

**Planche 3**  
Dérivation, développements limités

### Dérivabilité, dérivée

**EXERCICE 1** [Opérations sur les dérivées] ♣

Soit  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ,  $x \in ]a, b[$  et  $f, g$  deux applications de  $]a, b[$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  et  $g$  sont dérivables en  $x$ .

1. Montrer que  $(f + g)$  est dérivable en  $x$  et  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ .
2. Montrer que  $fg$  est dérivable en  $x$  et  $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ .
3. On suppose que  $g(y) \neq 0$  pour tout  $y \in ]a, b[$ . Montrer que  $f/g$  est dérivable en  $x$  et que :

$$(f/g)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

**EXERCICE 2** [Dérivabilité de  $x \mapsto x^n$ ] ♣

Soit  $n$  un entier relatif. On considère la fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f_n(x) = x^n$ .

1. Quel est l'ensemble de définition de  $f_n$  (distinguer suivant les valeurs de  $n$ ) ?
2. Montrer que  $f_n$  est dérivable sur  $D$  et déterminer sa dérivée.

**EXERCICE 3** [calcul de dérivées] ♣

1. Calculer les dérivées des fonctions  $f_i$  suivantes définies par :

$$f_1(x) = x \ln(x), \quad f_2(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad f_3(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}},$$
$$f_4(x) = \left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)^{\frac{1}{3}}, \quad f_5(x) = x^x, \quad f_6(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x).$$

2. On note  $\Delta(f) = \frac{f''}{f}$ . Calculer  $\Delta(fg)$ .
3. Soit  $f : ]1, +\infty[ \rightarrow ]-1, +\infty[$  définie par  $f(x) = x \ln(x) - x$ . Montrer que  $f$  est une bijection. Notons  $g = f^{-1}$ . Calculer  $g(0)$  et  $g'(0)$ .
4. Calculer les dérivées successives de  $f(x) = \ln(1+x)$ .
5. Calculer les dérivées successives de  $f(x) = x^3 \ln(x)$ .

**EXERCICE 4** [Dérivabilité de  $x \mapsto x^{1/n}$ ] ♣

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et soit  $g : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction  $g_n(x) = x^{1/n}$ . Rappelons que  $g$  est par définition la fonction réciproque de la restriction à  $]0, +\infty[$  de la fonction  $f_n(x) = x^n$ .

1. Montrer que  $g_n$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et déterminer sa dérivée.
2. Montrer que le graphe de  $g_n$  admet une demi-tangente verticale en 0.

**EXERCICE 5** ♣

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \exp(f(x)), \quad f_2 : x \mapsto (f(\sin x))^2, \quad f_3 : x \mapsto \ln |f(x)|, \quad f_4 : x \mapsto f(\ln |f(x)|).$$

**EXERCICE 6** ♣

Soit  $f : x \mapsto 1/x$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On admettra l'existence d'une fonction  $\ln$  (logarithme népérien) définie et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , s'annulant en 1 et vérifiant  $\ln' = f$ .

1. Montrer que la fonction  $\ln$  est ainsi définie de manière unique.
2. Montrer que  $\ln$  est strictement croissante.
3. Soit  $a > 0$  et  $g_a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g_a(x) = \ln(ax) - \ln(a)$ . Montrer que  $g_a$  est dérivable et calculer  $g_a'$  et  $g_a(1)$ .
4. En déduire que pour tout  $a, b > 0$ ,  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ .
5. Montrer, en étudiant une fonction bien choisie, que pour tout  $x > 0$ ,  $\ln(x) \leq x - 1$ .

**EXERCICE 7** [Dérivée non continue] ♣

On définit  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est dérivable en tout point de  $\mathbb{R}$  et calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . La dérivée de  $f$  est-elle continue ?

**EXERCICE 8** ♣

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = x + e^x$ . Montrer que  $f$  est strictement croissante, continue et bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On note  $g$  l'application réciproque de  $f$ . Montrer que  $g$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Calculer  $g'(1)$  et  $g''(1)$ .

