Document de synthèse présenté pour la

Thèse d'Habilitation à Diriger des Recherches
Université de Provence

Spécialité Mathématiques

Pierre MATHIEU

Soutenue le 3 juin 1999 devant le jury composé de MM. les professeurs:

Enrique Andjel (Université de Provence),
Dominique Bakry (Université Paul Sabatier), rapporteur,
Francis Comets (Université Paris 7),
Charles M. Newman (New York University), rapporteur,
Enzo Olivieri (Universit degli Studi di Roma "Tor Vergata"),
Etienne Pardoux (Université de Provence), rapporteur,
Alain-Sol Sznitman (ETH-Zentrum), président.

Remerciements

J'aimerais tout d'abord remercier MM. Charles M. Newman, Dominique Bakry et Etienne Pardoux d'avoir bien voulu rapporter sur cette thèse et MM. Enrique Andjel, Francis Comets, Enzo Olivieri et Alain-Sol Sznitman pour leur participation au jury.

Marc Yor a été mon professeur. Mon intérêt pour la théorie des probabilités et la recherche mathématique lui doit beaucoup. Je tenais à rendre hommage à son enseignement.

Maria Eulalia Vares a encadré mon travail durant mon séjour à l'IMPA. Son influence m'a été précieuse.

J'ai eu l'occasion de collaborer, ou simplement discuter avec de nombreux collègues. Je souhaite leur exprimer ici la plus sincère gratitude. Pour sa patience, ses conseils et encouragements, je remercie tout particulièrement Dominique Bakry.

À ceux qui m'ont si chaleureusement accueilli à Rome, Moscou ou São Paulo, je suis reconnaissant.

Je suis également heureux de dire le plaisir que j'ai à travailler avec Pierre Picco.

Enfin je remercie les membres du LATP, et parmi eux Etienne Pardoux et Bernard Coupet, pour leur accueil à Marseille.

Mon travail de thèse est résumé dans les articles [2], [3] et [4]. Il porte sur des inégalités maximales en théorie des martingales et la géométrie de la courbe brownienne plane. On connait le rôle des inégalités maximales autant pour l'étude des processus stochastiques qu'en analyse harmonique. Dans [2] nous établissons des inégalités de type Burkholder-Gundy 'avec poids' i.e. sous une probabilité absolument continue par rapport à la mesure de référence. Notre approche repose sur des idées de M.T.Barlow, S.Jacka et M.Yor (1986) qui permettent de s'affranchir de la condition (A_p) de B.Muckenhoupt (1972) à condition cependant d'affaiblir un peu les inégalités obtenues. La même technique est ensuite utilisée dans [3] et [4] pour l'étude des 'temps locaux d'intersection' de deux browniens plans. Au sens des densités d'occupation, les temps locaux d'intersection comptent les points communs des trajectoires des deux browniens. (Cf les travaux de E.B.Dynkin, D.Geman, J.Horowitz, J.F.LeGall, J.Rosen, S.R.S.Varadhan, M.Yor). On construit des temps locaux d'intersection pour des browniens corrélés, on en étudie la régularité en espace et on montre des inégalités maximales dans l'esprit de M.T.Barlow, M.Yor (1982). Finalement, l'article [1] porte sur un problème de représentation des martingales continues: une martingale continue en dimension 1 peut s'écrire comme un brownien changé de temps. Cette propriété n'est plus vraie en dimension quelconque que pour les martingales conformes. Cependant nous montrons que toute martingale se représente comme somme de deux browniens changés de temps (avec le même changement de temps). Il existe une version plus élaborée de ce résultat pour des martingales à valeurs dans un groupe.

Après ma thèse je me suis interessé à des problèmes liés à la dynamique de certains processus de Markov, en particulier la description de l'approche de l'équilibre. Il existe des techniques probabilistes pour ce type de problèmes, par exemple le couplage, mais les outils employés ici seront plutôt empruntés à l'analyse fonctionnelle: théorie spectrale, inégalités de Sobolev ... Les résultats obtenus concernent des diffusions avec petit bruit, les diffusions dans un potentiel aléatoire 'brownien', certains systèmes de spins désordonnés.

