Projet Bords des groupes et marches aléatoires

Equipes impliquées dans le projet.

Pierre Arnoux, Professeur, Systèmes dynamiques, IML.
Xavier Bressaud, Maître de Conférence, Systèmes dynamiques, IML.
Jean Yves Briend, Maître de Conférence, Analyse, LATP.
Peter Haissinsky, Maître de Conférence, Analyse, LATP.
Pascal Hubert, Maître de Conférence, Systèmes dynamiques, IML.
Jérôme Los, Directeur de Recherche, Topologie, LATP.
Martin Lustig, Professeur, Algèbre, LATP.
Pierre Mathieu, Professeur, Probabilités, LATP.
Lawrence Reeves, Maître de Conférence, Algèbre, LATP.
Hamish Short, Professeur, Topologie, LATP.
Marina Talet, Maître de Conférence, Probabilités, LATP.
Sandro Vaienti, Professeur, Systèmes dynamiques, CPT.

Doctorants.

Waldemar Barrera, Algèbre, LATP.
Pierre Bejian, Algèbre, LATP.
Erwan Lanneau, dynamique, IML.
Samuel Lelievre, dynamique, IML.
Thierry Monteil, dynamique, IML.
Eric Pereyrol, Topologie, LATP.

visiteurs longue durée.

Ryuji Abe (Japon), dynamique, IML.
Won Taek Song (Corée), Topologie, LATP.

Historique.

Le projet *Bords des groupes et marches aléatoires* a maintenant plus d'une année d'existence, il regroupe des chercheurs issus de 5 équipes (Algèbre, Analyse, Dynamique, Probabilité, Topologie) disséminés dans les trois Universités Marseillaises. Nous avons fonctionné jusqu'à maintenant sans moyens propres, en profitant de certains invités des différents laboratoires (F.Ledrappier, C.Pittet, A.Vershik, A.Zuk entre autres) et également d'une aide de l'école doctorale de Mathématiques grâce à qui nous avons pu inviter Vadim Kaimanovich (Rennes) pour un cours dense d'une semaine. Cette semaine intensive où il y avait entre 12 et 20 personnes présentes à chaque séance fut une réelle réussite. Cette expérience fut une confirmation que notre groupe de travail avait franchi un cap et que nous étions en passe de devenir une véritable équipe de recherche.

Le groupe de travail a débuté en Octobre 2001 suite à des discussions informelles nées de la rencontre *"2001 l'Odysée dynamique"*, en particulier avec A.Vershik. Initialement certains d'entre nous avions des questions générales sur des cas particuliers (marches aléatoires sur les groupes des tresses, croissance optimale sur certains groupes hyperboliques, dynamique symbolique sur le bord des groupes hyperboliques, marches aléatoires dans un milieu aléatoire). Nous avons appris depuis que ces questions sont toujours d'actualité. Au début le groupe s'est formé comme un groupe de discussions qui s'est très vite structuré en groupe de travail où nous avons appris, les uns et les autres, un sujet commun en apportant chacun nos motivations et nos connaissances. C'est cette diversité des membres du groupe de travail qui a fait et continue de faire la richesse et l'intérêt de cette équipe. L'étude des bords des groupes requiert de nombreuses compétences mathématiques: géométrie des groupes, probabilités, systèmes dynamiques, analyse dans les espaces métriques, théorie ergodique....

Le groupe s'est réunis chaque semaine, les vendredis après midi, dans les locaux mis a notre disposition par la FRUMAM sur le campus de Saint Charles. Chacun de nous a l'impression de vivre une expérience mathématique rare dans une ambiance de travail dynamique et pleine d'enthousiasme. Le groupe de travail est placé sous l'égide de la FRUMAM,

Aujourd'hui les projets de recherche précis existent et les collaborations sont en cours, aussi bien entre les membres de l'équipe qu'avec des experts extérieurs (A.Vershik, V.Kaimanovich, C.Pittet, A.Fisher, G.Arzhantseva, J.Burillo).

Présentation scientifique.

