CURRICULUM VITAE

Pierre MATHIEU

Né le 18-06-66, à Toulouse.
Nationalité Française.
Divorcé, trois enfants.

Adresse: Centre de Mathématiques et d'Informatique
39, rue Joliot-Curie
13453 Marseille Cedex 13
Mail: pierre.mathieu@cmi.univ-mrs.fr
Page Web: http://www.cmi.univ-mrs.fr/∼ pmathieu/

Position actuelle:

Professeur à l'université de Provence, depuis octobre 2000.
Membre junior de l'Institut Universitaire de France.

Etudes:

1986-1991: étudiant à l'Ecole Normale Supérieure (Ulm, Paris).

1992-1993: post-doc à l'Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Rio de Janeiro), sous la direction de M.E. Vares.

1993-2000: chargé de recherche CNRS à l'UMR 6632, LATP, Marseille.

1999-2000: mis à disposition à IME, Université de São Paulo.

Diplômes:

DEA de Mathématiques en juin 1988 sous la direction de Pr. F. Ledrappier.

Doctorat de l'Université Paris VI sous la direction du Pr. M. Yor, soutenu le 10 janvier 1992 devant le jury: J. Azéma (*président*), J. Bertoin (*rapporteur*), R. Gundy, Th. Jeulin, J.F. LeGall, J. Rosen (*rapporteur*), M. Yor.

Thèse d'habilitation à diriger des recherches, soutenue à l'Université de Provence le 3 juin 1999 devant le jury: E. Andjel, D. Bakry (*rapporteur*), F. Comets, C.M. Newman (*rapporteur*), E. Olivieri, E. Pardoux (*rapporteur*), A.S. Sznitman (*président*).

PUBLICATIONS

[1] (avec M. Arnaudon) *Décomposition d'une martingale à valeurs dans un groupe muni d'une métrique bi-invariante en produit de deux mouvements browniens.* Séminaire de Probabilités **26**, LNM 1526, Springer Verlag, **1992**.

[2]*Inégalités en norme L_p pour le produit des supremas de plusieurs martingales arrêtées à des temps aléatoires. Inégalités avec poids.* Annales de l'Institut H.Poincaré. Série Probabilités *29.* n 4, 467-484, **1993**

[3]*Construction et renormalisation des temps locaux d'intersection de deux mouvements browniens plans.* Stochastics and Stochastic Reports. **46**, 117-140, **1994**

[4]*Inégalités Barlow-Yor pour les temps locaux d'intersection de deux mouvements browniens plans.* Probability Theory and Related Fields, **102**, 83-104, **1995**.

[5]*Zero-white-noise limit through Dirichlet forms, with application to diffusions in a random medium.* Probability Theory and Related Fields, **99**, 549-580, **1994**

[6]*Spectra, exit times and long time asymptotics in the zero-white-noise limit.* Stochastics and Stochastic Reports, **50**, 1-20, **1995**.

[7]*Limit theorems for diffusions with a random potential.* Stochastic Processes and their Applications, **60**, 103-111, **1995**.

[8] *On random perturbations of dynamical systems and diffusions with a Brownian potential in dimension one.* Stochastic Processes and their Applications, **77**, 53-67, **1998**.

[9] *Hitting times and spectral gap inequalities.* Annales de l'Institut H.Poincaré. Série Probabilités, **33**, n 4, 437-465, **1997**

[10] *Inégalités de Sobolev et temps d'atteinte.* Potential Analysis, **9**, no 3, 293-300, **1998**.

[11] *Quand l'inégalité Log-Sobolev implique l'inégalité de trou spectral.* Séminaire de Probabilités **32**, LNM 1686, Springer Verlag, 30-35, **1998**.

[12] (avec P. Picco) *Metastability and convergence to equilibrium for the random field Curie-Weiss model.* Journal of Statistical Physics, **91**, 679-732 **1998**.

[13] (avec L.R. Fontes et P. Picco) *On the averaged dynamics of the random field Curie-Weiss model.* Annals of Applied Probability, **10**, no 4, 1212-1245, **2000**.

[14] *Sur la convergence des marches aléatoires dans un milieu aléatoire et les inégalités de Poincaré généralisées.* CRAS Paris, **t. 329, série I**, 1015-1020 **1999**.

[15] *Convergence to equilibrium for spin glasses.* Communications in Mathematical Physics, **215**, 57-68, **2000**.

[16] *Dirichlet processes associated to diffusions.* Stochastics and Stochastic Reports, **71**, 165-176, **2001**.

[17] (avec E. Remy) *Décroissance du noyau de la chaleur et isopérimétrie sur un amas de percolation.* CRAS Paris, **t. 332, série I**, 927-931 **2001**.
Isoperimetry and heat kernel decay on percolation clusters. Annals of Probability, **32; 1A**, 100-128, **2004**.