Approche de l'équilibre I: métastabilité: on considère un processus de Markov, $(X_t, t \geq 0)$, homogène et possédant une unique probabilité invariante, π. Si on suppose de plus π réversible i.e. si on suppose le générateur auto-adjoint dans $L_2(\pi)$, alors on peut exprimer la loi de X_t sur une décomposition spectrale. En supposant de plus le spectre discret on obtiendra une expression du type

$$E_x[f(X_t)] = \pi(f) + e^{-\lambda_1 t}\pi(f\phi_1)\phi_1(x) + e^{-\lambda_2 t}\pi(f\phi_2)\phi_2(x) + ... \tag{1}$$

où les λ_i sont les valeurs propres et ϕ_i est le vecteur propre correspondant. On suppose les valeurs propres ordonnées: $\lambda_{i+1} \geq \lambda_i$. Estimer les différents termes dans (1) permettra donc de calculer la loi de X_t. On peut utiliser le théorème du min-max pour calculer les valeurs propres. Le calcul des vecteurs propres est généralement plus délicat. Nous avons appliqué ce programme pour des diffusions avec un petit bruit et pour un système de spins désordonné simple: le modèle de Curie-Weiss dans un champ extérieur aléatoire.

Diffusions avec un petit bruit: on considère le processus (X_t) dont le générateur s'écrit

$$\mathcal{L} = \epsilon\Delta - \nabla W \nabla \tag{2}$$

où $\epsilon > 0$ est petit et W est une fonction définie sur R^N. Si W est régulière, on peut interpréter (2) comme le générateur d'une petite perturbation du système dynamique déterministe $dx_t = -\nabla W(x_t)dt$. C'est le point de vue de A.D.Wentzell et M.I.Freidlin (1984). Leur approche repose sur un principe de grandes déviations pour estimer l'écart entre les trajectoires de X et x.
Nous donnons dans [5] et [6] le comportement asymptotique des valeurs propres de $\mathcal{L}$ quand ϵ tend vers 0. On en déduit l'expression de la loi de X_t pour des temps de l'ordre de grandeur $t = \exp(a/\epsilon)$, $a > 0$ comme combinaison linéaire d'un nombre fini de probabilités explicites (Autrement dit seuls les premiers termes contribuent dans (1). Le nombre de termes contribuant dépend de a). Nous étudions également la loi du temps de sortie de X_t d'un domaine de R^N. On caractérise les domaines pour lesquels le temps de sortie suit une loi exponentielle. Les résultats obtenus sont plus généraux que ceux prouvés via les grandes déviations et surtout plus robustes. En particulier l'approche spectrale permet de considérer des fonctions W seulement continues auquel cas le système dynamique n'est plus défini et il n'y a pas de grandes déviations.

Diffusions dans un potentiel aléatoire brownien: on considère une marche aléatoire dans un environnement aléatoire sur Z, au plus proche voisin. Soit $\xi(x)$ la probabilité de sauter à droite en partant de x. On suppose donc que les $\xi(x)$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. En supposant qu'il n'y a pas de dérive moyenne, Y.A.Sinaï montre que X_t ne satisfait pas le théorème central-limite. Plus précisément $X_t/(\log t)^2$ converge en loi. (La loi est calculée en moyennant sur les deux aléas de la marche et du milieu $\xi(x)$). Th.Brox (1986) a démontré un résultat similaire pour une diffusion dont le potentiel W est un brownien. Les fluctuations du potentiel W agissent comme des pièges qui ralentissent le processus.
Dans [5] et [7], et suivant une suggestion de E.Marinari, G.Parisi, D.Ruelle et P.Windey (1982), nous étudions une diffusion dans R^N dont le générateur est $\Delta - \nabla W \nabla$ où W est

un champ aléatoire possédant une propriété d'invariance d'échelle: $W(c^2.) = cW(.)$ en loi. Nous montrons qu'alors le même phénomène de 'localisation' a lieu: la loi de $X_t/(\log t)^2$ est tendue et nous donnons une expression de la limite. Ce résultat généralise donc au cas multi-dimensionel les théorèmes de Y.A.Sinaï et Th.Brox (Voir aussi R.Durrett (1986)). La preuve repose sur les résultats déja mentionnés pour des diffusions avec un petit bruit. En effet, on peut utiliser l'invariance d'échelle pour réécrire le générateur sous la forme (2). Signalons que ces diffusions dans un milieu auto-similaire ont été proposées pour modéliser les fluctuations de courants électriques ou marins (Cf Marinari et al).