La théorie des marches aléatoires sur les groupes a été initiée par H.Kesten en 1959. Un des premiers résultats importants fut la caractérisation des groupes transients qui s'appuie à la fois sur la classification des groupes à croissance polynomiales de Gromov (1981) et sur le développement de nouveaux outils d'analyse dû a N.Varopoulos (1980-1985). Une marche aléatoire sur le graphe de Cayley d'un groupe de type fini permet de définir différentes notions de bords (Martin, Poisson). Cette idée apparaît déjà dans les articles pionniers de H.Furstenberg (1963) et de V.Kaimanovich-A.Vershik (1983). Dans certains cas, le groupe possède un bord topologique, la situation typique étant celle des groupes hyperboliques au sens de Gromov. Pour ces groupes, le bord topologique s'identifie avec le bord de Martin (A.Ancona 1987) et l'étude des propriétés du bord peut se faire soit par des méthodes topologiques soit par des méthodes d'analyse harmonique et de la théorie géométrique des fonctions.

L'un des grands interêts de l'approche probabiliste (pour la géométrie des groupes) vient du fait que, dans de nombreux cas, elle permet de définir un bord alors que la géométrie ne le permet pas.

Un exemple important et qui intéresse plusieurs membres de l'équipe est donné par les groupes modulaires des surfaces (mapping class groups) et par leur action sur les espaces de Teichmüller associés. Dans ce cas, le bord de Poisson s'identifie avec le bord de Thurston (V.Kaimanovich-H.Masur 1996) or les espaces de Teichmüller et les groupes modulaires ne sont pas hyperboliques.

Cet exemple nous incite à étudier d'autres cas analogues comme le groupe des automorphismes des groupes libres et l'action sur l'espace de Culler-Vogtmann. Il nous montre également des pistes possibles vers une classe de groupes plus large que celle des hyperboliques, lorsque les comportements à l'infini ressemblent "presque partout" à un comportement hyperbolique.

Par ailleurs, même dans le cadre strictement hyperbolique la géométrie du bord reste encore mystérieuse ainsi que la dynamique de l'action du groupe. Cette dynamique, par homéomorphismes quasi-conformes est bien comprise dans le cas des variétés (G.Mostow, G.Margulis, S.Patterson, D.Sullivan, C.McMullen) et ce, grâce aux structures analytiques. En revanche, pour les groupes hyperboliques généraux, par exemple lorsque le bord est une courbe de Menger, les structures métriques et dynamiques sont très mal comprises. Nous avons espoir que l'approche probabiliste puisse éclairer la géométrie dans ce contexte.

Il est encore trop tôt pour affirmer que notre groupe a effectivement produit des résultats mathématiques nouveaux mais le dynamisme et l'enthousiasme sont tels que nous n'avons aucun doute que les premiers résultats ne tarderont pas à être au rendez vous.

Perspectives.

Le premier objectif atteint est l'élaboration d'un langage commun qui prend en compte la diversité des origines des différents membres. Un premier article doit être mis a l'actif du groupe, dans le sens où il n'aurait probablement pas existé sans nos discussions collectives: il s'agit de l'article [Arzhantseva, Burillo, Lustig, Reeves, Short, Ventura: uniform non-amenability] à propos des ensembles de Følner pour des groupes non moyennables.

Nous souhaiterions également inviter, pour des exposés ponctuels ou pour de courts séjours, certains experts. Parmi les personnes se trouvant en France (ou dans les environs): M.Gromov (IHES), A.Erschler (IHES), G.Alexopoulos (Orsay), A.Valette (Neuchatel), A.Karlsson (Neuchatel), S.Nechaev (Orsay), W.Woess (Graz) ...

Finalement, nous proposons d'organiser des rencontres régulières en collaboration avec le projet 'GAP', géométrie, algèbres d'opérateurs et physique. Ces actions communes prendront la forme de journées thématiques ou de séminaires communs qui s'adresseront autant aux membres des deux groupes qu'à l'ensemble de la communauté mathématique de Marseille. Différents thèmes sont possibles: géométrie des groupes, mécanique statistique, probabilités libres, tresses, percolation ...

Quelques projets.

- Marches aléatoires sur les groupes des automorphismes des groupes libres de rang fini.
- Suites infinie d'homéomorphismes pseudo-Anosov des surfaces et convergence vers le bord de Thurston.
- Marches aléatoires sur les groupes automatiques, sur les groupes CAT(0)...
- Croissance des ensembles de Følner.
- Mesures de Patterson-Sullivan et mesures harmoniques.
- Groupes relativement hyperboliques ou groupes presque partout hyperboliques.
- Dynamique sur le bord et formes normales stables.