**Décroissance du noyau de la chaleur et isopérimétrie sur un amas de percolation.**

Pierre MATHIEU [1], Elisabeth REMY [2]

**Résumé**: *nous donnons des bornes supérieures sur la décroissance du noyau de la chaleur pour la marche aléatoire sur un amas infini de percolation dans* $\mathbb{Z}^d$*.*

**Heat kernel decay and isoperimetry on a percolation cluster.**

**Abstract**: *we estimate the decay of the heat kernel for the random walk on an infinite percolation cluster in* $\mathbb{Z}^d$*.*

**Abridged English Version**

On one hand, we now have a large body of semi-group technics that yield estimates on the law of a Markov chain on a graph, see [2] or [5] and, in particular, we know how to relate the decay of the heat kernel to isoperimetric inequalities - but only in the case of rather regular graphs, say groups for instance, do we have a completely satisfactory theory, see [4]. On the other hand, there is a growing interest in understanding the behaviour of random walks in disordered or random environments, see [7] for instance. This note reports on an attempt to adapt the semi-group strategy to bound the decay of the heat kernel on highly inhomogeneous graphs, namely percolation clusters. We consider separately 2D Bernoulli site percolation and Bernoulli bound percolation on $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$.

**2D site percolation**: let $\omega$ be the random sub-graph of $\mathbb{Z}^2$ obtained by keeping (resp. deleting) a point with probability $p$ (resp. $1-p$) independently for different points in $\mathbb{Z}^2$. Call $Q$, the law of $\omega$. Let $\mathcal{C}$ denote the open cluster of the origin, i.e. the connected component of $\omega$ containing 0 and define

$$p_c = \sup\{p \ ; \ Q[\sharp\mathcal{C} = \infty] = 0\}.$$

For a given choice of $\omega$, $P_x^\omega$ denotes the law of the random walk on $\mathcal{C}$ started at $x$. $(X_k, k \in \mathbb{N})$ is the canonical coordinate process.

**THEOREM 1**: *for any* $p > p_c$*, there exists a constant,* $c_1 = c_1(p)$ *such that,* $Q$*.a.s. on the set* $\sharp\mathcal{C} = \infty$*, and for large enough* $k$*, we have*

$$\sup_{y \in \mathcal{C}} P_0^\omega[X_k = y] \leq \frac{c_1}{k} \,. \tag{0.1}$$

**Bound percolation in** $\mathbb{Z}^d$: we call $\omega$, the random sub-graph of $\mathbb{Z}^d$ obtained by keeping (resp. deleting) an edge with probability $p$ (resp. $1-p$) independently for different edges. As before, $Q$ is the induced law on the set of sub-graphs of $\mathbb{Z}^d$ and $\mathcal{C}$ is the cluster of the origin. We still use the notation $P_x^\omega$ to denote the law of the random walk on $\mathcal{C}$.

**THEOREM 2**: *for any dimension* $d \geq 2$*, there exists* $p(d) < 1$ *such that for any* $p > p(d)$*, there exists a constant,* $c_1 = c_1(p, d)$ *such that,* $Q$*.a.s. on the set* $\sharp\mathcal{C} = \infty$*, and for large enough* $k$*,*

[1] CMI, Université de Provence, 39 Rue F. Joliot Curie, 13453 Marseille Cedex 13, France.
pierre.mathieu@cmi.univ-mrs.fr

[2] Laboratoire Génome et Informatique, Université de Versailles-Saint-Quentin,45 avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles, France.
remy@genetique.uvsq.fr

*we have*

$$\sup_{y\in\mathcal{C}} P_0^\omega[X_k = y] \le \frac{c_1}{k^{d/2}}\,. \tag{0.2}$$

*Comment*: because this is a general property of Markov chains on infinite graphs, see [2], we already knew that $\sup_{x,y\in\mathcal{C}} P_x^\omega[X_k = y] \le C/\sqrt{k}$, for $k \ge 1$. Since an infinite cluster contains, with $Q$ probability 1, arbitrarily long 'linear' pieces, we also have that, $Q$.a.s. $\sup_{x,y\in\mathcal{C}} P_x^\omega[X_k = y] \ge C/\sqrt{k}$. Comparing with (0.1) or (0.2), we thus see that the behaviours of $\sup_{y\in\mathcal{C}} P_0^\omega[X_k = y]$ and $\sup_{x,y\in\mathcal{C}} P_x^\omega[X_k = y]$ are different. This phenomenon is of course due to the lack of transitivity of the graph $\mathcal{C}$. It can be seen as a classical 'quenched' vs 'annealed' dichotomy: fixing the initial point of the random walk should then be interpreted as an annealing procedure. Also note that the usual semi-group technics used to bound $\sup_{x,y\in\mathcal{C}} P_x^\omega[X_k = y]$, as in [2], [4] or [5], cannot be directly applied to prove our theorems.

