mouvement Brownien avec le laplacien.

SMADU69T-MA-CEPS 6 (TE), intitulée "Calcul stochastique, méthodes numériques probabilistes et applications aux mathématiques financières", enseignée par Sébastien Darses.

Programme.
Ce cours s'inscrit dans la continuité du cours "Modèles markoviens, mouvement brownien et laplacien". On révisera rapidement le Mouvement Brownien, comme objet prototype des processus gaussiens, processus de Markov et Martingales. On étendra le calcul stochastique aux martingales, on introduira et étudiera les équations différentielles stochastiques, les processus de diffusion, la représentation de solutions d'EDP paraboliques et le théorème de Girsanov. On abordera des applications en Mathématiques financières, par exemple la théorie de réplication des options, pour lesquelles on étudiera des méthodes numériques probabilistes pour des simulations et des calculs de call. On s'appuiera également sur le livre de Comets Meyre : Calcul stochastique et modèles de diffusion.