[18] *Log-Sobolev and spectral gap inequalities for the knapsack Markov chain.* Markov Processes and Related Fields, **8**, 595-610, **2002**.

[19] (avec K. Dupoiron et J. San Martin) *Formule d'Itô pour des diffusions uniformément elliptiques, et processus de Dirichlet.* Potential Analysis, **21**, 7-33, **2004**.

[20] (avec L.R. Fontes) *Convergence to equilibrium and decay of the kernel of random walks with random rates in* Z^d. Probability Theory and Related Fields, **134; 4**, 565-602, **2006**.

[21] *Carne-Varopoulos bounds for centered random walks.* Annals of Probability, **34; 3**, **2006**.

[22] (avec A. Piatnitski) *Quenched invariance principles for random walks on percolation clusters.* Proceedings A of the Royal Society, **vol. 463**, 2287-2307, **2007**.

[23] (avec L.R. Fontes) *K-processes, scaling limit and aging for the Bouchaud trap model.*
Annals of Probability.

[24] (avec S. Blachère et P. Hassinsky) *Asymptotic entropy and Green speed for random walks on groups.* Annals of Probability.

[25] (avec A. Faggionato) *Mott law for Mott variable-range random walk.* Communications in Mathematical Physics.

[26] *Quenched invariance principles for random walks with random conductances.* Journal of Statistical Physics.

Non publié:

[a] (avec P. Picco) *Convergence to equilibrium for finite Markov processes, with application to the Random Energy Model.* Preprint. www.cmi.univ-mrs.fr/ pmathieu/.

PARTICIPATIONS A DES CONGRES

SINAPE, Rio de Janeiro, août 92

Congrés des jeunes probabilistes, Aussois, 27-31 mars 94. Organisateurs: J. Bertoin. J-F LeGall. Titre: *comportement asymptotique d'une diffusion quand le bruit blanc tend vers zéro.*

Conference on advanced topics in applied mathematics and theoretical physics-complex systems: classical and quantum aspects, CIRM, Marseille, 13-17 juin 94. Organisateurs: P. Picco. Titre: *Zero white noise limit for diffusions in a Brownian medium.*

Journées de Probabilités, CIRM, Marseille, 26-30 septembre 94. Organisateurs: J. Azéma. M. Yor. Titre: *Diffusions dans un milieu brownien.*

Systèmes aléatoires inhomogènes, grandes déviations et limites hydrodynamiques. Ecole polytechnique, Paris, 24 janvier 96. Organisateurs: F. Dunlop, T. Gobron, E. Saada. Titre: *Diffusion dans un milieu aléatoire en dimension 1.*

Journées de Probabilités, CIRM, Marseille, 9-13 septembre 96. Organisateurs: J. Azéma, M. Yor. Titre: *Inégalités fonctionnelles et temps d'atteinte.*

Stochastic analysis, random fields and applications. Ascona, 16-21 septembre 96. Organisateurs: R. Dalang, M. Dozzi, F. Russo. Titre: *One dimensional diffusions in a random potential.*

Journées SMAI, Modélisation aléatoire et statistique. Toulouse, 23-25 septembre 96. Organisateur: D. Michel. Titre: *Diffusions dans un potentiel aléatoire en dimension* 1.

Journées Barcelone-Marseille-Toulouse. Aniane novembre 96. Organisateur: D. Bakry. Titre: *Sur le modèle de Curie-Weiss avec champ extérieur aléatoire.*

Colloque Log-Sobolev et les systèmes de particules en interaction. Inst. H.Poincaré, 4-5 juin 1998. Organisateurs: F. Comets, L. Saloff-Coste. Titre: *Sur le modèle de Curie-Weiss aléatoire.*

First Latin American Congress of Mathematics. IMPA, Rio de Janeiro, 31 juillet-4 août 2000. Organisateurs: Umalca. Titre: *Convergence to equilibrium for spin glasses.*

Workshop Random Walks and Geometry. Erwin Schroedinger Insitute, Vienna, 18 juin-13 juillet 2001. Organisateurs: V. A. Kaimanovich, K. Schmidt, W. Woess. Titre: *Log Sobolev and spectral gap inequalities for the knapsack problem.*

Journée 'Milieu aléatoire'. Université Paris 6, Paris, 16 octobre 2001. Organisateurs: J. Bertoin, F. Comets. Titre: *Décroissance du noyau de la chaleur sur un amas de percolation.*

Colloque Analysis on Graphs and on Metric Spaces. Inst. H.Poincaré, 26-28 juin 2002. Organisateurs: P. Auscher, G. Besson, Th. Coulhon, A. Grigor'yan. Titre:*Isoperimetry and heat kernel decay on percolation clusters.*

Colloque Stochastic Analysis. Oberwolfach, 27 octobre-02 novembre 2002. Organisateurs: G. Ben Arous, JD. Deuschel, O. Zeitouni. Titre:*Dirichlet processes and diffusions.*