Perturbations aléatoires de systèmes dynamiques en dimension 1: ici on se limite à des diffusions en dimension 1. Considérons le problème de petites perturbations d'un système dynamique suivant:

$$dX_t = \epsilon d\beta_t - \nabla V(X_t)dt - \epsilon^a \nabla B(X_t)dt \ ; \ X_0 = 0 \tag{3}$$

où β est un brownien, V est une fonction régulière, B est mesurable et $a > 0$. Il est faux que la trajectoire du processus $(X_t, 0 \leq t \leq 1)$ converge vers celle du système dynamique $dx_t = -\nabla V(x_t)dt$ quand ϵ tend vers 0. La réponse dépend de la régularité de B et du choix de a. Dans [8], nous donnons des conditions suffisantes 'optimales' sur B et a pour que X_1 converge vers x_1. Nous donnons aussi des exemples où les fluctuations de B sont telles que, pour de petites valeurs de a, le processus est ralenti et X_1 converge vers 0.
On peut choisir pour B la trajectoire d'un brownien et pour V une fonction puissance. En jouant sur la propriété d'invariance d'échelle on se ramène à une diffusion dont le coefficient de diffusion est 1 et le terme de dérive est la somme d'un terme brownien aléatoire et d'une dérive polynomiale déterministe. On montre alors que suivant les cas, plusieurs régimes ont lieu: si la dérive déterministe est faible, X_t est de l'ordre de $(\log t)^2$ comme dans le cas de Y.A.Sinaï , pour une dérive sur linéaire c'est le terme déterministe qui l'emporte. Il y a un régime intermédiaire où les deux termes aléatoires et déterministes contribuent. Voir [8].

On appelle, en physique statistique, 'métastable' un processus ergodique dont l'évolution vers l'unique mesure invariante, π, peut être décomposée en trois étapes: le processus évolue d'abord rapidement vers une mesure ν, puis, pendant un long intervalle de temps, il oscille autour de ν pour finalement rejoindre brutalement sa véritable position d'équilibre: π. Une formulation rigoureuse de la métastabilité a été donnée par M.Cassandro, A.Galves, E.Olivieri et M.E.Vares en 1984 (Convergence du processus correctement renormalisé vers un processus de saut à valeurs dans $\{\nu, \pi\}$). Depuis, il a été possible de vérifier la propriété de métastabilité pour de nombreux modèles: petites perturbations de systèmes dynamiques déterministes, modèle d'Ising, de champ moyen, processus de contact... Dans tous ces exemples c'est un principe de grandes déviations qui permet de conclure. On peut aussi interpréter la métastabilité sur la formule (1): seuls les deux premiers termes contribuent. L'équilibre métastable ν est alors donné par la fonction propre ϕ_1. Nous donnons un exemple de mise en oeuvre de cette stratégie dans le cas du modèle de Curie-Weiss désordonné.

Le modèle de Curie-Weiss aléatoire: sur le cube de dimension N, $\{-1,+1\}^N$, on considère le Hamiltonien:

$$H(\sigma) = -N(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i)^2 - \theta\sum_{i=1}^{N}h_i\sigma_i \tag{4}$$

où les h_i sont des variables aléatoires i.i.d. de Bernoulli symétriques. Il s'agit donc d'un modèle de champ moyen avec le couplage habituel du modèle de Curie-Weiss mais soumis à un champ extérieur aléatoire. Sous la mesure de Gibbs π, de densité $\exp(-\beta H)$ par rapport à la mesure produit, les variables σ_i ne sont pas indépendantes. Pour une température assez basse et θ assez petit, on vérifie facilement qu'il y a deux phases.
Dans [12] et [13], nous nous sommes intéressés à la dynamique de Glauber. En étudiant le spectre du générateur (aléatoire) et les fonctions propres (aléatoires), nous donnons une description précise de l'approche de l'équilibre: pour une réalisation donnée des h_i, les fluctuations de la suite h_i aident le processus à converger; la convergence a lieu suivant le scénario métastable; le temps de convergence est le même pour la magnétisation que pour les spins. La dynamique moyennée (par rapport à l'aléa des h_i) peut aussi être décrite: elle n'est pas markovienne. Le modèle n'est donc pas auto-moyennant i.e. l'influence des h_i persiste quand on prend la limite $N \to \infty$.
Jusqu'ici nous n'avons considéré que le cas d'un champ extérieur indépendant du temps. L'étude du cas où les h_i varient avec le temps fait l'objet d'une collaboration en cours avec P.Picco et E.Cirillo.

