

L1 PCEI
Géométrie et polynômes
DS du 6 décembre 2012

Durée : 3h - Responsable : L. Regnier

Documents et calculatrices non autorisés. Prévoir environ 20 minutes par exo, 30 minutes au (grand) maximum. Rédiger soigneusement vos réponses en explicitant (succintement) les propriétés et méthodes que vous utilisez.

Exercice 1 Soient $A(1, 0)$, $B(2, 1)$, $C(1, 2)$ et $D(0, 1)$ des points de \mathbb{R}^2 .

- i) Donner les affixes z_A , z_B , z_C et z_D des points A , B , C , D .
- ii) Trouver les nombres complexes a et b tels que $z_B = az_A + b$ et $z_C = az_B + b$.
- iii) Vérifier que $z_D = az_C + b$ et $z_A = az_D + b$.
- iv) Donner les formes polaires de a et b .
- v) Trouver le point O tel que son affixe z_O vérifie $z_O = az_O + b$.
- vi) Étant donné un point $M(x, y)$ de \mathbb{R}^2 d'affixe z_M décrire géométriquement le point M' d'affixe $az_M + b$.

Exercice 2 Résoudre l'équation $z^2 - (1 + i)z + 5i = 0$.

Exercice 3 Énoncer et démontrer la formule du binôme.

Exercice 4 On note (F_n) la suite de Fibonacci définie par récurrence par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

- i) Calculer F_2, F_3, \dots, F_{10}
- ii) En utilisant l'algorithme d'Euclide, pour $n = 3, 4, \dots, 10$ calculer les coefficients U_n et V_n tels que $U_n F_{n-1} + V_n F_n = 1$.
- iii) Montrer que $F_{n+2} F_n - 1 - F_{n+1} F_n = (-1)^n$ pour tout entier $n > 0$.
- iv) Dédire de ce qui précède que pour tout $n > 0$, F_{n-1} et F_n sont premiers entre eux.

Exercice 5

- i) Soient n et p deux entiers positifs. Montrer que si p est un nombre premier et p ne divise pas n alors p est premier avec n .
- ii) Donner un contre-exemple à l'énoncé précédent dans le cas où p n'est pas premier.
- iii) Montrer le *lemme de Gauss* : si p est premier et p divise ab alors p divise a ou p divise b .
- iv) Donner un contre-exemple au lemme de Gauss dans le cas où p n'est pas premier.