Conference on Random Walks in Random Environment. Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, UK, 18-22 August 2003. Organisateurs: E. Bolthausen, A. Sznitman. Titre:*Decay of the return probability for symmetric RWRE.*

Colloque Journées de Probabilités. Laboratoire de Statistique et Probabilités, Université Paul Sabatier Toulouse, 8-12 septembre 2003. Organisateurs: J. Azéma, M. Emery, M. Yor. Titre:*Bornes de type Carne-Varopoulos pour les marches aléatoires centrées.*

Premier congrès Canada-France des sciences mathématiques. Toulouse 12-15 juillet 2004. Organisateurs: sociétés mathématiques du Canada et de la France. Titre:*Centered Markov chains.*

Workshop on stochastic analysis and non-classical random processes. Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, 8-14 mai 2005. Organisateurs: J-D. Deuschel, W. Werner, O. Zeitouni.
Titre:*Quenched invariance principles for random walks on percolation clusters.*

Congrès sur l'homogénéisation en milieu aléatoire. Marseille CIRM, 11-15 juillet 2005. Organisateurs: E. Pardoux, T. Souganidis, S. Olla. Titre:*Quenched invariance principles for random walks on percolation clusters.*

Workshop on heat kernels, stochastic processes and functional inequalities. Math. Forschungsinstitut Oberwolfach, 27 novembre-3 décembre 2005. Organisateurs: Th. Coulhon, B. Franchi, T. Kumagai, K-Th. Sturm. Titre:*On the range of random walks on percolation clusters.*

RDSES/ESI Educational Workshop on Discrete Probability, Erwin Schrodinger Institute, Vienna, March 12-25, 2006. Organisateurs: V. A. Kaimanovich, K. Schmidt, W. Woess. Titre:*Random walks on hyperbolic groups: harmonic vs quasi-conformal measures.*

69th IMS Annual Meeting, Instituto Nacional de Matematica Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, July 30 - August 4, 2006. Titre:*Random walks on percolation clusters.*

Conference on the occasion of Harry Kesten's Doctorate Honoris Causa of the Université Paris-Sud, Institut Henri Poincaré, Paris, 13 - 15 juin 2007. Organisateur: W. Werner. Titre:*Random walks with random conductances*

London Mathematical Society Durham Symposium: Recent Developments in Random Walks, 2nd July - 12th July 2007. Organisateurs: Ben Hambly, Laurent Saloff-Coste, Pierre Tarrès. Titre:*Random walks with random conductances.*

INVITATIONS

24-29 octobre 94 à Rome, "La Sapienza".

06 février-10 avril 95 à l'IMPA (Rio de Janeiro).

01-31 octobre 96 à l'Institute for Information-Transmission Problems (Moscou).

31 avril-11 mai 1997 à l'université de Rome "La Sapienza".

26-29 mai 1997 au laboratoire de physique théorique de l'Ecole Normale Supérieure.

18 juillet-15 aout 1997 au Lebedev Physical Institute (Moscou).

1 novembre-2 décembre 1997 à l'Institut de Mathématiques et Statistiques IME-USP, de l'université de São Paulo.

15 septembre 1999-15 juillet 2000 mis à disposition de l'Institut de Mathématiques et Statistiques IME-USP, de l'université de São Paulo.

9 décembre 1999-30 janvier 2000 à l'université du Chili, Santiago.

24 avril-25 mai 2002 à l'Institut de Mathématiques et Statistiques IME-USP, de l'université de São Paulo.

19 mai-23 mai 2003 à l'ETHZ, Zurich.

19 juin-9 juillet 2003 à l'Institut de Mathématiques et Statistiques IME-USP, de l'université de São Paulo.

01 novembre-12 novembre 2003 à l'université de Narvik (Norvège).

01 décembre-12 décembre 2004 à l'université de Narvik.

20 juillet-14 aout 2006 à l'Institut de Mathématiques et Statistiques IME-USP, de l'université de São Paulo.

19 octobre-30 octobre 2006 à l'université de Narvik.

19-28 mars 2007 à Eurandom.

ORGANISATION DE COLLOQUES ...

Organisation du colloque *Homogénéisation et milieux aléatoires*, à la mémoire de Serguei Kozlov, CIRM 24-26 juin 1996, en collaboration avec A. Bourgeat et E. Pardoux.

Organisation du colloque *Statistical mechanics and probability theory*, CIRM mars 2003, avec A. Messager (CPT), S. Miracle-Sole (CPT), E. Pardoux (LATP), P. Picco (CPT), C.-A. Pillet (CPT - Univ. de Toulon), S. Shlosman (CPT) et Y. Velenik (LATP).
http://www.cpt.univ-mrs.fr/ smptcirm/

Responsable du projet PICS-CNRS:*Homogénéisation, moyennisation et milieux aléatoires. Méthodes probabilistes et applications.* Responsable du projet à Moscou: A. Veretennikov.