*Sketch of proof*: we only briefly sketch the proof of the theorems. More details are given in the French text. The proofs of theorems 1 and 2 follow the same pattern. In both cases, the first step is to establish a local isoperimetric inequality. For $n \ge 1$, let $\mathcal{C}^n$ be the connected component of $\mathcal{C} \cap [-n,n]^d$ that contains the origin. Let $\varepsilon > d$ and define the following isoperimetric constant:

$$I_\varepsilon(\mathcal{C}^n) = \inf_{A\subset\mathcal{C}^n} \frac{\sharp(\partial_{\mathcal{C}} A)}{(\sharp A)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}\,,$$

where $\partial_{\mathcal{C}} A$ is the boundary of the set $A$ in $\mathcal{C}$ i.e. the set of nearest neighbour points $x \in \mathcal{C}$ and $y \in \mathcal{C}$ with either $x \in A$ and $y \notin A$, or $x \notin A$ and $y \in A$.

We prove that, under the assumptions of theorem 1 ($d = 2$, site percolation and $p > p_c$) or theorem 2 ($d \ge 2$, bound percolation and $p$ close to 1), for some constant $c_2$ that depends only on $p$ and $d$, $Q$.a.s on the set $\sharp\mathcal{C} = \infty$, for large enough $n$, one has

$$n^{-d/\varepsilon(n)} I_{\varepsilon(n)}(\mathcal{C}^n) \ge \frac{c_2}{n}\,, \tag{0.3}$$

where $\varepsilon(n) = d + 2d\frac{\log\log n}{\log n}$. In the $d$-dimensional, bound percolation setting, (0.3) can be obtained through the Borel-Cantelli lemma and a contour argument –remember that $p$ is close to 1. To establish (0.3) on a two dimensional super critical cluster, we used Kesten's theorem, see [3], on the existence of paths in $\mathcal{C}^n$ linking one side of the square $[-n,n]^2$ to the opposite side.

(0.3) is what we need to bound the probability $P_0^\omega[X_k = y]$ when $y$ is close enough to 0. How close depends on $k$. To estimate $P_0^\omega[X_k = y]$ when $y$ is far from the origin, we can use the Carne-Varopoulos bound. See [1].

*Aknowledgment*: this work started in Pablo Ferrari's office in USP-São Paulo and under his kind and encouraging auspices. May he and the members of IME be thanked here.

———

Soit $X_k$ une marche aléatoire sur un graphe infini, $\mathcal{C}$. Le comportement de $X_k$ en temps long dépend de la géométrie à l'infini de $\mathcal{C}$. En particulier on connait bien les liens entre les propriétés isopérimétriques du graphe $\mathcal{C}$ et le comportement de $\sup_{x,y\in\mathcal{C}} P_x[X_k = y]$, voir [2]. Cet aspect est surtout bien compris dans le cas de graphes assez réguliers, par exemple si $\mathcal{C}$ est un groupe, voir [4].

Dans cette note, nous étudions la décroissance du noyau de la chaleur sur les sous-graphes aléatoires de $\mathbb{Z}^d$ obtenus en percolation. Contrairement au cas d'un groupe, les comportements des quantités $\sup_{x,y\in\mathcal{C}} P_x[X_k = y]$ et $\sup_{y\in\mathcal{C}} P_0[X_k = y]$, où 0 est l'origine, diffèrent. De fait, un amas de percolation contenant, avec probabilité 1, des morceaux linéaires arbitrairement longs, il est clair que $\sup_{x,y\in\mathcal{C}} P_x[X_k = y]$ se comporte comme $1/\sqrt{k}$. En revanche, en choisissant l'origine comme point de départ de la marche , on obtient un effet de 'moyennisation' et le comportement de $\sup_{y\in\mathcal{C}} P_0[X_k = y]$ est le même que pour la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$, soit $k^{-d/2}$.

**Percolation de sites 2D**: soit $\omega$ le sous-graphe aléatoire de $\mathbb{Z}^2$ obtenu en gardant (resp. supprimant) les points de $\mathbb{Z}^2$ avec probabilité $p$ (resp. $1-p$) de façon indépendante. Notons $Q$ la loi de $\omega$. Soit $\mathcal{C}$ la composante connexe de $\omega$ contenant l'origine et posons:

$$p_c = \sup\{p\ ;\ Q[\sharp\mathcal{C} = \infty] = 0\}\,. \tag{1}$$

Pour une certaine réalisation de $\omega$, soit $P_x^\omega$ la loi de la marche aléatoire sur $\mathcal{C}$ issue de $x$. $(X_k, k \in \mathbb{N})$ est le processus des coordonnées sur $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$.