**EXERCICE 9** [Exercice de rédaction] ♣

Soit  $\varphi$  une application de  $]0, \infty[$  dans  $\mathbb{R}$ , dérivable (en tout point de  $]0, \infty[$ ) et t.q.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$ .

1. On suppose que  $\varphi'(x) \leq 0$  pour tout  $x > 0$ . Montrer que  $\varphi(x) \geq 0$  pour tout  $x > 0$ .
2. On suppose que  $\varphi'(x) < 0$  pour tout  $x > 0$ . Montrer que  $\varphi(x) > 0$  pour tout  $x > 0$ .

**Applications de la dérivée : Rolle, accroissements finis, extrema locaux, convexité**

**EXERCICE 10** [Application du théorème de Rolle] ♣

1. Dessiner le graphe de fonctions vérifiant :  $f$  admet deux minimum locaux et un maximum local ;  $h$  admet un minimum local qui n'est pas global et un maximum local qui est global ;  $k$  admet une infinité d'extremum locaux ;  $l$  n'admet aucun extremum local.
2. Calculer en quel point la fonction  $f(x) = ax^2 + bx + c$  admet un extremum local.
3. Soit  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ . une fonction deux fois dérivable telle que  $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ . Montrer qu'il existe  $c, d$  tels que  $f'(c) = f'(d) = 0$ . Montrer qu'il existe  $e$  tel que  $f''(e) = 0$ .
4. Montrer que chacune des 3 hypothèses du théorème de Rolle est nécessaire.

**EXERCICE 11** [Extremum local] ♣

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = |1 - x^2|$ .

1. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  mais n'est pas dérivable en  $-1$  et en  $1$ .
2. Montrer que  $f$  admet un maximum local en  $0$  et des minima locaux en  $-1$  et en  $1$ .

**EXERCICE 12** ♣

Soit  $I$  un intervalle ouvert et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. Soit  $k$  un entier  $\geq 2$ . On suppose qu'il existe  $k$  nombres réels distincts appartenant à  $I$  en lesquels  $f$  s'annule. Démontrer qu'il existe au moins  $k - 1$  nombres réels distincts appartenant à  $I$  en lesquels  $f'$  s'annule.

**EXERCICE 13** ♣

1. Montrer que pour tout réel  $x > 0$  on a la double inégalité :

$$\frac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log(x) < \frac{1}{x}$$

2. En déduire que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \log(n)$$

3. Posons  $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n)$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante et convergente.

**EXERCICE 14** [Application des accroissements finis] ♣

1. Soit  $f : x \mapsto \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 2$ . Étudier la fonction  $f$ . Tracer son graphe. Montrer que  $f$  admet un minimum local et un extremum local.
2. Soit  $g : x \mapsto \sqrt{x}$ . Appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle  $[100, 101]$ . En déduire l'encadrement :  $10 + \frac{1}{22} \leq \sqrt{101} \leq 10 + \frac{1}{20}$ .
3. Appliquer le théorème des accroissements finis pour montrer que  $\ln(1+x) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$  pour tout  $x$  strictement positif.
4. Soit  $h : x \mapsto e^x$ . Que donne l'inégalité des accroissements finis sur  $[0, x]$  ?

**EXERCICE 15** [Application règle de l'Hôpital (ou règle de Bernoulli)] ♣

Appliquer la règle de l'Hôpital pour calculer les limites des fonctions suivantes quand  $x$  tend vers 0

$$f : x \mapsto \frac{x}{(1+x)^n - 1}, \quad g : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}, \quad h : x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{\tan(x)} \quad \text{et} \quad k : x \mapsto \frac{x - \sin(x)}{x^3}.$$

**EXERCICE 16** [Étude d'une fonction] ♣

Soit  $a > 0$ . On définit  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de la manière suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{a}{|x|}\right)^x, & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(On rappelle que  $b^x = e^{x \ln b}$ , pour  $b > 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ .)

1. (Continuité de  $f$ )

(a) Montrer que  $e^z \geq 1 + \frac{z^2}{2}$  pour tout  $z \in \mathbb{R}_+$ . En déduire que  $\ln(1+y) \leq \sqrt{2y}$ , pour tout  $y \in \mathbb{R}_+$ .