Organisation du colloque *Random walks on groups*, CIRM février 2007, avec V. Limic et Ch. Pittet (LATP), dans le cadre de la session résidentielle *Géométrie des groupes.*

ENCADREMENT

J'ai encadré le mémoire de DEA d'Y. Vignaud soutenu le 23 janvier 2003 à l'ENS Lyon.

J'ai encadré la thèse de C. Rau soutenue en novembre 2006 sur *marches aléatoires sur un amas de percolation.*
.

Pierre MATHIEU

PRESENTATION DE L'ACTIVITE DE RECHERCHE

Introduction

Mon travail concerne l'étude quantitative de processus stochastiques, diffusions ou marches aléatoires dans un mileu aléatoire.

De façon générale, les processus de Markov sont utilisés en physique théorique pour rendre compte du mouvement désordonné d'une particule dans un phénomène de diffusion, par exemple la diffusion de la chaleur. L'exemple le plus connu est le mouvement brownien qui représente la dispersion de particules de pollen dans un liquide tel qu'il fut observé par Robert Brown en 1830 avant d'être longuement étudié dans une série d'articles d'Albert Einstein.

D'un point de vue plus mathématique, à tout espace d'états muni d'une structure géométrique convenable on peut attacher un processus stochastique qui donne en fonction des deux paramètres: temps et hasard, la position d'une particule. L'espace d'états peut être continu ou un graphe discret.

Les questions qui se posent concernent le comportement asymptotique en temps long. Il va de soi que les résultats dépendent de la géométrie de l'espace d'états. Si celui-ci est fini, on observe la convergence vers une situation d'équilibre stationnaire et alors on s'interroge sur le temps nécessaire pour obtenir un tel équilibre. En revanche, si l'espace d'états est infini, la particule peut partir à l'infini et ici aussi la question est de savoir à quelle vitesse.

On dispose d'outils mathématiques pour aborder ces problèmes dans le cas d'un espace d'états assez homogène, par exemple le graphe de Cayley d'un groupe discret: analyse de Fourier, inégalités fonctionnelles variées. Cependant ces dernières années les physiciens se sont plutôt tournés vers l'étude de milieux désordonnés. C'est le cas de la théorie des verres de spins, qui modélisent des alliages irréguliers tels que AuFe ou CuMg et possèdent des propriétés dynamiques surprenantes. Dans une autre direction, les fluctuations de courants maritimes ou électriques induisent des phénomènes de ralentissement de la diffusion.

Pour représenter mathématiquement de telles situations, on est amené à considérer des processus stochastiques à valeurs dans un espace dont la géométrie est irrégulière et la façon la plus simple de le faire est d'introduire un aléa dans la définition même de l'espace d'états. Pour prendre une image, on peut penser par exemple au déplacement 'au hasard' d'une voiture dans une ville où on aurait disposé des sens interdit également au hasard. La même procédure appliquée à la grille de dimension d définit une marche aléatoire sur un amas de percolation, un des modèles les plus étudiés en mécanique statistique des milieux désordonnés: c'est la fourmi dans un labyrinthe de P. G. de Gennes [1].

Les travaux décrits ci-dessous traitent de quelques exemples de diffusions ou marches aléatoires dans un mileu aléatoire pour lesquels il a été possible de développer une approche quantitative. Ils mobilisent différentes parties des mathématiques: mécanique statistique et percolation, théorie spectrale, techniques d'E.D.P. en homogénéisation, techniques probabilistes de martingales, théorie géométrique des semi-groupes, théorie des graphes et produits en couronne ...

[1] La percolation: un concept unificateur. *La Recherche*, 1976.

Commentaire sur les publications

Inégalités en norme L_p pour le produit des supremas de plusieurs martingales arrêtées à des temps aléatoires. Inégalités avec poids. Annales de l'Institut H. Poincaré. **1993**: on connait le rôle des inégalités maximales autant pour l'étude des processus stochastiques qu'en analyse harmonique. Ici nous établissons des inégalités de type Burkholder-Gundy 'avec poids' i.e. sous une probabilité absolument continue par rapport à la mesure de référence. Notre approche repose sur des idées de M.T. Barlow, S. Jacka et M. Yor (1986) qui permettent de s'affranchir de la condition (A_p) de B. Muckenhoupt (1972). Différents contre-exemple permettent de tester ces résultats.

J'ai utilisé ces inégalités avec poids dans l'article *Dirichlet processes associated to diffusions.* Stochastics and stochastic reports, **2001**, pour répondre à la question suivante: soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus de diffusion à valeurs dans R^d possédant une mesure réversible et soit f une fonction réelle. A quelles conditions de régularité de type Sobolev sur f et sur la loi initiale du processus peut-on dire que le processus image $(f(X_t), t \geq 0)$ est un processus de Dirichlet? La motivation était d'obtenir des extensions de la formule d'Itô qui forment une partie de la thèse de mon étudiante K. Dupoiron.