Approche de l'équilibre II: inégalités de trou spectral généralisées: on voit sur la formule (1), qu'il suffit d'estimer le trou spectral λ_1 pour avoir une information sur la vitesse de convergence de X_t vers π. D'autre part λ_1 est donné par le problème variationnel:

$$\lambda_1 = \inf_{u\ t.q.\ \pi(u)=0} \frac{\mathcal{E}(u,u)}{\pi(u^2)} \tag{5}$$

où $\mathcal{E}$ est la forme de Dirichlet. Nous présentons maintenant des exemples pour lesquels le trou spectral ne permet pas d'estimer correctement la vitesse de convergence à l'équilibre.

Considérons une diffusion dans R^N de générateur

$$\mathcal{L} = \Delta - \nabla W \nabla \tag{6}$$

On suppose que $\int \exp(-W) < \infty$. Si la fonction $\exp(-W)$ décroit trop lentement à l'infini, alors le trou spectral est nul. Pour étudier les propriétés d'ergodicité du processus associé à $\mathcal{L}$, nous avons introduit des constantes plus générales que le trou spectral dans [9]. La définition est calquée sur la formule (5): on remplace la norme L_2 au dénominateur par la norme L_p, $0 < p \leq 1$. Appelons $\lambda(p)$ la constante ainsi définie et 'inégalité de trou spectral généralisée' l'inégalité $\lambda(p) > 0$. Nous montrons que, si la fonction $\exp(-W)$ décroit comme un polynome, alors $\lambda_1 = 0$ mais il existe p t.q. $\lambda(p) > 0$. Cela implique que le processus converge vers l'équilibre à vitesse polynomiale. On en déduit aussi certaines estimées des temps d'atteinte. Les résultats obtenus dans [9] sont assez grossiers. En collaboration avec A.Yu.Veretennikov, nous étudions des estimées de la loi de X_t plus précises basées sur l'inégalité de Harnack et les inégalités de trou spectral généralisées.

Même quand λ_1 n'est pas nul, il arrive que le trou spectral ne donne pas assez d'information sur la vitesse d'atteinte de l'équilibre. On peut alors utiliser d'autres inégalités fonctionnelles: Sobolev, Log-Sobolev, Nash... Nous renvoyons aux travaux de P.Diaconis, L.Saloff-Coste ou D.Stroock par exemple. Notons cependant que ces techniques donnent des estimées de la distance entre la loi de X_t et π indépendantes du point initial. Pour étudier comment la vitese de convergence dépend de la mesure initiale, nous avons introduit dans [15] une nouvelle famille d'inégalités fonctionnelles c'est-à-dire une famille de constantes $\lambda(\eta, p)$, où η est la loi initiale. (Remplacer la norme dans $L_2(\pi)$ par la norme dans $L_p(\eta)$ dans le dénominateur de (5)). Nous montrons qu'il est possible d'estimer la loi de X_t quand la loi initiale est η à l'aide de la constante $\lambda(\eta, p)$. Nous donnons ensuite des bornes sur $\lambda(\eta, p)$ en fonction de la géométrie induite par le processus sur son espace d'état. Nous avons appliqué ces idées à l'étude de la dynamique de marches aléatoires dans un environnement aléatoire:

Random energy model: sur le cube $\{-1, +1\}^N$ on considère un Hamiltonien aléatoire $H(\sigma)$. On supposera que les énergies $H(\sigma)$ sont des variables gaussiennes indépendantes de variance N. Le modèle ainsi défini a été introduit par B.Derrida (1980) comme caricature d'un verre de spins. On vérifie que le modèle a une transition de phase statique à $\beta = \sqrt{2 \log 2}$. Dans [14] nous calculons le temps d'atteinte de l'équilibre partant de la probabilité uniforme. Il se trouve que, à haute température, le temps de convergence est de beaucoup inférieur à l'inverse du trou spectral. Cela confirme l'intuition que, pour de tels systèmes désordonnés, les états fondamentaux étant aussi désordonnés, ils ne sont pas chargés par une probabilité déterministe. Si on choisit une probabilité déterministe comme loi initiale pour la dynamique, le processus atteindra l'équilibre avant d'avoir rencontré un état fondamental et donc le temps d'atteinte de l'équilibre partant d'une mesure déterministe doit être inférieur à celui partant d'un état fondamental. Le résultat de [14] permet également d'observer sur la dynamique la transition de phase statique.