(b) En utilisant la question précédente, montrer que  $1 \leq f(x) \leq e^{\sqrt{2ax}}$ , pour tout  $x \in ]0, \infty[$ .

(c) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x) = 1$ .

(d) Montrer que  $f$  est continue en 0. [On pourra remarquer que  $f(x)f(-x) = 1$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .]

2. (Dérivabilité de  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$ ) Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  et que  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \neq 0$ . [Pour  $x > 0$ , on pourra mettre  $f'(x)$  sous la forme  $f(x)\varphi(x)$  et utiliser l'exercice 9.] Montrer que  $f$  est strictement croissante.

3. (Dérivabilité en 0?) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = +\infty$ . L'application  $f$  est-elle dérivable en 0? (Justifier la réponse...)

4. (Limites en  $\pm\infty$ ) Donner (en fonction de  $a$ ) les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  de  $f$ .

Dans la suite, on note  $l$  et  $m$  ces limites.

5. (Fonction réciproque) Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $]m, l[$ . On note  $g$  la fonction réciproque de  $f$  (de sorte que  $g$  est une application de  $]m, l[$  dans  $\mathbb{R}$ ). Montrer que  $g$  est dérivable en 1 (noter que  $1 \in ]m, l[$ ) et calculer  $g'(1)$ . [Pour  $h \neq 0$ , on pourra appliquer le théorème des Accoissements Finis à la fonction  $f$  entre les points  $g(1+h)$  et  $g(1)$ .]

6. (Régularité de la fonction réciproque) Montrer que la fonction réciproque de  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]m, l[$  mais que  $f$  n'est pas de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**EXERCICE 17** [Fonction convexe] ♣

Soit  $\varphi$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $\varphi$  est dérivable (c'est-à-dire dérivable en tout point de  $\mathbb{R}$ ) et que  $\varphi'$  est une fonction croissante.

1. Soit  $x < z < y$ . Montrer que  $\frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{z - x} \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(z)}{y - z}$ .

2. Montrer que  $\varphi$  est convexe, c'est-à-dire que

$$(1) \quad \varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R} \text{ et tout } t \in [0, 1].$$

[Pour  $x < y$  et  $t \in ]0, 1[$ , on pourra utiliser la question 1 avec  $z = tx + (1-t)y$ .]

3. On définit ici la fonction  $\psi$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par  $\psi(x) = |x|$  si  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\psi$  est convexe. La fonction  $\psi$  est-elle dérivable en tout point de  $\mathbb{R}$ ?

**Formules de Taylor, équivalents, développements limités**

**EXERCICE 18** [Application formule de Taylor] ♣

1. Écrire les trois formules de Taylor en 0 pour  $x \mapsto \cos(x)$ ,  $x \mapsto \exp(-x)$  et  $x \mapsto sh(x)$ .

2. Écrire les formules de Taylor en 0 à l'ordre 2 pour  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$  et  $x \mapsto \tan(x)$ .

3. Écrire les formules de Taylor en 1 à l'ordre 2 pour  $f : x \mapsto x^3 - 9x^{1/2} + 14x + 3$ .

4. Avec une formule de Taylor à l'ordre 2 de  $g : x \mapsto \sqrt{1+x}$  trouver une approximation de  $\sqrt{1.01}$ .

Même question avec  $\ln(0.99)$  (pour cela on pourra calculer le DL en 0 de  $h : x \mapsto \ln(1-x)$ ).

**EXERCICE 19** [Limites] ♣

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\sin x - x}.$$

2. Calculer

$$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1}{x} \right)^x.$$

Donner un équivalent de  $l - \left( \frac{x+1}{x} \right)^x$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**EXERCICE 20** [Un peu d'analyse numérique] ♣

Donner une valeur approchée de  $\sin(1)$  à  $10^{-6}$ -près, c'est-à-dire donner un nombre réel  $l$  tel que  $|\sin(1) - l| \leq 10^{-6}$ . [On pourra considérer la fonction sinus sur  $[0, 1]$  et écrire la formule de Taylor-Lagrange à un ordre convenable à déterminer ; on remarquera que le reste dans cette formule se borne facilement.]