Zero-white-noise limit through Dirichlet forms, with application to diffusions in a random medium. Probability theory and related fields, **1994**, *Spectra, exit times and long time asymptotics in the zero-white-noise limit.* Stochastics and stochastic reports, **1995** et *Limit theorems for diffusions with a random potential.* Stochastic processes and their applications, **1995**: suivant une suggestion de E. Marinari, G. Parisi, D. Ruelle et P. Windey (1982), j'étudie une diffusion dans R^N dont le générateur est $\Delta - \nabla W \nabla$ où W est un champ aléatoire possédant une propriété d'invariance d'échelle: $W(c^2.) = cW(.)$ en loi. Je montre qu'alors un phénomène de 'localisation' a lieu: la loi de $X_t/(\log t)^2$ est tendue et je donne une expression de la limite. Ce résultat généralise donc au cas multi-dimensionel les théorèmes de Y.A. Sinaï et Th. Brox (Voir aussi R. Durrett (1986)). Signalons que ces diffusions dans un milieu auto-similaire ont été proposées pour modéliser les fluctuations de courants électriques ou marins (Cf Marinari et al).

On random perturbations of dynamical systems and diffusions with a Brownian potential in dimension one. Stochastic processes and their applications, **1998**: ici on se limite à des diffusions en dimension 1. Considérons le problème de petites perturbations d'un système dynamique suivant:

$$dX_t = \epsilon d\beta_t - \nabla V(X_t)dt - \epsilon^a \nabla B(X_t)dt \ ; \ X_0 = 0 \tag{3}$$

où β est un brownien, V est une fonction régulière, B est mesurable et $a > 0$. Il est faux que la trajectoire du processus $(X_t, 0 \leq t \leq 1)$ converge vers celle du système dynamique $dx_t = -\nabla V(x_t)dt$ quand ϵ tend vers 0. La réponse dépend de la régularité de B et du choix de a. Je donne des conditions suffisantes 'optimales' sur B et a pour que X_1 converge vers x_1. Je donne aussi des exemples où les fluctuations de B sont telles que, pour de petites valeurs de a, le processus est ralenti et X_1 converge vers 0.

Metastability and convergence to equilibrium for the random field Curie-Weiss model. Journal of Statistical Physics, **1998** et *On the averaged dynamics of the random field Curie-Weiss model.* Annals of Applied Probability, **2000**, (avec L.R. Fontes et P. Picco): sur le cube de dimension N, $\{-1, +1\}^N$, on considère le Hamiltonien:

$$H(\sigma) = -N(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \sigma_i)^2 - \theta \sum_{i=1}^{N} h_i \sigma_i$$

où les h_i sont des variables aléatoires i.i.d. de Bernoulli symétriques. Il s'agit donc d'un modèle de champ moyen avec le couplage habituel du modèle de Curie-Weiss mais soumis à un champ extérieur aléatoire. Sous la mesure de Gibbs π, de densité $\exp(-\beta H)$ par rapport à la mesure produit, les variables σ_i ne sont pas indépendantes. Pour une température assez basse et θ assez petit, on vérifie facilement qu'il y a deux phases.

Nous nous sommes intéressés à la dynamique de Glauber. En étudiant le spectre du générateur (aléatoire) et les fonctions propres (aléatoires), nous donnons une description précise de l'approche de l'équilibre: pour une réalisation donnée des h_i, les fluctuations de la suite h_i aident le processus à converger; la convergence a lieu suivant le scénario métastable; le temps de convergence est le même pour la magnétisation que pour les spins. La dynamique moyennée (par rapport à l'aléa des h_i) peut aussi être décrite: elle n'est pas markovienne. Le modèle n'est donc pas auto-moyennant i.e. l'influence des h_i persiste quand on prend la limite $N \to \infty$.

Convergence to equilibrium for spin glasses. Communications in Mathematical Physics, **2000**: sur le cube $\{-1,+1\}^N$ on considère un Hamiltonien aléatoire $H(\sigma)$ et la dynamique de Glauber correspondante. Les exemples de modèles de mécanique statistique de ce type sont connus sous le nom de 'verres de spins' et ils modélisent les propriétés magnétiques d'alliages, par exemple. De nombreux travaux autant de physiciens que de mathématiciens ont été consacrés à l'étude des propriétés statiques de ces modèles, G. Parisi, M. Talagrand, F. Guerra ... Ici, ce sont les propriétés dynamiques qui nous intéressent. Le résultat obtenu dans l'article est une borne supérieure sur le temps de convergence à l'équilibre quand la loi initiale est uniforme (deep quenched) en fonction de la pression. Alors qu'on pourrait s'attendre à des temps de thermalisation de l'ordre de β, on obtient un majorant de l'ordre de β^2, ce qui est intéressant à haute température. La technique utilisée est assez générale: elle consiste à introduire une famille d'inégalités fonctionnelles, un peu semblables à l'inégalité de Poincaré, mais qui font apparaître la dépendance dans la loi initiale.