Dans un travail en cours, nous estimons les vitesses de convergence de dynamiques de spins dans un environnement désordonné de type "verre de spins" à l'aide des inégalités de trou spectral généralisées. Notre motivation est d'établir l'existence de transitions de phases dynamiques.

Marches aléatoires dans un milieu aléatoire: dans la note [15], nous utilisons les inégalités de Poincaré généralisées pour estimer la vitesse de convergence d'une marche aléatoire dans un milieu désordonné à valeurs dans un groupe fini. Les résultats portent sur le processus de l'environnement vu du marcheur. Pour des milieux aléatoires présentant de "grandes" fluctuations, les bornes obtenues ainsi sont meilleures que celles qui se déduisent d'estimées spectrales.

Inégalités de Sobolev et capacités: les liens entre inégalités fonctionnelles (inégalités de Sobolev, de Nash, Log-Sobolev) et estimées des semi-groupes sont bien connus. Par exemple l'inégalité de Nash:

$$\|u\|_2^{2(1+2/n)} \leq \frac{1}{\Lambda}(\mathcal{E}(u,u) + \epsilon\|u\|_2^2)\|u\|_1^{4/n} \tag{7}$$

est équivalente à l'inégalité d'ultra contractivité:

$$\|P_t u\|_\infty \leq (\Lambda t)^{-n/2} e^{\epsilon t}\|u\|_1 \tag{8}$$

si la forme de Dirichlet $\mathcal{E}$ est symétrique (Voir N.Varopoulos (1985)). (7) implique (8) pour une forme de Dirichlet non symétrique. (7) et (8) sont satisfaite dans R^N pour le laplacien. Dans l'esprit des travaux de D.Bakry, T.Coulhon, M.Ledoux et L.Saloff-Coste (1995), nous cherchons ici une forme équivalente à l'inégalité de Nash (7) en termes de capacités ou, pour employer un vocabulaire probabiliste, en termes de temps d'atteinte. Dans [10], nous montrons que (7) a lieu avec $\epsilon = 0$ et pour une forme de Dirichlet conservative si et seulement si le temps d'atteinte d'un ensemble A satisfait $E[\tau_A] \leq \pi(A^c)^{1+2/n}/\Lambda$. Cette équivalence est d'ailleurs valable pour une forme de Dirichlet non-symétrique mais satisfaisant la condition de secteur forte. On obtient ainsi la preuve que (8) implique (7) dans le cas non symétrique. (La preuve dans le cas symétrique utilise une décomposition spectrale de $\mathcal{E}$ ce qui rend imposssible de la généraliser au cas non symétrique). Des résultats semblables existent pour des formes non conservatives et $\epsilon \neq 0$.

Nous avons fait un travail similaire dans [9] pour les inégalités $\lambda(p)$ définies ci-dessus. Nous donnons une version (presque) équivalente de l'inégalité de trou spectral généralisée $\lambda(p) > 0$ en termes de capacités. Nous étudions les moments des temps d'atteinte ainsi que la distance entre la loi d'un temps d'atteinte et une loi exponentielle.

Finalement l'article [11] étudie sous quelles conditions une inégalité de type (7) implique l'inégalité de trou spectral. Voici une conséquence des résultats de [11] (combinés avec des résultats bien connus): soit P_t le semi-groupe de la chaleur sur une variété connexe, complète de volume 1. Supposons que $p_t(x,x) \leq Ct^{-n/2}$ pour $t \leq 1$ et une certaine constante C indépendante de x. Alors la variété est compacte.

PUBLICATIONS

[1](avec M.Arnaudon) *Décomposition d'une martingale à valeurs dans un groupe muni d'une métrique bi-invariante en produit de deux mouvements browniens.* Séminaire de Probabilités **26**, LNM 1526, Springer Verlag, **1992**.