**EXERCICE 21** [DL, exemple 1] ♣

On définit  $f$  sur  $] -\infty, 1[$  par :

$$f(x) = \arctan \frac{1}{1-x}.$$

Donner le développement limité à l'ordre 3 de  $f$  en 0.

**EXERCICE 22** [DL, exemple 2] ♣

- Calculer le DL en 0 de  $x \mapsto \cosh(x)$  en utilisant TY. Retrouver ce DL en utilisant  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .
- Écrire le DL en 0 à l'ordre 3 de  $f : x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$ . Même question avec  $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ .
- Écrire le DL en 2 à l'ordre 2 de  $h : x \mapsto \sqrt{x}$ .
- Justifier l'expression du DL de  $k : x \mapsto \frac{1}{1-x}$  à l'aide de l'unicité du DL et de la somme d'une suite géométrique.

**EXERCICE 23** [DL d'un polynôme... ] ♣

Donner le développement limité à l'ordre 7 en  $-1$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^4 - 1$ .

**EXERCICE 24** [DL somme, opérations] ♣

- Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de  $f_1 : x \mapsto \exp(x) - \frac{1}{1+x}$ , puis de  $g_1 : x \mapsto x \cos(2x)$  et  $h_1 : x \mapsto \cos(x) \times \sin(2x)$ .
- Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de  $f_2 : x \mapsto \sqrt{1+2\cos(x)}$ , puis de  $g_2 : x \mapsto \exp(\sqrt{1+2\cos(x)})$ .
- Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de  $f_3 : x \mapsto \ln(1+\sin(x))$ . Même question à l'ordre 6 pour  $g_3 : x \mapsto (\ln(1+x^2))^2$ .
- Calculer le DL en 0 à l'ordre  $n$  de  $f_4 : x \mapsto \frac{\ln(1+x^3)}{x^3}$ . Même question à l'ordre 3 pour  $g_4 : x \mapsto \frac{e^x}{1+x}$ .
- Par intégration retrouver la formule du DL de  $f_5 : x \mapsto \ln(1+x)$ . Même question à l'ordre 3 pour  $g_5 : x \mapsto \arccos(x)$ .

**EXERCICE 25** [Utilisation des DL(1)] ♣

Donner la limite en 0 de  $f$  définie sur  $]0, \infty[$  par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

**EXERCICE 26** [Utilisation des DL(2)] ♣

- Calculer la limite lorsque  $x$  tend vers 0 de  $\frac{\sin(x) - x}{x}$ .
- Calculer la limite de  $\frac{\sqrt{x} - 1}{\ln(x)}$  lorsque  $x$  tend vers 1. Même question avec  $\left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{x}}$ , puis  $\frac{1}{\tan^2(x)} - \frac{1}{x^2}$  lorsque  $x$  tend vers 0.
- Soit  $f : x \mapsto \exp(x) + \sinh(x)$ . Calculer l'équation de la tangente en  $x = 0$  et étudier la position du graphe

de  $f$  par rapport à cette tangente. Même question avec  $g(x) = \sinh(x)$ .

4. Calculer le DL en  $+\infty$  à l'ordre 5 de  $h : x \mapsto \frac{x}{x^2 - 1}$ . Même question à l'ordre 2 pour  $\varphi : x \mapsto (1 + \frac{1}{x})^x$ .

5. Soit  $k : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3+1}{x+1}}$ . Déterminer une équation de l'asymptote de  $k$  en  $+\infty$  et la position du graphe par rapport à cette asymptote.

**EXERCICE 27** [DL d'une fonction réciproque] ♣

On définit  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x + \sin x$ .

1. Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , strictement croissante. On note, dans la suite,  $g$  sa fonction réciproque.
2. Montrer que  $f$  et  $g$  sont dérivables en tout point de  $\mathbb{R}$ .
3. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $g$ .