Avec P. Picco, nous avons démontré des estimées de temps de convergence plus précises pour le modèle de verre de spin 'REM' de B. Derrida dans *Convergence to equilibrium for finite Markov processes, with application to the Random Energy Model.* (Non publié). Par ailleurs, les mêmes inégalités de Poincaré généralisées donnent des bornes sur les temps de convergence pour des marches aléatoires dans un milieu aléatoire à valeurs dans un groupe fini, voir *Sur la convergence des marches aléatoires dans un milieu aléatoire et les inégalités de Poincaré généralisées.* CRAS **1999**.

Inégalités de Sobolev et temps d'atteinte. Potential Analysis, **1998**: le principal résultat est une interprétation des inégalités de Sobolev en terme de temps d'atteinte. Celle-ci est ensuite utilisée pour démontrer l'équivalence entre l'ultra-contractivité du semi-groupe et l'inégalité de Sobolev pour certaines formes de Dirichlet non-symétriques satisfaisant une condition de secteur. Le cas symétrique avait été résolu par N. Varopoulos par des méthodes spectrales.

Log-Sobolev and spectral gap inequalities for the knapsack Markov chain. Markov Processes and Related Fields, **2002**: soit $a_1, a_2, ...$ une suite de réels positifs. On cherche à compter le nombre de suites binaires de longueur N, soit $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_N$, satisfaisant la contrainte $\sum_{i=1}^{N} a_i\sigma_i \leq 1$. Cette question, connue sous le nom de problème du 'knapsack' est motivée par ses applications en cryptographie. Le problème appartient à la classe $\#P$ et donc il ne faut pas espérer trouver d'algorithme le résolvant en temps polynomial. En revanche M. Jerrum et A. Sinclair avaient proposé un algorithme randomisé pour en donner une solution approchée. Encore fallait-il prouver que ce dernier algorithme était efficace. La question est restée longtemps ouverte avant que B. Morris et A. Sinclair ne parviennent à démontrer une borne polynomiale pour le temps de convergence. A la même époque, j'ai obtenu l'ordre de grandeur exact du temps de convergence, mais sous des hypothèses très restritives, en utilisant les inégalités de Poincaré généralisées mentionnées ci-dessus.

Isoperimetry and heat kernel decay on percolation clusters, (avec E. Remy). Annals of Probability, **2004**: les amas de percolation sont définis par perturbation aléatoire d'un graphe déterministe: ici, on considère le sous réseau de Z^d obtenu en gardant (resp. enlevant) chaque arête avec probabilité p (resp. $1-p$). On note ω le graphe ainsi défini et $C(\omega)$ sa composante connexe à l'origine. Si p est assez proche de la valeur 1, la probabilité que $C(\omega)$ soit infinie est non nulle. Nous montrons qu'alors les probabilités de transition de la marche aléatoire sur $C(\omega)$ issue de l'origine décroissent en $t^{-d/2}$, c'est-à-dire comme pour la marche aléatoire simple sur Z^d. Le résultat est valable dans toute la zone sur-critique. Sa preuve repose sur une combinaison d'arguments de deux types: d'une part les méthodes isopérimétriques développées depuis les années 80 par N. Varopoulos, L. Saloff-Coste, Th. Coulhon .. et, d'autre part, des arguments de renormalisation propres à l'étude des amas de percolation (P. Antal, JD. Deuschel, G. Grimmett, A.

Pisztora, ...). A ma connaissance, c'est le premier exemple où il a été possible d'obtenir un contrôle du noyau de la chaleur sur un graphe aléatoire.

La description du profil isopérimétrique des amas de percolation que nous avons ainsi prouvée a depuis lors connu plusieurs applications. A la suite de notre travail et par des techniques en partie similaire, M. Barlow a démontré des bornes gaussiennes inférieures et supérieures qui précisent encore le comportement du noyau. Dans notre article récent *Quenched invariance principles for random walks on percolation clusters*, A. Piatnitski et moi-même avons déduit des inégalité de Cheeger et Poincaré une forme forte (quenched) du principe d'invariance pour la marche aléatoire. Sous sa forme moyennée, le principe d'invariance avait été établi par A. De Masi, P. Ferrari, S. Goldstein et W.D. Wick en 1989. Notre démonstration est inspirée par les derniers développements en théorie de l'homogénéisation singulière (G. Allaire, V. Zhykov ...). D'autres approches ont été proposées par V. Sidoravicius et A-S. Sznitman (2004) et N. Berger and M. Biskup (Prépublication) qui toutes utilisent nos estimées de noyau. Finalement mon étudiant en thèse C. Rau a su préciser nos calculs isopérimétriques pour donner des estimées de la transformée de Laplace du nombre de points visités par la marche. Sa stratégie passe par la construction d'un graphe de type produit en couronne et repose sur des idées d'A. Erschler. On vérifie ainsi que cette transformée de Laplace se comporte comme dans le cas d'une marche aléatoire simple sur Z^d mais par une méthode différente de celle mise en oeuvre par M.D. Donsker et S.R.S. Varadhan dans leur article célèbre de 1979.