[2]*Inégalités en norme L_p pour le produit des supremas de plusieurs martingales arrêtées à des temps aléatoires. Inégalités avec poids.* Annales de l'Institut H.Poincaré. Série Probabilités *29.* n 4, 467-484, **1993**

[3]*Construction et renormalisation des temps locaux d'intersection de deux mouvements browniens plans.* Stochastics and stochastic reports. **46**, 117-140, **1994**

[4]*Inégalités Barlow-Yor pour les temps locaux d'intersection de deux mouvements browniens plans.* Probability theory and related fields, **102**, 83-104, **1995**.

[5]*Zero-white-noise limit through Dirichlet forms, with application to diffusions in a random medium.* Probability theory and related fields, **99**, 549-580, **1994**

[6]*Spectra, exit times and long time asymptotics in the zero-white-noise limit.* Stochastics and stochastic reports, **50**, 1-20, **1995**.

[7]*Limit theorems for diffusions with a random potential.* Stochastic processes and their applications, **60**, 103-111, **1995**.

[8] *On random perturbations of dynamical systems and diffusions with a Brownian potential in dimension one.* Stochastic processes and their applications, **77**, 53-67, **1998**.

[9] *Hitting times and spectral gap inequalities.* Annales de l'Institut H.Poincaré. Série Probabilités, **33**, n 4, 437-465, **1997**

[10] *Inégalités de Sobolev et temps d'atteinte.* Potential Anal, **9**, no 3, 293-300, **1998**.

[11] *Quand l'inégalité Log-Sobolev implique l'inégalité de trou spectral.* Séminaire de Probabilités **32**, LNM 1686, Springer Verlag, 30-35, **1998**.

[12] (avec P.Picco) *Metastability and convergence to equilibrium for the random field Curie-Weiss model.* Journ. Stat. Phys., **91**, 679-732 **1998**.

[13] (avec L.R.Fontes et P.Picco) *On the averaged dynamics of the random field Curie-Weiss model.* A paraître dans Annals of Appl. Proba.

[14] (avec P.Picco) *Convergence to equilibrium for finite Markov processes, with application to the Random Energy Model.* Soumis.

[15] *Sur la convergence des marches aléatoires dans un milieu aléatoire.* CRAS.

PARTICIPATIONS A DES CONGRES

SINAPE, Rio de Janeiro, aout 92

Congrés des jeunes probabilistes, Aussois, 27-31 mars 94. Organisateurs: J.Bertoin. J-F LeGall. Titre: *comportement asymptotique d'une diffusion quand le bruit blanc tend vers zéro.*

Conference on advanced topics in applied mathematics and theoretical physics-complex systems: classical and quantum aspects, CIRM, Marseille, 13-17 juin 94. Organisateurs: P.Picco. Titre: *Zero white noise limit for diffusions in a Brownian medium.*

Journées de Probabilités, CIRM, Marseille, 26-30 septembre 94. Organisateurs: J.Azéma. M.Yor. Titre: *Diffusions dans un milieu brownien.*

Systèmes aléatoires inhomogènes, grandes déviations et limites hydrodynamiques. Ecole polytechnique, Paris, 24 janvier 96. Organisateurs: F.Dunlop, T.Gobron, E.Saada. Titre: *Diffusion dans un milieu aléatoire en dimension 1.*

Journées de Probabilités, CIRM, Marseille, 9-13 septembre 96. Organisateurs: J.Azéma, M.Yor. Titre: *Inégalités fonctionnelles et temps d'atteinte.*

Stochastic analysis, random fields and applications. Ascona, 16-21 septembre 96. Organisateurs: R.Dalang, M.Dozzi, F.Russo. Titre: *One dimensional diffusions in a random potential.*

Journées SMAI, Modélisation aléatoire et statistique. Toulouse, 23-25 septembre 96. Organisateur: D.Michel. Titre: *Diffusions dans un potentiel aléatoire en dimension* 1*.*

Journées Barcelone-Marseille-Toulouse. Aniane novembre 96. Organisateur: D.Bakry. Titre: *Sur le modèle de Curie-Weiss avec champ extérieur aléatoire.*

Colloque Log-Sobolev et les systèmes de particules en interaction. Inst. H.Poincaré, 4-5 juin 1998. Organisateurs: F.Comets, L.Saloff-Coste. Titre: *Sur le modèle de Curie-Weiss aléatoire.*