**THÉORÈME 1**: *pour tout $p > p_c$, il existe une constante, $c_1 = c_1(p)$ telle que $Q$.p.s. sur l'évènement $\sharp\mathcal{C} = \infty$, et pour $k$ assez grand, on ait*

$$\sup_{y\in\mathcal{C}} P_0^\omega[X_k = y] \le \frac{c_1}{k}\,. \tag{2}$$

**Percolation de liens dans $\mathbb{Z}^d$**: soit $\omega$ le sous-graphe aléatoire de $\mathbb{Z}^d$ obtenu en gardant (resp. supprimant) les arêtes de $\mathbb{Z}^d$ avec probabilité $p$ (resp. $1-p$) de façon indépendante. Notons encore $Q$ la loi de $\omega$ et $\mathcal{C}$ la composante connexe de $\omega$ contenant l'origine. Soit $P_x^\omega$ la loi de la marche aléatoire sur $\mathcal{C}$.

**THÉORÈME 2**: *pour tout $d \ge 2$, il existe $p(d) < 1$ tel que pour tout $p > p(d)$, il existe une constante, $c_1 = c_1(p, d)$ telle que, $Q$.p.s. sur l'événement $\sharp\mathcal{C} = \infty$, et pour $k$ assez grand, on ait*

$$\sup_{y\in\mathcal{C}} P_0^\omega[X_k = y] \le \frac{c_1}{k^{d/2}}\,. \tag{3}$$

*Ébauche de preuve*: les preuves des deux théorèmes sont similaires et reposent sur certaines inégalités isopérimétriques locales. Soit $\mathcal{C}^n$ la composante connexe de l'ensemble $\mathcal{C} \cap [-n, n]^d$ qui contient l'origine. Soit $\varepsilon > d$. On définit les constantes isopérimétriques:

$$I_\varepsilon(\mathcal{C}^n) = \inf_{A\subset\mathcal{C}^n} \frac{\sharp(\partial_\mathcal{C} A)}{(\sharp A)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}\,, \tag{4}$$

où $\partial_\mathcal{C} A$ est la frontière de l'ensemble $A$ dans $\mathcal{C}$ i.e l'ensemble des couples de plus proches voisins $x \in \mathcal{C}$, $y \in \mathcal{C}$ où, soit $x \in A$ et $y \notin A$, soit $x \notin A$ et $y \in A$.

Nous montrons que, sous les hypothèses du théorème 1 ($d = 2$, percolation de sites et $p > p_c$) ou du théorème 2 ($d \ge 2$, percolation de liens et $p$ proche de 1) il existe une constante $c_2$ qui ne dépend que de $p$ et de $d$, telle que, $Q$.p.s. sur l'événement $\sharp\mathcal{C} = \infty$, pour $n$ assez grand, on a

$$n^{-d/\varepsilon(n)} I_{\varepsilon(n)}(\mathcal{C}^n) \ge \frac{c_2}{n}\,, \tag{5}$$

où $\varepsilon(n) = d + 2d\frac{\log\log n}{\log n}$.

Pour traiter le cas bi-dimensionnel, nous utilisons un résultat de Kesten, voir [3]: on appelle chemin dans $\mathcal{C}^n$, une suite, $x_0, x_1, ..., x_l$, de points de $\mathcal{C}^n$ tels que $x_i$ et $x_{i+1}$ sont voisins. On appelle chemin vertical, un chemin dans $\mathcal{C}^n$ reliant les côtés inférieur et supérieur du carré $[-n,n]^2$. De même pour les chemins horizontaux. Kesten montre qu'il existe deux constantes, $a$ et $b$, telles que, $Q$.p.s. sur l'événement $\sharp\mathcal{C} = \infty$, et pour $n$ assez grand, le nombre de chemins verticaux disjoints dans $\mathcal{C}^n \cap [ib\log n, (i+1)b\log n]$, $i = [-n/(b\log n)], ..., [n/(b\log n)] - 1$, est supérieur à $a\log n$. De même pour les chemins horizontaux. Il est ensuite possible de minorer le volume de la frontière d'un ensemble connexe $A \subset \mathcal{C}^n$ par le nombre de chemins verticaux -ou horizontaux- qui intersectent $A$.