Convergence to equilibrium and decay of the kernel of random walks with random rates in Z^d, (avec L.R. Fontes). Probability Theory and Related Fields, **2006**: un peu dans le même esprit que le travail précédent, nous étudions la décroissance du noyau d'une marche aléatoire dans un environnement aléatoire: à chaque arête du réseau Z^d est maintenant attribuée une résistance aléatoire finie mais autorisée à prendre une valeur arbitrairement grande avec une probabilité non nulle. On suppose que la loi de la résistance possède une queue polynomiale d'exposant γ en $+\infty$. Le générateur de la marche est donc non-uniformément elliptique. Nous décrivons exactement la décroissance de la probabilité de retour moyennée (annealed) par des méthodes spectrales: il y a deux régimes suivant que γ est supérieur ou inférieur à $d/2$. Dans le second cas, les fluctuations du milieu induisent un ralentissement de la marche et nous montrons qu'alors le comportement presque sûr du noyau (vu comme variable aléatoire dépendant de la réalisation des résistances) diffère de celui de la moyenne annealed.

Nos résultats reposent, entre autres, sur un lemme de comparaison général qui exprime la monotonie de la probabilité de retour annealed comme fonction de la loi de l'environnement. La preuve que nous donnons pour une marche sur le réseau Z^d s'applique à tout graphe de Cayley moyennable mais elle ne permet pas de traiter, par exemple, le cas d'un arbre régulier. Motivés par notre article, D. Aldous et R. Lyons ont récemment développé une notion de trace au sens de von Neumann pour obtenir une version du lemme de comparaison dans le contexte des réseaux aléatoires unimodulaires.

Carne-Varopoulos bounds for centered random walks. Annals of Probability, **2006**: ce travail a été en partie motivé par les résultats de G. Alexopoulos (2002) sur les marches aléatoires sur les groupes nilpotents. Un grand nombre de résultats sur les marches aléatoires sur les groupes, à commencer par le théorème de Kesten (1959), mais aussi les résultas plus récents de L. Saloff-Coste et Ch. Pittet, décrivent le comportement de marches aléatoires symétriques en fonction de propriétés géométriques du groupe. Mon objectif est de généraliser ces résultats à certains processus non réversibles.

J'ai introduit une condition de centrage qui implique des bornes supérieures sur les probabilités de transition semblables à celles obtenues par Th. Carne et N. Varopoulos (1985) dans le cas symétrique. On en déduit que de telles marches centrées sont de vitesse nulle si et seulement si leur bord de Poisson est trivial. La condition de centrage est de nature géométrique - elle exprime que le graphe de Cayley (orienté) satisfait une certaine décomposition en cycles - et il faut en donner une interprétation plus algébrique. C'est possible dans certains cas particuliers: groupes nilpotents, certains exemples explicites de groupes résolubles tels que Baumslag-Solitar ou $Z \wr Z$. Le cas général est encore mal compris.

Programme de recherche

Marches aléatoires symétriques en mileu aléatoire: les résultats de l'article *Convergence to equilibrium and decay of the kernel of random walks with random rates in Z^d.* ne disent rien sur le comportement de la marche pour presque toute réalisation du milieu (quenched). Il est cependant possible de montrer que le modèle est dans une phase de fort bruit dès que $\gamma < d/2$ c'est-à-dire que la décroissance de la probabilité de retour presque sûre est strictement plus rapide que la décroissance en moyenne. Cette dernière assertion est une conséquence d'estimées de la densité d'état sur un amas de percolation, qui découlent pour leur part des résultats du papier avec E. Remy. Reste à étudier plus exactement la vitesse de décroissance quenched. Dans un premier temps, il semble raisonnable d'obtenir des bornes dans le régime de faible bruit $\gamma > d/2$.

Par ailleurs, en l'absence de bonne inégalité de Poincaré, il n'est pas possible d'appliquer directement les techniques d'homogénéisation de l'article avec A. Piatnitski. On peut cependant établir un principe d'invariance par couplage avec une marche aléatoire sur un amas de percolation. Ceci fait l'objet du papier *Quenched invariance principles for random walks with random conductances* qui complète ceux obtenus pour les marches aléatoires sur un amas de percolation en montrant que le principe d'invariance est encore vrai pour un jeu de conductances i.i.d. sans condition d'ellipticité.