**EXERCICE 28** [Équivalents] ♣

1. Soit  $\alpha > 0$ . Montrer que  $((1+x)^\alpha - 1) \sim \alpha x$  en 0.
2. Montrer que  $(1+x+x^2) \sim x^2$  en  $+\infty$ .
3. Soit  $f, g, h$  des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\mu \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $f \sim h$  et  $g \sim \mu h$  en 0 et que  $\mu \neq 0$ . Montrer que  $(f+g) \sim (\mu+1)h$  en 0. Donner un exemple où ce résultat est faux si  $\mu = 0$ .
4. Soit  $f$  et  $g$  des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f(x) > 0$  et  $g(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f \sim g$  en 0 et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ . On pose  $h(x) = \ln(x)$  pour  $x > 0$ . Montrer que  $h \circ f \sim h \circ g$  en 0.
5. Soit  $f, g, h$  des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f \sim h$  en 0 et que  $g = o(h)$  au voisinage de 0. Montrer que  $(f+g) \sim h$  en 0.

**EXERCICE 29** [Équivalents] ♣

Soit  $f, g, \varphi, \psi$  définies pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + 1$ ,  $g(x) = x^4 + 1$ ,  $\varphi(x) = x^3 - 3x$ ,  $\psi(x) = x^3$ .

1. Montrer que  $f \sim g$  en 0.
2. Montrer que  $\ln(f)$  et  $\ln(g)$  sont définies sur  $] -1, \infty[$  et que  $\ln(f) \not\sim \ln(g)$  en 0.
3. Montrer que  $\varphi \sim \psi$  en  $+\infty$ .
4. Montrer que  $e^\varphi \not\sim e^\psi$  en  $+\infty$ .

**EXERCICE 30** [Étude d'une fonction (1)] ♣

Soit la fonction  $f$  définie sur  $] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$  par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + \tan x)}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est continue et dérivable en 0.
2. Donner le développement limité de  $f$  en 0 à l'ordre 2.
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 0 et la position locale de la courbe de  $f$  par rapport à cette tangente.

**EXERCICE 31** [Étude d'une fonction (2)] ♣

On définit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3x + \frac{\cos(x)}{x^2 + 1}$ .

1. Montrer que  $f$  est dérivable et calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $f$  est strictement croissante.
3. Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
4. Montrer que  $f$  admet un développement limité d'ordre 2 en 0 et donner ce développement. Donner l'équation de la tangente (à la courbe de  $f$ ) en 0 et la position locale de la courbe de  $f$  par rapport à cette tangente.
5. Montrer que  $g$  admet un développement limité d'ordre 2 en 1 et donner ce développement.
6. Donner les asymptotes de  $f$  en  $\pm\infty$ .
7. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$  et donner les asymptotes de  $g$  en  $\pm\infty$ .

**EXERCICE 32** [Étude de  $\ln(1-x)/x$ ] ♣

1. Montrer que pour tout entier  $n$ , la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en zéro. Calculer explicitement ce développement pour  $n = 2$ .
2. Soit  $g : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $g(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$ . Montrer que  $g$  se prolonge par continuité en zéro (à droite).

Soit  $f : [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \in ]0, 1[, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

3. Montrer que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]0, 1[$ .
4. Montrer que  $f$  est dérivable à droite en zéro et donner la valeur de cette dérivée (notée  $f'(0)$ ).
5. Calculer la fonction dérivée  $f'$  sur  $]0, 1[$ . La fonction  $f'$  est-elle continue en zéro ?
6. Montrer que pour tout  $x \in [0, 1[$ , on a  $\ln(1-x) + \frac{x}{1-x} \geq 0$ . En déduire le signe de  $f'(x)$  pour  $x \in ]0, 1[$ .
7. Dresser le tableau de variations de  $f$  et tracer l'allure de son graphe sur  $[0, 1[$  (on pensera à calculer la limite de  $f$  en 1).

**Exercices Supplémentaires**

**EXERCICE 33** [Limite à l'infini]

Soit  $f$  une fonction dérivable de  $]0, \infty[$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

**EXERCICE 34** [Fonctions höldériennes]

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$  et  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k > 0$ . On suppose que, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|^\beta$ .