Sous les hypothèses du théorème 2, nous déduisons (5) du lemme de Borel-Cantelli et d'un argument de contours. Notons $m = \sharp(\partial^e A)$, le cardinal de la frontière extérieure de $A$ dans $\mathbb{Z}^d$. De l'inégalité isopérimétrique classique sur $\mathbb{Z}^d$, on déduit que $m \geq \mathcal{I}(\sharp A)^{(d-1)/d}$, où $\mathcal{I} = \mathcal{I}_d$ est la constante isopérimétrique sur $\mathbb{Z}^d$. Comme $A \subset [-n,n]^d$, on a également $m \geq \mathcal{I}(2n+1)^{d/\varepsilon-1}(\sharp A)^{(\varepsilon-1)/\varepsilon}$. D'une part, le nombre de sous-ensembles de $[-n,n]^d$ connexes de volume égal à $m$ est borné par $(2n+1)^d\exp(am)$, où $a$ est une constante ne dépendant que de la dimension, voir [6]. D'autre part

$$Q[\sharp(\partial_{\mathcal{C}}A) \leq c_2(2n+1)^{d/\varepsilon-1}(\sharp A)^{(\varepsilon-1)/\varepsilon}] \leq Q[\sum_{e\in\partial^e A} 1_{\omega(e)=1} \leq \frac{c_2}{\mathcal{I}}m] \leq \exp(-bm)\,,$$

où $b$ est une constante qui dépend de la dimension et de $p$. Il suffit maintenant de choisir $p$ assez proche de 1, et donc $b$ assez grande, et $c_2$ assez petite pour montrer que

$$\sum_n Q[n^{-d/\varepsilon(n)} I_{\varepsilon(n)}(\mathcal{C}^n) \leq \frac{c_2}{n}] < \infty$$

et appliquer le lemme de Borel-Cantelli.

Soit maintenant $(X_k^n, k \in \mathbb{N})$ la marche aléatoire sur $\mathcal{C}^n$ obtenue en tuant la marche $(X_k)$ quand elle sort de $\mathcal{C}^n$. Les constantes $I_\varepsilon(\mathcal{C}^n)$ permettent d'estimer la loi de $X_k^n$: pour $\varepsilon \in [d, 2d]$, $x, y \in \mathcal{C}^n$ et $k \geq 1$, on a

$$P_x^\omega[X_k^n = y] \leq C I_\varepsilon(\mathcal{C}^n)^{-\varepsilon} k^{-\varepsilon/2}\,, \tag{6}$$

où $C$ ne dépend que de $d$, voir [4] ou [5]. De (5) et (6), on déduit que

$$\sup_{y\in\mathcal{C}^n} P_0^\omega[X_k^n = y] \leq c\frac{n^{\varepsilon(n)-d}}{k^{\varepsilon(n)/2}}\,, \tag{7}$$

pour $n$ assez grand. $c$ dépend de $p$ et $d$ mais pas de la réalisation de $\mathcal{C}$.

Avec l'inégalité (7), il est possible de contrôler la probabilité $P_0^\omega[X_k = y]$ quand $y$ est assez proche de l'origine: il faut à peu près $n^2$ sauts à la marche aléatoire $X$ pour quitter la boîte $[-n,n]^d$. Pour $k$ petit devant $n^2$, on peut donc remplacer $X^n$ par $X$ dans l'expression (7). On vérifie de plus que, si $k\log k = bn^2$, où $b \leq 1/(8d-2)$ , alors $n^{\varepsilon(n)-d}k^{-\varepsilon(n)/2} \leq 2k^{-d/2}$ et donc $P_0^\omega[X_k = y] \leq ck^{-d/2}$, à condition toutefois que la distance entre l'origine et $y$ soit inférieure à $n = \sqrt{k\lg k/b}$.

Pour borner $P_0^\omega[X_k = y]$ quand $y$ est loin de l'origine, nous utilisons l'inégalité de Carne et Varopoulos:

$$P_0^\omega[X_k = y] \leq 2\exp(-\frac{1}{2}\frac{d^2(0,y)}{k})\,. \tag{8}$$

Voir [1].

## Références bibliographiques

[1] T.K.Carne: *a transmutation formula for Markov chains.* Bull. Sc. math 109 (1985) 399-405.
[2] Th.Coulhon: *analysis on infinite graphs with regular volume growth.* To appear in the Proceedings of the 1997 Cortona Conference on Random walks and Discrete potentiel theory, Symposia Math., Cambridge.
[3] H.Kesten: *percolation theory for mathematicians.* Progresses in probability, Birkhäuser, Boston (1982).
[4] C.Pittet, L.Saloff-Coste: *a survey on the relationships between volume groth, isoperimetry, and the behaviour of simple random walk on Cayley graphs, with examples.* Preprint.
[5] L.Saloff-Coste: *lectures on finite Markov chains.* École d'été de St-Flour. L.N.M. Springer (1997).
[6] Ya.G.Sinai: *theory of phase transitions: rigorous results.* International Series in Natural Philosophy, Vol. 108. Pergamon Press (1982).
[7] A-S.Sznitman: *Brownian motion, obstacles and random media.* Springer monographs in mathematics, Springer (1998).

*Ce travail a été réalisé lors d'un séjour des auteurs à l'université de São Paulo avec le soutien financier de la FAPESP, contrats no.99/11109-4 pour E.R. et no.99/0961-1 pour P.M.*