Vieillissement: il est possible de choisir une loi pour des conductances i.i.d. telle que la marche aléatoire associée soit sous-diffusive: le milieu crée des zones 'pièges' où le marcheur perd beaucoup de temps. On cherche alors à déterminer les bonnes échelles et la nature des limites d'échelles.

La notion de vieillissement a été introduite par les physiciens, D. Dean, J.P. Bouchaud, L. Cugliandolo ... pour décrire l'évolution hors équilibre des verres de spins au travers du calcul de corrélations. Dans une série d'articles récents, G. Ben Arous et J. Cerny ont appliqué ces idées à des exemples simples de marches aléatoires avec conductances aléatoires que l'on appelle 'trap models'. Leur démonstration repose sur des arguments fins de la théorie du potentiel.

En collaboration avec L.R. Fontes, nous donnons une approche élémentaire des résultats de Ben Arous et Cerny. Ceci est un travail en cours d'écriture.

Un enjeu important est d'étendre la propriété de vieillissement au-delà des 'trap models', par exemple aux marches aléatoires avec conductances aléatoires sous-diffusives.

Dans l'article *K-processes, scaling limit and aging for the Bouchaud trap model.* avec L.R. Fontes, nous considérons un modèle dynamique de verre de spins simplifié, imité du travail de D. Dean et JP. Bouchaud, mais qui a la particularité de posséder une unique mesure invariante. (Le processus considéré vit sur un espace infini.) Nous prouvons un théorème de vieillissement. Le modèle caricature la dynamique du REM (Cf G. Ben-Arous, A. Bovier, V. Gayrard 2003).

Paramètres effectifs

Quand le principe d'invariance s'applique, le processus limite obtenu à partir de la marche aléatoire est un mouvement brownien dont la matrice de covariance s'appelle *matrice effective*. Il n'est en général pas possible d'expliciter la matrice effective dont les coefficients sont donnés par la solution d'une équation de Poisson.

Il existe de nombreux résultats mathématiques qui donnent des estimées des coefficients effectifs, typiquement dans des régimes de basse température. Citons par exemple les derniers articles de S. Kozlov.

Par ailleurs, la littérature physique regorge de conjectures faisant le lien entre le calcul de la matrice de diffusion effective et les théorèmes de fluctuation-dissipation, la formule d'Einstein, la formule de Green-Kubo ... Ce monde a semble-t-il été fort peu exploré jusqu'à présent par les mathématiciens. Mes travaux en cours avec, pour une part A. Faggionato, pour l'autre part A. Piatnitski et N. Gantert, vont dans cette direction.

Dans l'article *Mott law for Mott variable-range random walk:* avec A. Faggionato nous considérons l'estimation de la diffusivité effective pour un modèle de marche aléatoire dans un milieu aléatoire se déplaçant sur un nuage de points poissonien. Le modèle a été proposé par le physicien Mott qui a prédit certaines de ses propriétés.

Dans notre travail, nous donnons une borne supérieure pour la diffusion effective qui, combinée avec la borne inférieure obtenue précédemment par A. Faggionato, H. Schulz-Baldes et D. Spehner, justifie une des prévisions de Mott. La preuve utilise des arguments de percolation assez classiques.

Une autre prévision de Mott, plus originale, concerne le caractère universel du comportement à basse température de la diffusivité.

Marches aléatoires sur des groupes: j'ai été à l'initiative, avec quelques collègues de la création d'un projet de recherche autour des liens entre marches aléatoires et groupes. Cette équipe rassemble depuis trois ans une douzaine de mathématiciens marseillais spécialistes de géométrie des groupes et de dynamique avec l'ambition de profiter des compétences variées pour aborder une théorie à l'interface entre algèbre, géométrie et probabilités. Après des débuts chaotiques, différents thèmes ont émergé et plusieurs initiatives font l'objet de discussions. Un premier travail personnel lié à cette thématique est mon article sur les bornes de type Carne-Varopoulos publié par Annals of Probability en 2006. Un autre travail en cours avec S. Blachère et P. Haissinsky porte sur le comportement des marches aléatoires sur un groupe hyperbolique.

Nous avons remarqué qu'il est toujours possible de construire une métrique pour laquelle la mesure harmonique d'une marche symétrique sur un groupe hyperbolique appartienne à la classe de Patterson-Sullivan. Ce premier pas nous encourage à utiliser des idées géométriques (quasi-conformité) pour décrire la mesure harmonique. Un premier résultat est le calcul de la dimension de Hausdorff de la mesure harmonique en fonction de la vitesse de la marche. Des formules de ce type, dûes à V. Kaimanovich et F. Ledrappier, existent dans le cas du groupe libre mais avec une preuve différente. Ces premiers résultats font l'objet de deux articles en cours de rédaction et dont le contenu a été présenté en mars dernier à l'ESI.