1. Montrer que  $f$  est continue en tout point de  $\mathbb{R}$ .
2. On suppose, dans cette question, que  $\beta > 1$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ , montrer que  $f'(x) = 0$ . En déduire que  $f$  est constante.
3. (Exemple) Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $g(x) = |x|^{\frac{1}{2}}$ . Montrer que, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ , on a  $|g(y) - g(x)| \leq |y - x|^{\frac{1}{2}}$ . [On pourra montrer qu'on peut supposer  $|y| \geq |x|$ , et distinguer les cas où  $x$  et  $y$  sont de même signe et où  $x$  et  $y$  sont de signe contraire.]

**EXERCICE 35**

Soit  $n$  un entier  $\geq 2$ ,  $a$  et  $b$  des nombres réels et  $P$  le polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  défini par  $P(X) = X^n + aX + b$ .

1. Combien le polynôme  $P'$  a-t-il de racines réelles ?
2. Montrer que le polynôme  $P$  a au plus deux racines réelles si  $n$  est pair et au plus trois racines réelles si  $n$  est impair.

**EXERCICE 36** [Utilisation du théorème des accroissements finis]

Soit  $f$  une application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est dérivable pour tout  $x \neq 0$  et que  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = +\infty$ .

1. Montrer que  $f$  n'est pas dérivable en 0.
2. On suppose maintenant que  $f$  est bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , strictement croissante et que  $f(0) = 0$ . On note  $g$  la fonction réciproque de  $f$  [l'existence de la fonction  $g$  a été vue en cours]. Montrer que  $g$  est dérivable en 0 et que  $g'(0) = 0$ .

**EXERCICE 37** [Condition nécessaire et condition suffisante de minimalité]

Soit  $f$  une application  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}$ .

1. On suppose que  $f$  est de classe  $C^1$  et que  $f$  admet un minimum local en  $a$ . Montrer que  $f'(a) = 0$ .
2. On suppose que  $f$  est de classe  $C^2$ ,  $f'(a) = 0$  et  $f''(a) > 0$ . Montrer que  $f$  admet un minimum local en  $a$ .
3. Donner un exemple pour lequel  $f$  est de classe  $C^2$ ,  $f'(a) = 0$ ,  $f''(a) = 0$  et  $f$  n'admet pas un minimum local en  $a$ .

**EXERCICE 38** [Limite en 0]

Trouver les limites en 0 des fonctions suivantes, définies sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \left( \frac{1}{1+x^2} - \cos(x) \right), \quad g(x) = \frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x}, \quad h(x) = \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

**EXERCICE 39** [DL(3)]

Calculer le DL d'ordre 3 en 0 de  $f$  définie pour  $x \in ]-1, 1[$  par  $f(x) = \sin(x) - \cos(x) + \tan(x) + \frac{1}{1-x}$ .  
Calculer le DL3 d'ordre 3 en  $\frac{\pi}{2}$  de  $f$  définie pour  $x \in ]0, \pi[$  par  $f(x) = \ln(\sin(x))$ .

**EXERCICE 40** [DL(4)]

Donner le DL d'ordre 4 en 0 des fonctions suivantes (définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ) :

$$f(x) = (1 + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{2}}, \quad g(x) = e^{\cos(x)}.$$

**EXERCICE 41** [DL(n)]

On définit  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est continue en 0 et admet un  $DLn$  en 0, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**EXERCICE 42** [Développement limité curieux]

On définit  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est continue en 0.

2. Soit  $q \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que pour tout  $u > 0$ ,  $e^u \geq \frac{u^q}{q!}$ .

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer, en utilisant la question précédente, que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$ . En déduire que  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  en 0 et donner ce développement.

**EXERCICE 43** [Étude de la fonction  $x \mapsto x \arctan x$ ]

Étudier la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x \arctan x.$$

[Montrer que  $f$  est paire. Calculer  $f'$  et  $f''$ . Étudier les asymptotes.]

**EXERCICE 44** [Limite en  $+\infty$ ]

Pour  $x > 0$  on pose  $f(x) = x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . [On pourra, sur une fonction convenable, utiliser un développement limité ou le théorème des accroissements finis.]